УДК 517.51

И. А. Шевченко (Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СВЕРТОК ОБОБЩЕННЫМИ СПЛАЙНАМЫ

We obtain the exact values of the best non-symmetric approximations of the classes of convolutions with CVD-kernels by splines S_{2n,K_1} and S^1_{2n,K_2} such that $\bigvee_0^{2\pi}(s) \le 1$ and $\|s\|_1 \le 1$ respectively.

Найдены точные значения наилучших несимметричных приближений классов сверток с CVD-ядрами обобщенными сплайнами S_{2n,K_1} и S^1_{2n,K_2} такими, что $\bigvee_0^{2\pi}(s) \le 1$ и $\|s\|_1 \le 1$ соответственно.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$. Если α и β-положительные числа, то для любой функции $f \in L_p$ положим $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$, где $f_\pm(t) = max\{\pm f(t), 0\}$.

Наилучшим (α,β)-приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p будем называть величину

$$E\left(f,H\right)_{p;\alpha,\beta} = \inf_{u\in H} \|f-u\|_{p;\alpha,\beta}\,. \tag{1}$$

Если еще $M \subset L_p$ — некоторый класс функций, то величина

$$E\left(M,H\right)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f\in M} E\left(f,H\right)_{p;\alpha,\beta} \tag{2}$$

называется наилучшим $(\alpha;\beta)$-приближением класса M множеством H в метрике L_p.

При $\alpha = \beta = 1$ величины (1) и (2) совпадают с обычным наилучшим L_p — приближением функции f (обозначение $E\left(f,H\right)_p$)и класса M (обозначение $E\left(M,H\right)_p$) соответственно.

Пусть $H \subset L_p$, сопоставим функции $f(t) \in L_p$ подмножества

$$H_f^+ = \{u(t) : u \in H, u(t) \le f(t)\},$$
$$H_f^- = \{u(t) : u \in H, u(t) \ge f(t)\}.$$

Наилучшим односторонним приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p будем называть

$$E^{\pm}(f,H)_p = \begin{cases} \inf \|f-u\|_p : u \in H_f^{\pm}, H_f^{\pm} \ne \oslash, \\ \infty, H_f^{\pm} = \oslash \end{cases} .$$

Если $M \subset L_p$-некоторый класс функций, то величина

$$E^{\pm}(M,H)_p = \sup_{f\in M} E^{\pm}(f,H)_p$$

называется наилучшим односторонним приближением класса M подмножеством H в метрике L_p.

Известно также, что при достаточно общих предположениях [1, теорема 1.4.10]

$$\lim_{\beta\to\infty} E(f,H)_{p;1,\beta} = E^+(f,H)_p,$$
$$\lim_{\beta\to\infty} E(M,H)_{p;1,\beta} = E^+(M,H)_p,$$
$$\lim_{\alpha\to\infty} E(f,H)_{p;\alpha,1} = E^-(f,H)_p,$$
$$\lim_{\alpha\to\infty} E(M,H)_{p;\alpha,1} = E^-(M,H)_p. \tag{3}$$

Как обычно, свертку $(K*\varphi)(x)$ функций $K \in L_1$ (ядра свертки) и $\varphi \in L_1$ определим равенством

$$(K*\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)dt.$$

Суммируемую 2π-периодическую функцию $K \perp 1$ называют CVD - ядром (ядром, не увеличивающим осциляцию) и записывают $K \in CVD$, если для произвольной непрерывной 2π -периодической функции f выполняется неравенство $\nu(a+K*f) \le \nu(f)$, где $a \in R$, $\nu(g)$ — число перемен знака 2π-периодической функции g на периоде $[0,2\pi)$.

Через $K_r, r = 1, 2, ...$ обозначим свертку $K * B_r$, где

$$B_r(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-r}\cos(mx - \frac{\pi r}{2}), r = 1, 2, ...$$

— ядро Бернулли.

Для заданого ядра $K \in CVD, K \perp 1$. Через $S_{2n,K}$ будем обозначать множество обобщенных сплайнов вида

$$u(t) = c + \sum_{k=1}^{2n} c_k K\left(t - \frac{k\pi}{n}\right), \tag{4}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R, \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0$.

Через $S^1_{2n,K}$ будем обозначать множество обобщенных сплайнов вида

$$u(t) = c + \int_0^{2\pi} K(t - v)s_0(v)dv, \tag{5}$$

где $c \in R, s_0 \in S_{2n,0}$ ($S_{2n,0}$ — множество кусочно-постоянных функций с узлами в точках $\frac{k\pi}{n}, k \in Z$).

Пусть $\varphi_{1;\alpha,\beta}(x)$ — четная $\frac{2\pi}{n}$–периодическая функция, которая на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{n}\right]$ определяется таким образом:

$$\varphi_{1;\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, x \in \left[0; \frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)}\right) \\ -\beta, x \in \left[\frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)}; \frac{\pi}{n}\right) \end{cases}$$

Пусть заданы CVD-ядро $K \perp 1$ и множество $F \subset L_1$. Через $K * F$ обозначим класс функций вида $f(x) = c + (K * \varphi)(x)$, где $c \in R$, $\varphi \in F$.

Через W^0_1 обозначим класс функций $f \in L_1$ таких, что $\|f\|_1 \le 1$, а через W^0_V-класс 2π-периодических функций f таких,что $\bigvee_0^{2\pi}(f) \le 1$.

В случае $K = B_r$ $B_r * W^0_1$ и $B_r * W^0_V$ - это стандартные соболевские классы W^r_1 и W^r_V — соответственно.

В данной заметке мы найдем точные значения величин $E\left(K_1 * W^0_1, S_{2n,K_1} \cap K * W^0_V\right)_{1;\alpha,\beta}$ и

$E\left(K_2 * W_1^0, S^1_{2n,K_2} \cap K_2 * W_1^0\right)_{1;\alpha,\beta}$. В. Ф. Бабенко [2], [3] найдены точные значения величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1})_1$ при $r \in N$ и $E(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r)_1$ при всех $r \geq 3$ соответственно, а в [4] эти результаты обобщены на случай несимметричных приближений. В [5] и [6] найдены точные значения симметричного и несимметричного приближений классов периодических функций, задаваемых при помощи произвольных дифференциальных операторов с постоянными коэфициентами и вещественным спектром, обобщенными сплайнами с этих классов.

Теорема 1. *Для любого $n \in N$, нечетного $K \in CVD$ справедливо следующее равенство*

$$E\left(K_1 * W_1^0, S_{2n,K_1} \cap K * W_V^0\right)_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max} + \frac{\pi}{2n}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min} + \frac{\pi}{2n}\right)\right),$$

где t_{max} и t_{min} таковы, что

$$K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) = \max_t \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)\right),$$

$$K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) = \min_t \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)\right).$$

Теорема 2. *Для любого $n \in N$, четного $K \in CVD$ справедливо следующее равенство*

$$E\left(K_2 * W_1^0, S^1_{2n,K_2} \cap K_2 * W_1^0\right)_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right),$$

где t_{max} *и* t_{min} *таковы, что*

$$K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}(t_{max}) = \max_t \left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}(t)\right),$$

$$K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}(t_{min}) = \min_t \left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}(t)\right).$$

***Доказательство теоремы* 1.** Для сокращения записей положим

$$C_n = \left\{ c = (c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) \in R^{2n} : \sum_{k=1}^{n} c_k = 0, \sum_{k=1}^{n} |c_k| \le 1 \right\}$$

Для $u(t) \in S_{2n,K_1}$ условие $u(t) \in K * W_V^0 \cap S_{2n,K_1}$ эквивалентно условию $\sum_{k=1}^{2n} |c_k| \le 1$.

Применяя теорему двойственности для наилучших (α,β)-приближений выпуклым множеством в метрике L_1 [1, предложение 1.4.9], после несложных преобразований получим

$$E := E\left(K_1 * W_1^0, S_{2n,K_1} \cap K * W_V^0\right)_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \sup_{f \in K_1 * W_1^0} \sup_{\begin{cases} \|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1, \\ g \perp 1 \end{cases}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt - \right.$$

$$\left. - \sup_{u \in S_{2n,K_1} \cap K * W_V^0} \int_0^{2\pi} u(t) g(t) dt = \right.$$

$$= \sup_{\begin{cases} \|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1, \\ g \perp 1 \end{cases}} \sup_{\begin{cases} \|\varphi\|_{1;\alpha,\beta} \le 1, \\ \varphi \perp 1 \end{cases}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(K_1 * g\right)(t) \varphi(t) dt - \right.$$

$$\left. - \sup_{C \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k \left(K_1 * g\right)(t_k) = \right.$$

$$= \sup_{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1} \left\{ E\left(K_1 * g\right)_\infty - \sup_{C \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k \left(K_1 * g\right)(t_k) \right\}, \qquad (6)$$

где $t_k = \frac{k\pi}{n}, k = 0, ..., 2n-1$.

Здесь и ниже $E\left(K_1 * g\right)_\infty$ — наилучшее приближение константой в метрике L_∞.

Известно [7, теорема 7.1], что

$$E\left(K_1 * g\right)_\infty \le E\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\right)_\infty . \tag{7}$$

Пусть $t_{max}^{'}$ и $t_{min}^{'}$ — точки максимума и минимума функции $K_1 * g$. Очевидно, что найдутся $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$|t_{max}^{'} - t_{k_1}| \le \frac{\pi}{2n}, |t_{min}^{'} - t_{k_2}| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Положим $c_{k_1} = \frac{1}{2}$, $c_{k_2} = -\frac{1}{2}$ и $c_k = 0$, если $k \ne k_1, k_2$. Функции $(K_1 * g)$ и $(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta})$ удовлетворяют условиям обобщенной теоремы сравнения [1, предложение 3.2.2]. Учитывая (7), для выбраной функции g можем написать:

$$E\left(K_1 * g\right)_\infty - \sup_{C \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k \left(K_1 * g\right)\left(t_k\right) \le$$

$$\le E\left(K_1 * g\right)_\infty - \frac{1}{2} K_1 * g\left(t_{k_1}\right) + \frac{1}{2} K_1 * g\left(t_{k_2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{t_{max}^{'}}^{t_{k_1}} \left(K_1 * g\right)' dt + \frac{1}{2} \int_{t_{min}^{'}}^{t_{k_2}} \left(K_1 * g\right)' dt \le$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{2n}} \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\right)' dt + \frac{1}{2} \int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{2n}} \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\right)' dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max} + \frac{\pi}{2n}\right) \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min} + \frac{\pi}{2n}\right) \right). \tag{8}$$

Сопоставляя (6) и (8), получаем необходимую оценку сверху.

С другой стороны, учитывая цепочку равенств (6) и теорему двойственности [8, теорема 2.2.1]

$$E \ge \sup_{a \in R} \left\{ E\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\right)_\infty - \inf_\lambda \max_k |K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(a + \frac{k\pi}{n} - \lambda\right)| \right\},$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max} + \frac{\pi}{2n}\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - K_1 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min} + \frac{\pi}{2n}\right)\right).$$

Таким образом требуемая оценка снизу установлена и теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Аналогично доказательству (6) получим

$$E := E\left(K_2 * W_1^0, S_{2n,K_2}^1 \cap K_2 * W_1^0\right)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1} \left\{E\left(K_2 * g\right)_\infty - \right.$$
$$\left. - \sup_{u \in S_{2n,K_2}^1 \cap K_2 * W_1^0} \int_0^{2\pi} u(t) g(t) dt \right\} \tag{9}$$

Учитывая определение (5) для сплайнов из S_{2n,K_2}^1, видим, что для $u \in S_{2n,K_2}^1$, функция s_0 постоянна на каждом из интервалов (t_k, t_{k+1}), где $t_k = \frac{k\pi}{n}, k \in Z$, при этом если c_k ее значение на интервале (t_k, t_{k+1}), то $\sum_{k=1}^{2n} c_k = 0$, и если $u \in S_{2n,K_2}^1 \cap K_2 * W_1^0$, то $\sum_{k=1}^{2n} |c_k| \leq \frac{n}{\pi}$.

Теперь из (9) выводим

$$E = \sup_{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1} \left\{E\left(K_2 * g\right)_\infty - \right.$$
$$\left. -\frac{n}{\pi} \sup_{C \in C_n} \sum_{k=1}^{2n} c_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} K_2 * g\left(t\right) dt \right\}. \tag{10}$$

Пусть $t_{max}^{'}$ и $t_{min}^{'}$ — точки максимума и минимума функции $K_2 * g$. Как и при доказательстве теоремы 1, выберем $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$|t_{max}^{'} - t_{k_1}| \leq \frac{\pi}{2n}, |t_{min}^{'} - t_{k_2}| \leq \frac{\pi}{2n},$$

и положим $c_{k_1} = \frac{1}{2}$, $c_{k_2} = -\frac{1}{2}$ и $c_k = 0$, если $k \neq k_1, k_2$. Функции $K_2 * g$ и $K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}$ удовлетворяют условиям обобщенной теоремы сравнения [1 предложение 3.2.2] и учитывая (7), как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$E \le E\left(K_2 * g\right)_\infty - \frac{n}{2\pi}\left(\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} K_2 * g\left(t\right)dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} K_2 * g\left(t\right)dt\right) \le E\left(K_2 * g\right)_\infty -$$

$$-\frac{n}{2\pi}\left(\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}} K_2 * g\left(t\right)dt - \int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}} K_2 * g\left(t\right)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right).$$

Получим теперь для E оценку снизу. Учитывая (10) и применяя теорему двойственности [8, теорема 2.2.1],

$$E = \sup_{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1}\left\{E\left(K_2 * g\right)_\infty - \frac{n}{\pi}\inf_{\lambda\in R}\max_{k}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} K_2 * g\left(t\right)dt - \lambda\right|\right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{max}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t_{min}\right) - \frac{n}{\pi}\int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}} K_2 * \varphi_{1;\alpha,\beta}\left(t\right)dt\right).$$

Теорема доказана.

Учитывая (3) и тот факт, что $K_1 * \varphi_{1;1,\beta}(x)\underset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} - 2\pi K_1(x+\pi)$ и $K_1 * \varphi_{1;\alpha,1}(x)\underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi K_1(x)$ равномерно по x [7, с. 11] из теорем получаем следующее.

***Следствие* 1.** Для любого $n \in N$, нечетного $K \in CVD$

$$E^{\pm}\left(K_1 * W_1^0, S_{2n,K_1} \cap K * W_V^0\right)_1 = \pi\left(K_1(t_{max}) - K_1(t_{max} + \frac{\pi}{2n}) - \right.$$

$$-\left(K_1\left(t_{min}\right)-K_1\left(t_{min}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)\right),$$

где t_{max}, t_{min} таковы, что

$$K_1\left(t_{max}\right)=\max_t K_1\left(t\right), K_1\left(t_{min}\right)=\min_t K_1\left(t\right).$$

Следствие 2. Для любого $n \in N$, четного $K \in CVD$

$$E^{\pm}\left(K_2 * W_1^0, S^1_{2n,K_2} \cap K_2 * W_1^0\right)_1 = \pi K_2\left(t_{max}\right) - n\int_{t_{max}}^{t_{max}+\frac{\pi}{n}} K_2\left(t\right)dt -$$

$$-\left(\pi K_2\left(t_{min}\right)-n\int_{t_{min}}^{t_{min}+\frac{\pi}{n}} K_2\left(t\right)dt\right),$$

где t_{max}, t_{min} таковы, что

$$K_2\left(t_{max}\right)=\max_t K_2\left(t\right), K_2\left(t_{min}\right)=\min_t K_2\left(t\right).$$

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближения. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 9–18.
3. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие L_1 - приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. — 1994. — № 10. — С. 1410–1413.
4. *Бабенко В. Ф., Литвинюк И. Н., Парфинович Н. В.* О наилучших несимметричных L_1 -приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Вестник ДНУ , Математика., — 1998. — В. 3. — С. 11–18.
5. *Бабенко В. Ф., Азар Л.* Наилучшие L_1 -приближения сплайнами при наличии ограничений // Укр. мат. журнал, 1998. — № 11. — С. 1443–1451.
6. *Бабенко В. Ф., Азар Л. Э., Парфинович Н. В.* О наилучших несимметричных приближениях классов функций, задаваемых дифференциальными операторами, обобщенными сплайнами // Вестник ДНУ, Математика, — 2000. — В. 11. — С. 9–18.
7. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток// Сиб. мат. журн. — 1987. — **28**, № 5. — С. 6–21.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. — М.: Наука, 1976. — 320 с.