Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т. 12, № 4, 299-312

УДК 517.5

В. В. Шкапа (Ін–т математики НАН України, Київ)

ГРІДІ-АЛГОРИТМИ НА КЛАСАХ (ψ, β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain the exact order estimates of approximations by greedy algorithms of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of periodic functios in the space L_q for some relations between parameters p and q.

Встановлено точні за порядком оцінки наближень гріді-алгоритмами класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

1. Вступ. Роботу присвячено дослідженню наближень гріді-алгоритмами класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q. У вступі наведено означення класів функцій та коротко історію їх дослідження в окресленому напрямку, у другій частині містяться допоміжні твердження. Основною є третя частина, де викладено отримані результати щодо оцінок наближень гріді-алгоритмами.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \leq q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)| \,, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Нехай далі $\psi \neq 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta\mathrm{sign}k}}{\psi(|k|)}\hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, с. 132]), назвемо (ψ,β) - похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > 0, \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^{r}_{p,\beta}$ (див., наприклад, [1, с. 25]).

Далі наведемо означення грiдi-алгоритму. Нехай $\{\hat{f}(k(l))\}_{l=1}^{\infty}$ — коефіцієнти Фур'є $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функції $f \in L_1$, впорядковані в порядку незростання їх модулів, тобто

$$|\hat{f}(k(1))| \geq |\hat{f}(k(2))| \geq ...$$

Позначимо для $f \in L_q$

$$G_m(f,x) := \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l))e^{ik(l)x}$$

і якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$G_m(F)_q := \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - G_m(f,\cdot)\|_q. \tag{1}$$

З історією дослідження величин (1) для деяких важливих функціональних класів можна ознайомитися у відомій монографії [3], а також у роботах [4−6].

Позначимо далі через B множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^\gamma(t+1)}{t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ $(B \ge C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі константи $C_i,\ i = 1, 2, ...,$ які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій вимірюється похибка наближення.

2. Допоміжні твердження. В цьому пункті сформулюємо декілька необхідних означень та відомих тверджень, які нам знадобляться при доведенні отриманих результатів.

Для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$ будемо розглядати апроксимативну характеристику

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \|f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot)\|_q\ , \tag{2}$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k e^{in_k x}$, Θ_m— набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$ та c_k — довільні комплексні числа. Величину (2) називають найкращим m-членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$.

Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f\in F} e_m(f)_q. \tag{3}$$

Величина $e_m(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С. Б. Стєчкіним [7] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f)_q$ і $e_m(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації як індивідуальних функцій так і певних класів функцій. З більш детальною бібліографією і відповідними результатами, що стосуються дослідження величин (2) та (3) можна ознайомитися в монографії [8].

Легко бачити, що згідно означень для $F \subset L_q$

$$e_m(F)_q \ll G_m(F)_q \tag{4}$$

та

$$e_m(F)_2 = G_m(F)_2. \tag{5}$$

Теорема А [9]. *Нехай $1 < q \le p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Теорема Б [10]. *Нехай $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Нагадаємо означення ще однієї апроксимативної характеристики, оцінки якої нами будуть використовуватися.

Для $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q,\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(x) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q.$$

Теорема В [1, с.215]. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема Г [11]. *Нехай $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тоді для довільного t з множини тригонометричних поліномів справедлива оцінка*

$$\|t_\beta^\psi\|_p \ll \psi^{-1}(n)\|t\|_p.$$

Теорема Ґ [4]. *Якщо $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, то*

$$\|f - G_m(f)\|_q \le (1 + 3m^{h(q)})e_m(f)_q,$$

де $h(q) = |\frac{1}{2} - \frac{1}{q}|$.

Теорема Д [12]. *Нехай $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi)_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Нехай $T_n(x)$ — тригонометричний поліном порядку, не вищого за n. Тоді має місце таке твердження.

Теорема Е [13]. *Має місце нерівність*

$$\|T_n\|_p \ll n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|T_n\|_q, \qquad 1 \le q \le p \le \infty. \tag{6}$$

Нерівність (6) називають нерівністю різних метрик.

Теорема Є [10]. *Нехай $2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \ge 0, \ k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \le 0, \ k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}$$

і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка

$$e_m(L_{\beta,1}^\psi)_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}}.$$

Твердження А [2, Т.II, с.119]. *Нехай $\psi(t)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов (7) або (8) і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{m-1}\psi(m)(t\psi(t))^{-1}=O(1), \tag{9}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по m. Тоді для довільного тригонометричного полінома t_m порядку m виконується нерівність

$$\|(t_m)_\beta^\psi\|_1\le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t_m\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ — рівномірно обмежена по m і t_m.

3. Основні результати. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $1\le q\le 2\le p<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^\psi_{\beta,p})_q\asymp\psi(m).$$

Доведення. Прийнявши до уваги нерівність (4), одержимо

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_q\ll G_m(L^\psi_{\beta,p})_q. \tag{10}$$

З іншого боку, з (5) випливає

$$G_m(L^\psi_{\beta,p})_q\le G_m(L^\psi_{\beta,p})_2=e_m(L^\psi_{\beta,p})_2. \tag{11}$$

Скориставшись теоремами А і Б для даного випадку, будемо мати

$$e_m(L^\psi_{\beta,p})_q\asymp\psi(m).$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $1<p<q\le 2$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $t\in\mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^\psi_{\beta,p})_q\asymp\psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Оцінка зверху слідує з оцінки величини

$$e_m(L^{\psi}_{\beta,p})_2 \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},$$

$1<p<2,$ яка, в свою чергу, є наслідком оцінки наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх сумами Фур'є. Відповідний результат отриманий у теоремі B.

Встановимо оцінку знизу. З цією метою будемо використовувати поліноми Рудіна–Шапіро $\mathcal{R}_l(x)$:

$$\mathcal{R}_l(x) = \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx}, \ \varepsilon_j = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

для яких, (див., наприклад, [14, с. 155]), має місце порядкова оцінка

$$\|\mathcal{R}_l\|_\infty \ll 2^{\frac{l}{2}}. \tag{12}$$

Нам також знадобляться відомі ядра Валле Пуссена $V_m(x)$:

$$V_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{l=m}^{2m-1} D_l(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $D_l(x) = \sum\limits_{|k|\le l} e^{ikx}$ — ядро Діріхле.

Далі покладемо для $\varepsilon = \pm 1$

$$\Lambda_{\pm 1} := \{k : \widehat{\mathcal{R}}_l(k) = \pm 1\},$$

і нехай $\varepsilon = \pm 1$ буде таким, що $|\Lambda_\varepsilon| > |\Lambda_{-\varepsilon}|$. Тоді по заданому m підберемо $l \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{l-2} \le m < 2^{l-1}$, візьмемо малий додатний параметр δ і розглянемо функцію

$$f(x) = C_3 \psi(2^l) 2^{l(\frac{1}{p}-1)} f_1(x), \quad C_3 > 0,$$

де $f_1(x) = V_m(x) + \varepsilon\delta\mathcal{R}_m(x), \quad 0<\delta \le m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_3>0$ функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|f^{\psi}_{\beta}\|_p \ll 1$.

З цією метою скористаємось теоремою Г та відомим співвідношенням (див., наприклад, [15, ст. 66])

$$\|V_{2^l}\|_p \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})},\ 1 \le p \le \infty, \tag{13}$$

таким чином можемо записати

$$\|f_\beta^\psi\|_p \ll \psi^{-1}(m)\|f\|_p \le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(\|V_m\|_p + \delta\|\mathcal{R}_m\|_p) \le$$

$$\le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(\|V_m\|_p + \delta\|\mathcal{R}_m\|_\infty) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}(2^{l(1-\frac{1}{p})} + 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}2^{\frac{l}{2}}) \ll 1.$$

Звідси слідує, що при належному виборі сталої $C_3 > 0$ функція $f \in L^\psi_{\beta,p}$.

Далі скористаємося результатом роботи [4, с. 581] де показано, що при $1 \le q \le 2$ та $1 < p \le 2$ має місце оцінка

$$\|f_1 - G_m(f_1)\|_q \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, використавши цю оцінку, будемо мати

$$\sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \|f - G_m(f)\|_q \gg \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}\|f_1 - G_m(f_1)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(m)m^{\frac{1}{p}-1}m^{\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$, $t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$G_m(L^\psi_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Оцінка зверху слідує із теорем Ґ та Д:

$$\|f - G_m(f)\|_q \le (1 + 3m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}})e_m(f)_q \ll$$

$$\ll m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Тому
$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \ll \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (14)$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. За заданим m виберемо $l\in\mathbb{N}$ з умови $2^{l-1}\le m<2^l$ і розглянемо функцію
$$f_2(x)=C_4\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}V_{2^l}(x), \quad C_4>0.$$

Легко переконатися, що функція $f_2\in L^{\psi}_{\beta,p}$. Дійсно, згідно з теоремою Г та співвідношення (13), можемо записати
$$\|(f_2)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m)\|f_2\|_p \ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}2^{l(1-\frac{1}{p})}=1.$$
Звідси слідує, що при належному виборі сталої $C_4>0$ функція $f_2\in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Використовуючи (6), отримаємо співвідношення
$$\|V_{2^l}-G_m(V_{2^l})\|_q \gg m^{-\frac{1}{q}}\|V_{2^l}-G_m(V_{2^l})\|_\infty \gg m^{1-\frac{1}{q}}. \qquad (15)$$
Тому, враховуючи (15), будемо мати
$$\sup_{f_2\in L^{\psi}_{\beta,p}}\|f_2-G_m(f_2)\|_q \gg \psi(2^l)2^{l(\frac{1}{p}-1)}\|f_2-G_m(f_2)\|_q \gg$$
$$\gg \psi(m)m^{\frac{1}{p}-1}m^{1-\frac{1}{q}}=\psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$
Таким чином, при $1<p\le 2\le q<\infty$ виконується оцінка
$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай $2\le p\le q<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$ і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $t\in\mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедливе наступне співвідношення*
$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Оскільки $L^{\psi}_{\beta,p}\subset L^{\psi}_{\beta,2}$, то
$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \le G_m(L^{\psi}_{\beta,2})_q$$

і тому, прийнявши до уваги співвідношення (14) при $p=2$, отримуємо оцінку зверху

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \ll \psi(m) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Для встановлення оцінки знизу за заданим m виберемо $l \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалось співвідношення $m \asymp 2^l$, візьмемо малий додатний параметр δ і розглянемо функцію

$$f_3(x) = C_5 \psi(2^l) 2^{-\frac{l}{2}} f_4(x),$$

де $f_4(x) := \mathcal{R}_m(x) + \varepsilon\delta D_m(x), \quad 0 < \delta \le m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_5 > 0$ функція f_3 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_3)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll 1$. З цією метою скористаємось теоремою Г та відомим співвідношенням (див., наприклад, [16, ст. 25])

$$\|D_{2^l}\|_p \asymp 2^{l(1-\frac{1}{p})}, \ 1 < p < \infty. \tag{16}$$

Таким чином будемо мати

$$\|(f_3)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(m)\|f_3\|_p \le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(\|\mathcal{R}_m\|_p + \delta\|D_m\|_p) \le$$

$$\le \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(\|\mathcal{R}_m\|_\infty + \delta\|D_m\|_p) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(m)\psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}(2^{\frac{l}{2}} + 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}2^{l(1-\frac{1}{p})}) \ll 1.$$

Звідси слідує, що при певному виборі сталої C_5 функція f_3 належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далі використаємо оцінку, встановлену в [4, с. 582]:

$$\|f_4 - G_m(f_4)\|_q \gg m^{1-\frac{1}{q}}, \quad 2 \le q \le \infty.$$

Прийнявши до уваги це співвідношення, будемо мати

$$\sup_{f_3 \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f_3 - G_m(f_3)\|_q \gg \psi(2^l)2^{-\frac{l}{2}}\|f_4 - G_m(f_4)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(m) m^{-\frac{1}{2}} m^{1-\frac{1}{q}} = \psi(m) m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином при $2\le p\le q<\infty$ виконується наступна оцінка

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Теорему 4 доведено.

У наступному твердженні встановимо точну за порядком оцінку величини $G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ при $2\le q<\infty$. При цьому зазначимо, що на функції ψ будуть накладені додаткові умови, крім належності їх до множини B, що зумовлено використанням відповідних допоміжних тверджень.

Теорема 5. *Нехай $2\le q<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$, виконується одна з умов (7) або (8) і, крім того, існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1+\varepsilon}$, $t\in\mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}. \tag{17}$$

Доведення. Оцінка зверху в (17) слідує з відповідної оцінки величини $e_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$, $2\le q<\infty$, що була встановлена у теоремі Ґ та теореми Є.

$$\|f-G_m(f)\|_q \le (1+3m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}})e_m(f) \ll$$
$$\ll m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\psi(m)m^{\frac{1}{2}} = \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Тому

$$G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \ll \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу величини $G_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$. За заданим m виберемо $l\in\mathbb{N}$ з умови $2^{l-1}\le m<2^l$ і розглянемо функцію

$$f_5(x)=C_6\psi(2^l)V_{2^l}(x),\quad C_6>0.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_6>0$ функція f_5 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_5)^{\psi}_{\beta}\|_1\ll 1$.

З цією метою скористаємось твердженням А. Зауважимо, що умова (9) виконується, оскільки існує число $\alpha>1-\frac{1}{q}$ таке, що послідовність $\varphi(m)=m^{\alpha}\psi(m)$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi(m)}{k\psi(k)}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\varphi(k)k}\le\frac{1}{m^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k^{\alpha}}{k}\le 1.$$

Таким чином, на підставі твердження A та (13) одержимо, що

$$\|(f_5)_{\beta}^{\psi}\|_1\ll\psi^{-1}(m)\|f_5\|_1\ll\psi^{-1}(m)\psi(2^l)\asymp 1.$$

Звідси слідує, що $f_5\in L_{\beta,1}^{\psi}$ при певному виборі сталої C_6.

Далі, врахувавши (15) та співвідношення між числами m і l, можемо записати

$$\sup_{f_5\in L_{\beta,1}^{\psi}}\|f_5-G_m(f_5)\|_q\gg\psi(2^l)\|f_5-G_m(f_5)\|_q\gg\psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином при $2\le q<\infty$ виконується оцінка

$$G_m(L_{\beta,1}^{\psi})_q\asymp\psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

На завершення даного пункту наведемо деякі коментарі до отриманих результатів, порівнявши їх з оцінками близьких, в певному сенсі, апроксимативних характеристик класів $L_{\beta,p}^{\psi}$.

Нагадаємо, що

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_q=\sup_{f\in L_{\beta,p}^{\psi}}e_m^{\perp}(f)_q=\sup_{f\in L_{\beta,p}^{\psi}}\inf_{\Theta_m}\left\|f(\cdot)-S_{\Theta_m}(f,\cdot)\right\|_q,$$

де $S_{\Theta_m}(f,x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\hat f(n_k)e^{in_kx}$, Θ_m — набір із m цілих чисел $n_1,...,n_m$.

Легко бачити, що згідно означення величин $e_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_q$ та $G_m(L_{\beta,p}^{\psi})_q$ має місце нерівність

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_q\le G_m(L_{\beta,p}^{\psi})_q.$$

У роботах [9], [10] та [17] отримано наступні твердження.

Теорема Ж [9]. *Нехай $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедливі наступні співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \begin{cases} \psi(m), & 1 < q \le p < \infty, \\ \psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q < \infty. \end{cases}$$

Теорема З [10]. *Нехай $1 < p < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_1 \asymp \psi(m).$$

Теорема И [17]. *Нехай $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов (7) або (8) і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином, співставляючи результати теорем 1–5 та теорем Ж–И, бачимо, що існують співвідношення між параметрами p та q, для яких

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q,$$

а також такі, для яких величини $e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ та $G_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ мають різні порядки.

***Зауваження* 1.** Поклавши в теоремах 1-5 $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, отримаємо відповідний результат для величини $G_m(W^r_{p,\beta})_q$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40.** — Т.I. — 427 с.; Т.II. — 468 с.
3. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation. — Cambridge: Cambridge University Press, 2011. — 418 p.
4. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approx. — 1998. — **14**. — P. 569 – 587.
5. *Войтенко С. П.* Найкращі тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних / Войтенко С.П. — К.: Ін-т математики НАН України, 2010. — 28 с. — (Препринт / НАН України, Ін-т математики; 2010.1).

6. *Stasyuk S. A.* Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii-Besov classes for small smoothness // J. Approx. Theory — 2014. — **177**. — P. 1 – 16.
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37–40.
8. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **93.** — 352 с.
9. *Федоренко А. С.* Найкращі m-членні тригонометричні і ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Доп. НАН України. — 2000. — Вип.7. — С. 27 — 31.
10. *Шкапа В. В.* Апроксимативні характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2015. (в друці)
11. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ,β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ //Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92 – 105.
12. *Федоренко А. С.* О наилучших m-членных тригонометрических приближениях классов (ψ,β)-дифференцируемых функций одной переменной. // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Київ: Ін-т математики НАН України. — 1998. — Вип.3. — С. 250 — 258.
13. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.
14. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды // М.: Наука. — 1984. — 496 с.
15. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. — 1986. — **178**. — 112 с.
16. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sc. Publ. Inc, 1993. — 272 p.
17. *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$. // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2014. — **11**, № 3. — С. 315–329.