

Паралельний чисельний алгоритм для абстрактного диференціального рівняння з умовою у кінцевий момент часу, який базується на нелокальній регуляризації

В.Б. Василик, В.Л. Макаров, Д.О. Ситник

Інститут математики НАН України, Київ;

vasylyk@imath.kiev.ua, makarov@imath.kiev.ua, sytnik@imath.kiev.ua

We consider a final value problem for the first order differential equation with unbounded operator coefficient in Banach space. The given problem is regularized by the two-point non-local condition with parameter. An exponentially convergent numerical method is, then, constructed and justified for the solution of the regularized problem. Software implementation of the method admits multilevel parallelization of computations.

Рассмотрено обратную по времени задачу для дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве. Произведено регуляризацию искомой задачи с помощью двухточечного нелокального условия с параметром. Построено и обосновано экспоненциально сходящийся метод приближения решения полученного регуляризованного аналога искомой задачи. Программная реализация предложенного метода допускает многоуровневое распараллеливание вычислений.

1 Вступ

В останні роки проблематика, пов'язана з оберненими задачами, є однією з тих, що найбільш розвиваються в галузі прикладної математики. Це зумовлено тим, що такі задачі часто виникають на практиці. Обернені задачі, як правило, приводять до некоректно поставлених

за Адамаром задач. Тому знаходження їхніх розв'язків потребує використання методів з регуляризацією, що значно ускладнює процес їх побудови [2, 8, 13].

В багатьох практичних задачах [1, 3, 15] часто виникає необхідність відновити стан системи в початковий момент часу, за відомими вимірами в кінцевий момент (наприклад визначення температури в $t = 0$, коли відоме значення при $t = T$). Такі задачі називаються ретроспективними або зворотніми в часі [16]. Для їх наближеного розв'язування розробляється багато чисельних методів. Разом з тим, побудова високоефективних методів залишається відкритою проблемою.

Останнім часом широко почали використовуватись методи з спектральною швидкістю збіжності, які, як відомо, оптимальну або майже оптимальну швидкість збіжності в заданому класі функцій [7]. Для аналітичних даних вони мають експоненціальну швидкість збіжності. Такі методи були запропоновані нещодавно для різних задач [7, 9, 17, 18]. Часто для постановки задачі використовується узагальнення у вигляді задачі в деякому банаховому просторі. Це означає, що розглядається деяка початкова чи крайова проблема для рівняння з операторним коефіцієнтом A [7, 13, 21].

Основною метою цієї роботи є побудова експоненціально збіжного методу для наступної ретроспективної задачі:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \quad t \in [0, T], \\ u(T) &= u_0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u_0 \in X$. Оператор A — це лінійний оператор з областю визначення $D(A)$, щільною в деякому банаховому просторі X . Вважатимемо, що спектр A є підмножиною множини Σ

$$\Sigma = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x > b_S, |y| < d_S\}, \quad (2)$$

Щодо резольвенти $R_A(z) = (zI - A)^{-1}$ припускатимемо виконання умови

$$\|R_A(z)\| \leq M, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma, \quad (3)$$

для деякого $M > 0$. Оператори такого роду в літературі прийнято називати операторами зі спектром у напівсмузі. Паралельні чисельні методи для ретроспективних задач у постановці подібній до (1) було запропоновано в роботах [10, 20]. Об'єднуючою рисою цих робіт є припущення про секторіальність оператора A . Більш жорстке обмеження

про приналежність спектру до напівсмуги (2) дозволяє застосувати до ретроспективної задачі ефективнішу техніку регуляризації за допомогою нелокальної умови (для порівняння різних підходів регуляризації див. [14, Section 3.2]). В даній роботі вперше запропоновано паралельний алгоритм для задачі (1), де A — оператор зі спектром у напівсмузі, що базується на експоненціально збіжному методі для регуляризованого аналогу ретроспективної задачі, отриманого з (1) заміною фінальної умови на нелокальну.

Структура роботи наступна. Пункт 2 присвячений регуляризації (1) за допомогою нелокальної умови та побудові інтегрального представлення розв'язку регуляризованої задачі. У пункті 3 досліджується питання оптимального вибору контуру інтегрування для параметризації отриманого представлення розв'язку. Чисельний метод наближення розв'язку регуляризованої задачі наведено у пункті 4, де, також, отримано апріорну оцінку похибки методу та повну похибку наближеного розв'язування (1).

2 Регуляризація та явне зображення розв'язку

Неоднорідна задача може бути зведена до однорідної (1) за допомогою заміни. Дійсно, розглянемо задачу

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(x), \quad x \in [0, X], \\ u(T) &= u_0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $f(x)$ — деяка відома векторнозначна функція в X . Покладемо

$$v_1(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds,$$

і розглянемо замість (4) однорідну задачу

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av &= 0, \quad t \in [0, T], \\ v(T) &= u_0 - v_1(T). \end{aligned}$$

Тоді, розв'язок початкової неоднорідної задачі записується у вигляді

$$u(t) = v(t) + v_1(t).$$

Функція $v_1(t)$ може бути обчислена за допомогою експоненціально збіжного метода з [7].

Враховуючи завжди існуючу можливість переходу до однорідної задачі, далі ми розглядатимемо виключно задачу (1). Варто також зазначити, що значення T може бути змінене простим масштабуванням часової змінної t , а значить, не втрачаючи загальності, можна припускати $T > 1$.

Іншим важливим припущенням, яке є типовим для теорії зворотніх у часі задач є необхідність існування розв'язку задачі (1) в точці $t = 0$ при заданому кінцевому значенні u_0 . Це фактично означає, що для такого u_0 норма $\|e^{AT}u_0\|$ є обмеженою. Детальне порівняння порівняння умов на $u(0)$, а також огляд різних підходів регуляризації задачі (1) викладені [4, 11, 14]. В цій роботі ми додатково вимагатимемо, щоб $u(\tau) \in D(A)$, тобто $\|Au(\tau)\| \leq C < \infty$, для деякого $\tau > 0$.

Припустимо, що кінцеве значення u_0 з (1) задане з деякою похибкою δ

$$\|u_0 - u_\delta\| \leq \delta.$$

Така ситуація є типовою для застосувань [1, 3, 15]. Тому далі в роботі ми розглядатимемо задачу зі збуреними початковими даними

$$\begin{aligned} \frac{du_\delta(t)}{dt} + Au_\delta(t) &= 0, \quad t \in [0, T), \\ u_\delta(T) &= u_\delta, \end{aligned} \quad (5)$$

замість оригінальної задачі (1). Задачі (1), (5) є некоректно поставленими за Адамаром [5], оскільки існування розв'язку $u_\delta(t)$ в $t = 0$ більше не впливає з обмеженості $\|e^{AT}u_0\|$.

Для регуляризації (5) її наступною нелокальною задачею:

$$\begin{aligned} \frac{du_{\varepsilon, \delta}(t)}{dt} + Au_{\varepsilon, \delta}(t) &= 0, \quad t \in [0, T), \\ u_{\varepsilon, \delta}(T) + \frac{1}{\varepsilon}u_{\varepsilon, \delta}(0) &= u_\delta, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризації. Існування розв'язку (6) залежить від взаємного розташування нулів z_k функції $B(z) = 1/\varepsilon + e^{-zT}$ та спектру оператора A [12]. Розв'язавши рівняння $B(z) = 0$, отримаємо формулу загального вигляду нулів r_k

$$r_k = \frac{1}{T} (\ln |\varepsilon| + i (\text{Arg}(-\varepsilon) + 2\pi k)) = \frac{1}{T} \ln \varepsilon + i \frac{\pi + 2\pi k}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Умови існування розв'язку нелокальної задачі визначені Теоремою 1 з [12], у нашому випадку зводяться до сукупності нерівностей

$$\frac{\pi}{T} > d_S \vee \frac{1}{T} \ln \varepsilon \leq b_S \quad (8)$$

де $2d_S$ — ширина спектральної напівсмуги, а b_S — точна нижня межа Σ (2). Умова (8) разом з властивістю (3) резольвенти оператора A дозволяє записати розв'язок (6) у вигляді

$$u_{\varepsilon, \delta}(t) = e^{-At} \left(e^{-AT} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} u_\delta. \quad (9)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1 (с. 201 [14]). *Припустимо, що оператор A задовольняє умови (2), (3), а розв'язок задачі (1) існує на проміжку $t \in [0, T]$ для деякого $u_0 \in X$. Тоді розв'язок $u_{\varepsilon, \delta}$ задачі (6) — обмежений на $t \in [\tau, T]$ для будь-якого $u_\delta \in X$, причому*

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \sup_{\|u_0 - u_\delta\| \leq \delta} \|u_{\varepsilon, \delta}(\tau) - u(\tau)\| \\ &\leq \delta \varepsilon C_1(\tau) + \left(C_2 \varepsilon^{-\frac{\tau}{T}} + C_3 + \frac{C_4}{T} \ln \varepsilon \right) \varepsilon^{-\frac{\tau}{T}}, \end{aligned} \quad (10)$$

А тому для заданого $\tau > 0$ завжди можна підібрати $\varepsilon = \delta^{\frac{T}{T+\tau}}$ так, щоб $\Delta(\tau) \rightarrow 0$ коли $\delta \rightarrow 0$.

Авторами [14] доведено непокращуваність оцінки (10) за порядком у класі розв'язків задачі (1), які обмежені в $t = 0$.

Для подальших міркувань ми використовуватимемо інтегральне представлення розв'язку (9) за допомогою формули Данфорда-Коші [6]

$$u_{\varepsilon, \delta}(t) = \int_{\Gamma_I} \frac{e^{-zt}}{B(z)} R_A(z) u_\delta dz, \quad \Gamma_I = \partial\Omega. \quad (11)$$

Контур Γ_I повинен бути додатно-орієнтований відносно $\Sigma \subseteq \Omega$ та такий що $r_k \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$. Додатково вимагатимемо щоб підінтегральна функція експоненціально спадала на контурі при $z \rightarrow \infty$, а параметризація контуру визначала конформне відображення смуги D_d шириною $2d$ у підмножину $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, для якої інтеграл (11) є збіжним.

3 Вибір контуру інтегрування

Нехай

$$\Gamma_I : z(\xi) = a_0 + z_1(\xi) + \varphi z_2(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty),$$

де

$$z_1(\xi) = b_0 + b_I \sqrt{j_I + \xi^2} - id_I \tanh \xi, \quad (12)$$

$$z_2(\xi) = a_I (\cosh k\xi - \sinh k\xi). \quad (13)$$

Контури $z_1(\xi)$ та $z_2(\xi)$ матимуть додатній напрям обходу спектральної напівсмуги Σ , при $\xi \in (-\infty, \infty)$, якщо a_I, b_I, d_I — додатні. Параметри контуру з (12) визначаються наступним чином [19]

$$b_I = \frac{2d_S}{\pi - 2d}, \quad d_I = \frac{\pi d_S}{\pi - 2d}, \quad b_0 = b_S - b_I \sqrt{j_i - d^2} - d_I \tan d.$$

Стала $j_I = 1.4$ підібрана так, щоб верхня границя смуги $D_d \subset \mathbb{C}$

$$D_d = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \Re(\xi) \in (-\infty, \infty), \Im(\xi) \in [-d, d]\}$$

переводилась конформним відображенням $\xi \rightarrow z_1(\xi)$ у криву, яка дотикається до спектральної напівсмуги у точці b_S та огинає кути Σ з мінімальним відхиленням (детальна дискусія про субоптимальний вибір j_I приведена в [19]). Сталу k в (13) визначимо з рівності $kd = \pi/4$, в наслідок якої $\Re(z_2(x - id)) = 0$ і $\Im(z_2(x + id)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Для фіксованого d , параметри a_0 та φ визначимо з умов

$$\exists x_S < 0 : \Re(z(x_S + id)) = b_S \wedge \Im(z(x_S + id)) \geq d_S, \quad (14a)$$

$$\exists x_C < 0 : z(x_C - id) = r_0. \quad (14b)$$

Сукупність умов (14a) забезпечує приналежність Σ області обмеженої кривою Γ_C . Ця крива є образом верхньої межі D_d при відображенні $\xi \rightarrow z(\xi)$. В якості x_S можна взяти точку $x_0 = -1.705216804$: $\Re(z_1(x_0 + id)) = b_S$. При цьому друга умова з (14a) буде задовольнятися автоматично, оскільки вона має місце для $z_1(x_0 + id)$, а уявна частина $z_2(x + id)$ дорівнює нулю $\forall x \in \mathbb{R}$. Таким чином (14a) зводиться до рівняння

$$a_0 + \Re(z_1(x_0 + id)) + \varphi \Re(z_2(x_0 + id)) = b_S,$$

лінійного відносно a_0, φ . Спростивши попереднє рівняння матимемо

$$a_0 = -\varphi \Re(z_2(x_0 + id)). \quad (15)$$

Умова (14b) вимагає, щоб нижня межа смуги D_d переводилась згаданим конформним відображенням у криву Γ_C , на якій лежить полюс r_0 (7) підінтегральної функції з (11). Врахувавши рівність $\Re(z_2(x - id)) = 0$, перепишемо (14b) у вигляді

$$\begin{cases} \Im(z_1(x_C - id)) + \varphi \Im(z_2(x_C - id)) = \frac{\pi}{T}, \\ a_0 + \Re(z_1(x_C - id)) = \frac{1}{T} \ln \varepsilon. \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) є нелінійною, оскільки невідоме значення x_C , очевидно, буде залежати від величини ε . Наша ціль отримати явні формули для параметрів контуру Γ_I . Для цього спочатку визначимо параметри для деякого фіксованого ε_0 . Отриманий контур підходить (в сенсі (8)) для будь-якого $\varepsilon < \varepsilon_0$, оскільки $\Re(r_k(\varepsilon)) < \Re(r_k(\varepsilon_0))$. Далі зафіксуємо a_0 обчислене з (15) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ та будемо обчислювати тільки φ для $\varepsilon > \varepsilon_0$. Отриманий таким чином контур все ще задовольнятиме (14), щоправда вже з іншою парою x_S, x_C . Покладемо $\varphi = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 : \frac{1}{T} \ln \varepsilon_0 = b_S + a_0$ та визначимо x_C з другого рівняння в (16):

$$\begin{aligned} \frac{b_I}{2} \sqrt{2 \left(\sqrt{(x^2 - d^2 + j_I)^2 + 4d^2 x^2} + x^2 - d^2 + j_I \right)} \\ - \frac{d_I \sin 2d}{2(\sinh^2 x + \cos^2 d)} = b_S - b_0. \end{aligned}$$

Для знаходження наближеного розв'язку цього рівняння застосуємо формулу Лагранжа обернення розкладу в ряд лівої частині в околі точки x_1 , де

$$\frac{b_I}{2} \sqrt{2 \left(\sqrt{(x_1^2 - d^2 + j_I)^2 + 4d^2 x_1^2} + x_1^2 - d^2 + j_I \right)} = b_S - b_0,$$

звідки

$$x_1 = - \frac{(b_S - b_0) \sqrt{(b_I^2 d^2 + (b_S - b_0)^2)(b_I^2 d^2 - b_I^2 j_I + (b_S - b_0)^2)}}{(b_I^2 d^2 + (b_S - b_0)^2) b_I}. \quad (17)$$

Матимемо

$$x_C = x_1$$

$$+ \left(\frac{b_I^2 x_1 ((b_S - b_0)^2 + d^2 b_I^2)}{(b_S - b_0) ((b_S - b_0)^2 + b_I^2 (x_1^2 - d^2 + j_I))} + \frac{d_I \sin 2d \sinh 2x_1}{2(\sinh^2 x_1 + \cos^2 d)^2} \right)^{-1} \times \frac{d_I \sin 2d}{2(\sinh^2 x_1 + \cos^2 d)}. \quad (18)$$

Далі знайдемо a_I з першого рівняння в (16):

$$a_I = \sqrt{2} \frac{\Im(z_1(x_C - id)) - \pi/T}{\sinh kx_1}, \quad (19)$$

та обчислимо a_0 за допомогою (15). Побудований таким чином контур Γ_I , а також криві Γ_S, Γ_C , разом з їх прообразами та двома найменшими значеннями r_k (круги, сірого (червоного) кольору) зображені на Рис. 1.

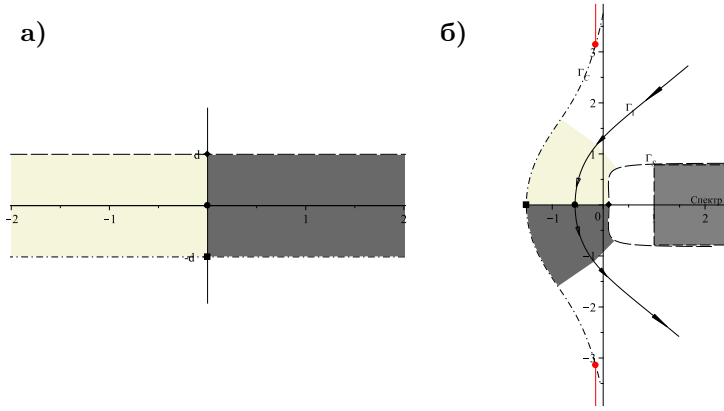


Рис 1. Контур інтегрування Γ_I разом з кривими Γ_S, Γ_C б) та їх прообрази а) ($\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.8627323$, $T = 1$, $b_S = 1$, $d_S = \pi/4$, $d = \pi/6$)

Критичне значення ε_0 обчислюється за формулою

$$\varepsilon_0 = e^{T(b_S - a_0)}. \quad (20)$$

Для визначення параметрів контуру у випадку, коли $\varepsilon > \varepsilon_0$ нам достатньо заново обчислити x_C та φ . Щоб це зробити підставимо

$\frac{1}{T} \ln \varepsilon - c_0$ замість b_S в (17), (18), та обчислимо φ використовуючи (16). Матимемо

$$\varphi = \frac{\pi/T - \Im(z_1(x_C - id))}{\Im(z_2(x_C - id))}. \quad (21)$$

Визначений таким чином контур для випадку $\varepsilon = 1000$, зображений на Рис. 2.

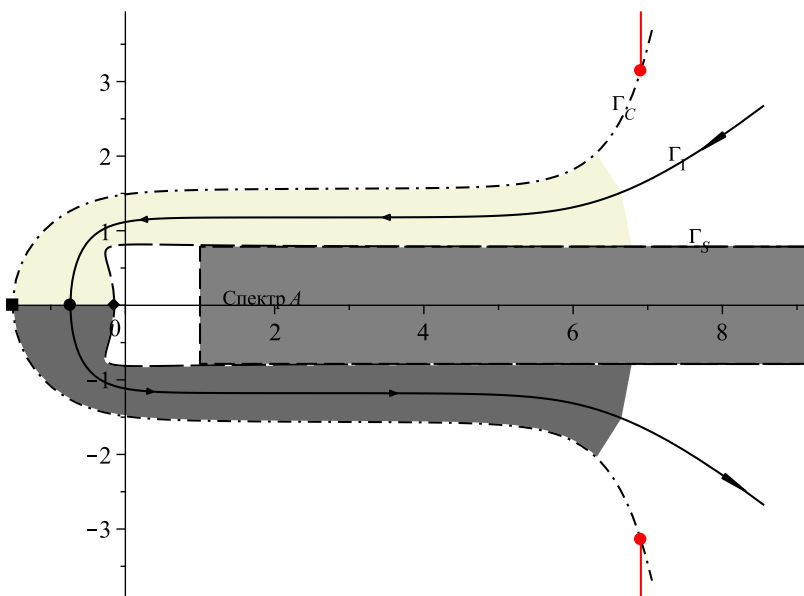


Рис 2. Контур інтегрування Γ_I разом з кривими Γ_S, Γ_C , напівсмугою Σ та нулями $r_k, k = -1, 0$ ($\varepsilon = 1000, T = 1, b_S = 1, d_S = \pi/4, d = \pi/6$)

4 Чисельний метод

Замінімо в інтегралі (11) $R_A(z(\xi))$ на скориговану резольвенту

$$R_A^1(z) = R_A(z) - 1/z,$$

коректна визначеність якої для $u_{\varepsilon,\delta}(t)$, $t \in [\tau, T]$ гарантується умовою $u_{\varepsilon,\delta}(\tau) \in D(A)$, а потім параметризуємо отриманий інтеграл, використавши контур Γ_I побудований у частині 3. Матимемо

$$u_{\varepsilon,\delta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z(\xi)\tau}}{e^{-z(\xi)T} + 1/\varepsilon} z'(\xi) R_A^1(z(\xi)) u_\delta dz, \quad (22)$$

де

$$z'(\xi) = \frac{b_I \xi}{\sqrt{\xi^2 + j_I}} - id_I(1 - \tanh^2 \xi) + \varphi a_I k (\sinh k\xi - i \cosh k\xi).$$

Оцінимо норму

$$\left\| z'(\xi) R_A^1(z(\xi)) u_\delta \right\| \leq \left\| \frac{z'(\xi)}{z(\xi)} R_A(z(\xi)) A u_\delta \right\| \leq M \left| \frac{z'(\xi)}{z(\xi)} \right| \|A u_\delta\|,$$

модуль відношення $\frac{z'(\xi)}{z(\xi)}$ оцінюється наступним чином

$$\begin{aligned} \left| \frac{z'(\xi)}{z(\xi)} \right| &\leq \sqrt{\frac{\left(\varphi a_I k \sinh k\xi + \frac{b_I \xi}{\sqrt{\xi^2 + j_I}} \right)^2 + \left(\varphi a_I k \cosh k\xi + \frac{d_I}{\cosh^2 \xi} \right)^2}{\left(\varphi a_I \cosh k\xi + b_I \sqrt{\xi^2 + j_I} \right)^2 + (\varphi a_I \sinh k\xi)^2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\left(k \tanh k\xi + \frac{b_I}{\varphi a_I \cosh k\xi} \right)^2 + \left(k + \frac{d_I}{\varphi a_I \cosh k\xi \cosh^2 \xi} \right)^2}{2}} \\ &\leq C_z k, \end{aligned}$$

а тому

$$\left\| z'(\xi) R_A^1(z(\xi)) u_\delta \right\| \leq M C_z k \|A u_\delta\|. \quad (23)$$

Тепер оцінимо іншу частину підінтегрального виразу в (22)

$$\left| \frac{e^{-z(\xi)\tau}}{e^{-z(\xi)T} + 1/\varepsilon} \right| = \frac{e^{-\tau \Re(z(\xi))}}{\sqrt{e^{-2T \Re(z(\xi))} + \frac{2}{\varepsilon} e^{-T \Re(z(\xi))} \cos T \Im(z(\xi)) + \frac{1}{\varepsilon^2}}}.$$

Залежна від ξ частина знаменнику спадає значно швидше ніж чисельник при $|\xi| \rightarrow \infty$, оскільки $T \gg \tau$. Отже, існує $\xi_0 > |x_C|$, таке, що попередній вираз задовольняє нерівність

$$\left| \frac{e^{-z(\xi)\tau}}{e^{-z(\xi)T} + 1/\varepsilon} \right| \leq \varepsilon e^{-\tau(a_0+b_0+b_I\sqrt{j_I+\xi^2}+\varphi a_I \cosh k\xi)}, \quad |\xi| > \xi_0, \quad (24)$$

яка гарантує суперекспоненціальне спадання підінтегральної функції в (22) коли $|\xi| \rightarrow \infty$. З графіку норми цієї підінтегральної функції на Рис. (3) а) видно, що вона спочатку досягає свого максимуму, а потім починає швидко спадати, коли $\tau\varphi a_I \cosh k\xi_0$ домінує над рештою $z(\xi)$. Враховуючи таку поведінку норми виразу з (22), а також той факт,

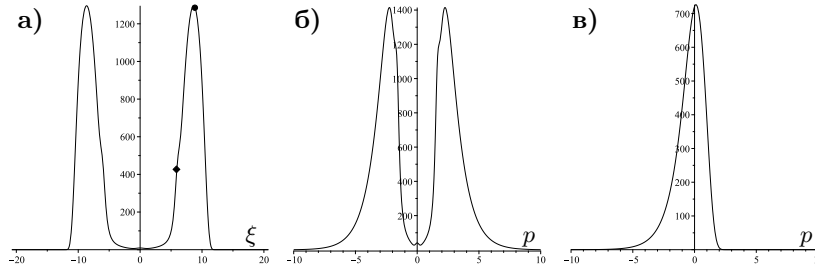


Рис 3. Графіки норм: підінтегральної функції з (22) а), функції $\mathcal{F}_1(p)$ б) та $\mathcal{F}_{21}(p)$ в) ($\varepsilon = 1000$, $T = 1$, $b_S = 1$, $d_S = \pi/4$, $d = \pi/6$)

що τ — мале по відношенню до T , виберемо в якості ξ_0 точку, де

$$\tau\varphi a_I \cosh k\xi_0 = \frac{1}{\max\{2, \ln \varepsilon\}},$$

звідки

$$\xi_0 = \frac{1}{k} \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\tau\varphi a_I \max\{2, \ln \varepsilon\}} \right). \quad (25)$$

Візуально порівняти взаєморозташування точок x_C та ξ_0 , а також величину норм підінтегрального виразу з (22) можна використовуючи Рис. 3 а), де величина норми у точці x_C позначена ромбом, а норма в ξ_0 — кругом чорного кольору.

Розіб'ємо інтеграл в (22) на три частини

$$u_{\varepsilon, \delta}(\tau) = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{e^{-z(\xi)\tau}}{e^{-z(\xi)T} + 1/\varepsilon} z'(\xi) R_A^1(z(\xi)) u_\delta dz \\ + \left(\int_{-\infty}^{-\xi_0} + \int_{\xi_0}^{\infty} \right) \frac{e^{-z(\xi)\tau}}{e^{-z(\xi)T} + 1/\varepsilon} z'(\xi) R_A^1(z(\xi)) u_\delta dz$$

і перепишемо його у вигляді

$$u_{\varepsilon, \delta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(p) dp + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_2(p) dp, \quad (26)$$

де $\mathcal{F}_2(p) = \mathcal{F}_{21}(p) - \mathcal{F}_{22}(p)$,

$$\mathcal{F}_1(p) = \frac{e^{-z(\psi_1(p)\tau)} z'(\psi_1(p))}{e^{-z(\psi_1(p)T) + 1/\varepsilon}} \psi_1'(p) R_A^1(z(\psi_1(p))) u_\delta \\ \psi_1(p) = \frac{\xi_0(e^p - 1)}{1 + e^p}, \quad \psi_1'(p) = \frac{2\xi_0 e^p}{(1 + e^p)^2},$$

$$\mathcal{F}_{21}(p) = \frac{e^{-z(\psi_2(p)\tau)} z'(\psi_2(p))}{e^{-z(\psi_2(p)T) + 1/\varepsilon}} \psi_2'(p) R_A^1(z(\psi_1(p))) u_\delta \\ \mathcal{F}_{22}(p) = \frac{e^{-z(-\psi_2(p)\tau)} z'(-\psi_2(p))}{e^{-z(-\psi_2(p)T) + 1/\varepsilon}} \psi_2'(p) R_A^1(z(-\psi_1(p))) u_\delta \\ \psi_2(p) = \xi_0 + \ln \left(e^p + \sqrt{1 + e^{2p}} \right), \quad \psi_2'(p) = (1 + e^{-2p})^{-1/2}$$

Проведена заміна $\xi \rightarrow p$ дозволяє, по-перше, компенсувати ріст ξ_0 , при $\varepsilon \rightarrow \infty$ та, по-друге, згустити сітку застосованих нижче квадратурних формул у околі ξ_0 (див. Рис 3 б), в)). Це істотно покращує обчислювальні характеристики результуючого методу наближення розв'язку (5).

Наблизимо інтеграли (26) наступними Сінс-квдратурними формулами

$$v_{N_1, N_2}(t) = \frac{h_1}{2\pi i} \sum_{k=-N_1}^{N_1} \mathcal{F}_1(kh_1) + \frac{h_2}{2\pi i} \sum_{n=-N_2}^{N_2} \mathcal{F}_2(nh_2), \quad (27)$$

де $N_1, N_2, N_3 > 0$ — параметри дискретизації. Похибка наближення (27) має вигляд [18, Теорема 3.2.1]

$$\|u_{\varepsilon, \delta} - v_{N_1, N_2}(t)\| \leq 2k\varepsilon K \left(\xi_0 e^{-\pi\sqrt{\frac{N_1+1}{3}}} + e^{-\pi\sqrt{\frac{N_2+1}{3}}} \right) \|Au_\delta\|, \quad (28)$$

де $K > 0$ — деяка стала незалежна від N_1, N_2, N_3 . Має місце

Теорема 4.1. *Припустимо, що оператор A задовольняє умови (2), (3), а розв'язок задачі (5) існує на проміжку $t \in [0, T]$ для деякого $u_\delta \in X$ та заданих $\varepsilon, \delta > 0$, причому $u_{\varepsilon, \delta}(\tau) \in D(A)$. Тоді для заданих $N > 0$ Сінс-квадратурна формула (27) наближає розв'язок регуляризованої ретроспективної задачі (5) і має рівномірну відносно $t \in [\tau, T]$ експоненціальну швидкість збіжності, яка характеризується оцінкою*

$$\|u_{\varepsilon, \delta} - v_{N_1, N_2}(t)\| \leq 2k\varepsilon C e^{-\pi\sqrt{\frac{N+1}{3}}} \|Au_\delta\|. \quad (29)$$

де $h_l = \pi(3N_l)^{-1/2}$, $l = 1, 2$, а $C > 0$ — деяка стала, що залежить від M, T та не залежить від N . Параметри N_1, N_2, N_3 з (27) визначаються за формулами

$$N_1 = \frac{N}{\ln^2 \xi_0}, \quad N_2 = N, \quad N_3 = \frac{1}{h_2 k} \operatorname{arccosh} \frac{h_2 N}{\tau \varphi_{a_I}}. \quad (30)$$

Доведення. Для доведення (29) спочатку оцінимо норми $\mathcal{F}_1(p)$ та $\mathcal{F}_2(p)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_1(p)\| &\leq \left| \frac{e^{-z(\psi_1(p))\tau}}{e^{-z(\psi_1(p))T} + 1/\varepsilon} \right| |\psi'_1(p)| \|z'(\psi_1(p))R_A^1(z(\psi_1(p)))u_\delta\| \\ &\leq 2k\varepsilon \xi_0 M C_z K_1(\xi_0, \tau, \psi'_1) e^{-|p|} \|Au_\delta\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{21}(p)\| &\leq \left| \frac{e^{-z(\psi_2(p))\tau}}{e^{-z(\psi_2(p))T} + 1/\varepsilon} \right| |\psi'_2(p)| \|z'(\psi_2(p))R_A^1(z(\psi_2(p)))u_\delta\| \\ &\leq k\varepsilon M C_z K_2(\xi_0, \tau, \psi'_2) e^{-|p|} e^{-\tau\varphi_{a_I}} \exp(k|p|) \|Au_\delta\|, \end{aligned}$$

тут $K_1(\xi_0, \tau, \psi'_1), K_2(\xi_0, \tau, \psi'_2)$ — це сталі залежні від ξ_0, τ та норм ψ'_1, ψ'_2 , відповідно. Оцінка норми $\mathcal{F}_{22}(p)$ ідентична оцінці $\|\mathcal{F}_{21}(p)\|$, а отже

$$\|\mathcal{F}_2(p)\| \leq 2k\varepsilon M C_z K_2(\xi_0, \tau, \psi'_2) e^{-|p|} e^{-\tau\varphi_{a_I}} \exp(k|p|) \|Au_\delta\|.$$

Вираз зліва в останній оцінці спадає експоненціально, коли $p \rightarrow -\infty$ та суперекспоненціально, коли $p \rightarrow +\infty$. Для того, щоб збалансувати похибку відкидання Sinc-квадратурної формули узгодимо N_2 та N_3 : $\|\mathcal{F}_2(-h_2 N_2)\| \asymp \|\mathcal{F}_2(h_2 N_3)\|$. Покладемо

$$e^{-h_2 N_2} = e^{-\tau \varphi a_I \exp(k h_2 N_3)},$$

звідки

$$h_2 N_2 = \tau \varphi a_I \exp(k h_2 N_3).$$

Розв'язавши це рівняння відносно N_3 та позначивши $N_2 = N$, отримаємо останній вираз в (30). Вираз для N_1 одержується узгодивши похибку першої квадратурної формули в (27) з другою. \square

Наслідок 4.1. *Повна похибка наближення розв'язку $u(t)$ задачі (1) виразом $v_{N_1, N_2}(t)$ з (27) має вигляд*

$$\|u(t) - v_{N_1, N_2}(t)\| \leq K \delta^\gamma + 2k \varepsilon C e^{-\pi \sqrt{\frac{N+1}{3}}} \|Au_\delta\|$$

де K — деяка стала залежна від C_1, C_2, C_3 , $\gamma \leq \frac{\tau}{T+\tau}$, $a \varepsilon = \delta^{-\frac{T}{T+\tau}}$.

Кожна з квадратур у формулі (27) може бути обчислена паралельно і незалежно одна від одної. Це дозволяє розпаралелити процес розв'язання послідовності просторових задач необхідних для знаходження результату дії резольвенти $R_A^1(z_k)$ на u_δ , при різних $z_k \in \Gamma_I$. Обчислені значення $R_A^1(z_k)u_\delta$ дозволяють визначити $v_{N_1, N_2}(t)$ для довільної кількості значень $t_i \in [\tau, T]$, обмежуючись, при цьому, тільки повторним обчисленням скалярних частин $\mathcal{F}_1(p)$, $\mathcal{F}_2(p)$. Зазначені аргументи в комплексі з урахуванням додаткового рівня паралелізму по ε, τ підкреслюють надзвичайну обчислювальну ефективність побудованого чисельного методу.

Висновки

Розроблений в роботі паралельний чисельний метод наближення розв'язку ретроспективної задачі (1) спирається на спеціально оптимізований контур інтегрування. Оцінка похибки (29) не може бути істотно покращена залишаючись в межах класу Sinc-квадратурних методів наближення (11), оскільки при побудові контуру використана

максимально можлива область аналітичності підінтегральної функції. Подальша оптимізація запропонованого методу через узгодження параметрів контуру з точкою розбиття ξ_0 істотно залежить від співвідношення між величинами ε та τ і тому вимагає спеціалізації методу до конкретної прикладної галузі. Таке узгодження разом з аналізом обчислювальних аспектів реалізації методу залишається об'єктом майбутніх досліджень.

- [1] Bagtzoglou A. C., Atmadja J. *Mathematical Methods for Hydrologic Inversion: The Case of Pollution Source Identification // Water Pollution: Environmental Impact Assessment of Recycled Wastes on Surface and Ground Waters; Engineering Modeling and Sustainability / Ed. by Tarek A. Kassim.* — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 65–96. — ISBN: 978-3-540-28565-6.
- [2] Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. S. J. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems.* — Wiley-Interscience, 1985. — P. 308.
- [3] Carasso A. S. *Procedure for digital image restoration.* — 1997. — May 6. — US Patent 5,627,918.
- [4] Carasso A. S. *Reconstructing the past from imprecise knowledge of the present: Effective non-uniqueness in solving parabolic equations backward in time // Mathematical Methods in the Applied Sciences.* — 2013. — Vol. 36, no. 3. — P. 249–261.
- [5] Fattorini H. O., Kerber. A. *The Cauchy Problem.* — Cambridge University Press, 1984.
- [6] Fujita H., Saito N., Suzuki T. *Operator theory and numerical methods.* — Amsterdam; London : Elsevier, 2001. — Vol. 30 of *Studies in Mathematics and Its Applications.*
- [7] Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V. *Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Frontiers in Mathematics.* — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180. — ISBN: 978-3-0348-0118-8.
- [8] Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problems.* — Berlin : Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012. — Vol. 55 of *Inverse and Ill-posed Problems Series.* — P. xvi+459. — Theory and applications.
- [9] Kwon K., Sheen D. *A parallel method for the numerical solution of integro-differential equation with positive memory // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2003. — Vol. 192, no. 41-42. — P. 4641–4658.
- [10] Lee J., Sheen D. *A parallel method for backward parabolic problems based on the laplace transformation // SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2006. — Vol. 44, no. 4. — P. 1466–1486.

- [11] Lee J., Sheen D. F. John's stability conditions versus a Carasso's SECB constraint for backward parabolic problems // *Inverse Problems*. — 2009. — feb. — Vol. 25, no. 5. — P. 055001.
- [12] Makarov V. L., Sytnyk D. O., Vasylyk V. B. Existence of the solution to a nonlocal-in-time evolutional problem // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. — 2014. — sep. — Vol. 19, no. 3. — P. 432–447. — Access mode: <http://arxiv.org/abs/1406.5417>.
- [13] Melnikova I. V., Filinkov A. Abstract Cauchy problems: three approaches. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. — Vol. 120 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — P. xxii+236.
- [14] Melnikova I. V., Filinkov A. Abstract Cauchy problems: three approaches. — CRC Press, 2001. — mar.
- [15] Optimization-based atmospheric plume source identification / Amvrossios C. Bagtzoglou, Eric D. Kenney, April Hiscox, David R. Miller // *Environmental Forensics*. — 2014. — mar. — Vol. 15, no. 2. — P. 147–158.
- [16] Samarskii A. A., Vabischevich P. N. Regularized difference schemes for evolutionary second order equations // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 1992. — Vol. 02, no. 03. — P. 295–315.
- [17] Sheen D., Sloan I. H., Thomée V. A parallel method for time-discretization of parabolic problems based on contour integral representation and quadrature // *Math.Comp.* — 2000. — Vol. 69. — P. 177–195.
- [18] Stenger F. Numerical methods based on sinc and analytic functions. — Springer-Verlag, New York, 1993. — Vol. 20 of Springer Series in Computational Mathematics. — P. xvi+565. — ISBN: 0-387-94008-1.
- [19] Sytnyk D. Parallel approximation for abstract time-dependant Schrödinger equation. — 2017.
- [20] Vasylyk V. B. Exponentially convergent method for the final value problem for the first order differential equation in Banach space // *Збірник праць Інституту математики НАН України*. — 2014. — Т. 11, № 4. — С. 509–523.
- [21] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1967.