Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 285-289

УДК 517.9

М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук (Ін–т математики НАН України, Київ)

МНОЖИНА МІРИ НУЛЬ, ЯКА МІСТИТЬ СФЕРИ ДОВІЛЬНИХ РАДІУСІВ

We build null-measured set in $\mathbb{R}^n$ that contains spheres with all radii.

Побудовано множину міри нуль в $\mathbb{R}^n$, яка містить сфери зі всіма можливими радіусами.

Нехай $\mathbf{M} = (M_i, i \in \mathbb{N})$ є сім'єю множин в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Нас цікавлять такі сім'ї множин, які після застосування до них сім'ї $\mathbf{T}$ геометричних перетворень $T_i, (i \in \mathbb{N})$, по-перше, будуть належати множині досить малої міри і, по-друге, їх об'єднання матиме міру нуль.

У роботах [1–3] це питання досліджувалося для множин евклідової площини. Зокрема, Безікович [2], [3] розглядав випадки, коли $\mathbf{M}$ є сім'єю всіх відрізків скінченної довжини та довільних напрямків, а також сім'єю прямих довільних напрямків. Крім цього, у роботі [3] він досліджував дане питання для сім'ї кіл усіх радіусів. В результаті геометричних перетворень об'єднання цих сімей можна було помістити у замкнуту множину плоскої міри нуль.

У даній статті ми досліджуємо цю проблему для сім'ї сфер довільних радіусів в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. За допомогою геометричних перетворень буде отримано об'єднання цих сфер, яке можна помістити у множину (лебегової) міри нуль.

Теорема. *В n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

Доведення. Спочатку побудуємо множину міри $< \varepsilon$, яка містить сфери всіх радіусів з відрізка $[a, b]$. Для цього ми візьмемо сферичний шар з межовими сферами радіусів a и b, розділимо його на досить велику кількість N сферичних шарів однакової товщини і кожен з них паралельно перенесемо на деякий вектор так, щоб в результаті міра їх об'єднання стала в $u < 1$ разів меншою від початкової.

Розглянемо перетворення $T(e,n)$ сферичного шару $S(O,r,R)$ з центром O і радіусами межових сфер r,R (e – деякий одиничний вектор, n – натуральне число). Вважаємо, що внутрішня межова сфера належить шару, а зовнішня – ні. Розділимо $S(O,r,R)$ на n шарів однакової товщини:

$$S(O,r,R) = \bigsqcup_{1\le k\le n} S(O, r+(k-1)\delta, r+k\delta), \delta = \frac{R-r}{n}.$$

Перенесемо шари паралельно так, щоб в результаті всі вони мали спільну зовнішню дотичну гіперплощину, перпендикулярну e. Тоді,

$$T(e,n)S(O,r,R) =$$

$$= \left\{ S(O+(n-k)\delta e, r+(k-1)\delta, r+k\delta); \delta = \frac{R-r}{n}, 1 \le k \le n \right\}.$$

Зауважимо, що результатом перетворення є множина шарів, і кожен шар в результаті перетворення $T(e,n)$ був паралельно перенесений на вектор

$$\tau_k = (n-k)\delta e = \frac{n-k}{n}(R-r)e.$$

Візьмемо тепер множину одиничних векторів $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, які утворюють ε-сітку на одиничній сфері. Здійснимо перетворення $T(e_1,n)S(O,a,b)$, а тоді застосуємо $T(e_2,n)$ до кожного утвореного шару і так далі. В результаті ми отримаємо множину n^m шарів товщини $\frac{b-a}{n^m}$, кожен з яких отриманий паралельним перенесенням на вектор

$$t_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n-k_i}{n^i}(b-a)e_i$$

від початкового положення, де $j = 1+\sum\limits_{i=1}^{m}(k_i-1)n^{i-1} \in [1, n^m]$ – індекс на множині отриманих n^m шарів, $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ – мультиіндекс, який відповідає j, k_i – індекс шару на i-му кроці. Об'єднання шарів після i-го кроку позначимо U_i.

Відмітимо, що $\|t_j\| \leq b-a$, $\sum\limits_{i=l+1}^{m} \tau_{k_i} \leq \frac{b-a}{n^l}$. Таким чином, після i-го кроку товщина кожного шару стане $\frac{b-a}{n^i}$, а центр кожного шару буде віддалений від початку координат не більше, ніж на $b-a$, при цьому за всі наступні кроки кожен утворений шар перенесеться не більше, ніж на $\frac{b-a}{n^i}$.

Розглянемо перетин об'єднання множини U_N сферичних шарів з променем $ray(O,\theta)$, який виходить з початку координат у напрямку вектора θ. Якщо ми доведемо, що лінійна міра цього перетину менша, ніж $u(b-a)$, то цим ми доведемо, що міра множини шарів в $u<1$ разів менша, ніж початкова міра шару $S(O,a,b)$. При цьому, внаслідок неперервної залежності міри перетину від вектора θ, достатньо довести нерівність для ε-сітки векторів $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Очевидно, що кожен елемент множини $T(e,n)S(O,r,R)$ належить множині

$$\left\{x; \|x-O\| \leq R, \left\|x - O - \frac{n-1}{n}(R-r)e\right\| > r\right\}.$$

При цьому точка O віддалена від початку координат не далі, ніж на $b-a$. Перенесемо початок координат в точку O і знайдемо міру перетину

$$\mu\left(ray(O+g,e)\bigcap\left\{x; \|x\| \leq R, \left\|x - \frac{n-1}{n}(R-r)e\right\| > r\right\}\right),$$

$\|g\| \leq b-a$.

Нехай $x = x_1 e + g$, тоді шукана міра не перевищує

$$\mu\left(\left\{x_1; x_1^2 \leq R^2 - \|g\|^2, (x - \frac{n-1}{n}(R-r))^2 > r^2 - \|g\|^2\right\}\right) =$$

$$= \sqrt{R^2-\|g\|^2} - \sqrt{r^2-\|g\|^2} - \frac{n-1}{n}(R-r) \leq$$

$$\leq (R-r)\left(\frac{R+r}{\sqrt{R^2-\|g\|^2}+\sqrt{r^2-\|g\|^2}} - \frac{n-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq (R-r)\left(\sqrt{\frac{b}{2a-b}} - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{2}(R-r),$$

при $b-a \leq \frac{b}{10}, n \geq 4$.

Таким чином, довільний сферичний шар можна розділити на скінченну кількість неперетинних шарів, кожен з яких задовольняє умову $b-a \leq \frac{b}{10}$.

Описаний процес, розпочатий у сферичному шарі з радіусами внутрішнього та зовнішнього кіл a і b, назвемо процесом P_n. Даний процес можна застосувати до будь-якого сферичного шару, причому радіус внутрішньої сфери має бути додатний.

Тепер побудуємо замкнуту обмежену множину S^* міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів r, $a \leq r < b$, $a > 0$. Для довільної n-вимірної множини $\mathbf{T}$ позначимо через T^δ множину всіх точок, які знаходяться на відстані, меншій, ніж δ, від хоча б однієї точки з множини $\mathbf{T}$.

Опишемо індуктивну побудову сім'ї множин $S_\nu^{\delta_\nu}$ $(\nu = 1, 2, ...)$. Нехай ν додатне ціле число і S_ν об'єднання скінченної кількості шарів A_λ і нехай $\delta_\nu > 0$. Нехай $m_n S_\nu^{\delta_\nu} < 2^{-\nu}$ і сфери, що обмежують A_λ, мають радіуси r_λ, R_λ. Припустимо, що проміжки, $r_\lambda \leq r < R_\lambda$ покривають проміжок $0 < a \leq r < b$. S_1 і δ_1 можна побудувати за вищеописаним методом. Поділимо кожне A_λ на k концентричних підшарів однакової ширини і застосуємо P_n до кожного підшару. Якщо k і n досить великі, то кожен шар розрізаний на скінченну кількість шарів. Застосувавши до них менше, ніж $2^{-\nu}$, геометричних перетворень, отримаємо об'єднання $S_{\nu+1}$, міра якого $\mu(S_{\nu+1}) < 2^{-\nu-1}$. Причому замикання $S_{\nu+1}$ лежить у внутрішності $S_\nu^{\delta_\nu}$. Тоді $\delta_{\nu+1}$ таке, що $S_\nu^{\delta_\nu} \supset S_{\nu+1}^{\delta_{\nu+1}}$ і $\mu(S_{\nu+1}^{\delta_{\nu+1}}) < 2^{-\nu-1}$. Це і завершує індуктивну побудову.

Нехай $S_\nu^{'}$ є замиканням $S_\nu^{\delta_\nu}$. Тоді $S_1^{'} \supset S_2^{'} \supset ...$ і $m_n S_\nu^{'} < 2^{-\nu}$. Покладемо $\bigcap S_\nu^{'} = S^*$. Тоді S^* замкнута і обмежена множина, а також $\mu(S^*) = 0$.

Розглянемо довільне число r $a \leq r < a$. Тоді для довільного ν існує число a_ν таке, що сфера $\|z - a_\nu\| = r$ лежить в $S_\nu^{'}$. З означення $S_{\nu+1}$ випливає, що ми можемо зробити так, щоб $\|a_\nu - a_{\nu+1}\| < 2^{-\nu}$. Тому $lim_{n\to\infty} a_\nu = a^*$ існує і сфера $\|z - a^*\| = r$ належить S^*.

Нехай m – додатне ціле число. За вищеописаним методом для довільного додатного цілого k побудуємо замкнуту обмежену множину

T_{mk} міри нуль, яка містить сфери довільного радіуса r у діапазоні

$$m\left(\frac{10}{11}\right)^k \le r < m\left(\frac{10}{11}\right)^{k-1}.$$

Тоді $d(T_{mk}) \to 0$, коли $k \to \infty$. Вибираємо $a_{mk} \in T_{mk}$. Тоді множина

$$S_m = \{z - a_{mk} : k > 0, z \in T_{mk}\}$$

замкнута, обмежена, має міру нуль і містить сфери довільного радіуса $r < m$. А множина

$$S = \{z + d(S_m) + m : m > 0, z \in S_m\}$$

задовольняє умову теореми.

1. *Besicovitch A. S., Rado R.* A plane set of measure zero containing circumferences of every radius. // J. London Math. Soc. — 1968 — **43.** — P. 717 – 719.
2. *Besicovitch A. S.* Sur deux questions d'integrabilite des fonctions. // J. Soc. Phys. – Math.(Perm'), 1919 (1920). — **2.** P. 105 – 123.
3. *Besicovitch A. S.* On Kakeya's problem and a similar one. // Math. Zeit., — 1928, — **27.** — P. 312 – 320.