Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 262-272

УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін–т математики НАН України, Київ)
С. О. Чайченко (Донбаський педагогічний університет, Слов'янськ)

ДОПОВНЕННЯ ДО ТЕОРЕМИ Ф. ВІНЕРА ПРО РЕШЕТО

The theorem of F. Wiener about sieve states: the norm of the operator $\mathcal{W}_{r,s}$: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j z^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j$ *on the space of bounded holomorphic in the disk* $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ *functions is 1 if* $r < s$. *We prove that restriction* $r < s$ *is a final condition in this theorem. We give an applications of the Wiener's theorem to the problems of the best approximations of functions in the Hardy space* H_p.

Теорема Ф. Вінера про решето стверджує: норма оператора $\mathcal{W}_{r,s}$: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j z^j \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j$ *на просторі обмежених голоморфних в крузі* $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ *функцій дорівнює одиниці, якщо* $r < s$. *Показано, що умова* $r < s$ *в цій теоремі є остаточною. Наведено застосування теореми Ф. Вінера до задач найкращого наближення функцій простору Гарді* H_p.

1. Вступ. Нехай H_p – простір Гарді голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_p := \begin{cases} \sup\limits_{0<\varrho<1} \left(\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

і нехай UH_p — одинична куля в H_p.

Добре відомо, що функції з H_p мають майже в кожній точці кола $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ недотичні граничні значення, які утворюють функцію з $L_p(\mathbb{T})$. Залишивши за граничними значеннями функції $f \in H_p$ те ж саме позначення f, в силу відомих теорем, будемо мати рівність $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$, де $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{T})}$ — стандартна L_p–норма.

Нехай далі $\{\widehat{f}_j\}_{j=0}^{\infty}$ — послідовність коефіцієнтів Тейлора голоморфної в $\mathbb{D}$ функції f, тобто $\widehat{f}_j := f^{(j)}(0)/(j!)$.

Г. Бор [1] в своїх міркуваннях використав елегантний прийом, авторство якого приписав Ф. Вінеру (див. історичні коментарі в [2]): *якщо f — функція з UH_∞, то функція*

$$F(z) := \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1} f(e^{i2\pi k/s} z^{1/s}) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js} z^j, \quad s \in \mathbb{N},$$

також належить UH_∞.

Згодом О. Сас [3, s. 172] розвинув прийом Вінера, зауваживши, що для функції $f \in UH_\infty$ функція

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) := \frac{1}{s z^{r/s}} \sum_{k=0}^{s-1} e^{i2\pi k(s-r)/s} f(e^{i2\pi k/s} z^{1/s}) = \tag{1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+, s \neq 0,$$

за умови $r < s$ також належить UH_∞.

Зафіксуємо числа $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, і розглянемо перетворення $\mathcal{W}_{r,s}(f)$ як лінійний оператор, визначений на множині всіх голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій правилом

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_{js+r} z^j, \quad r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0,$$

де при $js + r < 0$ покладаємо $\widehat{f}_{js+r} = 0$.

Дію оператора $\mathcal{W}_{r,s}$ на голоморфну функцію, запозичуючи термінологію з аналітичної теорії чисел, природно назвати *просіюванням* коефіцієнтів її ряду Тейлора, а сам оператор — *решетом* порядку r з розміром вічка s.

Нормою оператора $\mathcal{W}_{r,s}$, як оператора, що діє з H_p в H_p, є число

$$\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} := \sup\{\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p : f \in UH_p\}.$$

Неважко зрозуміти, що по суті Ф. Вінер і О. Сас довели таке твердження.

Теорема A. *Для будь-яких $r, s \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $s \geq r + 1$ справджується рівність*

$$\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1. \tag{2}$$

В даній роботі ми опишемо всі випадки співвідношень між числами r і s, за яких виконується рівність (2). А саме: ми покажемо, що умова $s \geq r+1$ в теоремі A є не тільки достатньою, але й необхідною.

Слід зазначити, що перетворення типу оператора $\mathcal{W}_{r,s}$ (решето) було відоме ще задовго до роботи Г. Бора [1]. Вперше в явному вигляді воно з'явилося, мабуть, в 1837 році у роботі Г. Діріхле [4, s. 315—342] про розподіл простих чисел в арифметичній прогресії (див. сучасний виклад в [5, ch. 4]).

Стосовно ж голоморфних функцій теорема Вінера про норму $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty}$ найчастіше використовується в задачах про оцінки коефіцієнтів Тейлора функцій з UH_∞ (див. бібліографію в [2]).

Ми помітили, що норми операторів $\mathcal{W}_{r,s}$ на просторах голоморфних функцій в крузі $\mathbb{D}$ за тих чи інших співвідношень між числами r і s збігаються з основними константами в багатьох екстремальних задачах теорії наближень. Відтак обчислення таких норм становить певний інтерес, зокрема, для теорії наближень.

У підтвердження сказаного наведемо зараз декілька прикладів у вигляді відомих тверджень, а в другій частині наведемо декілька нових застосувань теореми Ф. Вінера до задачі про найкращі наближення алгебраїчними многочленами в крузі $\mathbb{D}$.

Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $S_r(f)(z) := \sum_{j=0}^{r} \widehat{f}_j z^j$ — частинна сума ряду Тейлора функції f. Тоді

$$\mathcal{W}_{r,-1}(f)(z) = z^r S_r(f)\left(\frac{1}{z}\right)$$

і

$$\mathcal{W}_{r,1}(f)(z) = z^{-r}(f(z) - S_{r-1}(f)(z)).$$

Таким чином,

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_p} = \sup\{\|S_r(f)\|_p : f \in UH_p\}$$

тобто $\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_p}$ — це відомі константи Лебега–Ландау, а $\|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_p}$ — це точні константи в нерівності Лебега:

$$\|f - S_{r-1}(f)\|_p \le \|\mathcal{W}_{r,r+1}\|_{H_p} E_r(f)_p,$$

де $E_r(f)_p := \inf\{\|f - P\|_p : P \in \mathcal{P}_{r-1}\}$ — найкраще наближення функції $f \in H_p$ множиною $\mathcal{P}_{r-1}$ алгебраїчних многочленів степеня $\le r-1$, $E_0(f)_p := \|f\|_p$.

Твердження 1 [6]. *Нехай $r \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_\infty} = 1 + \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \right)^2 .$$

При $r \to \infty$ справджуються асимптотичні рівності

$$\|\mathcal{W}_{r,-1}\|_{H_\infty} = \|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty} + O(1) = \frac{1}{\pi} \ln r + O(1) \quad (r \to \infty).$$

З твердження 1, зокрема, випливає, що послідовності $\{\|\mathcal{W}_{r-1,-1}\|_{H_\infty}\}_{r=1}^{\infty}$ і $\{\|\mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty}\}_{r=1}^{\infty}$ при $r \to \infty$ зростають з однаковою швидкістю. Однак певна комбінація операторів $\mathcal{W}_{r-1,-1}$ і $\mathcal{W}_{r,1}$ може мати норму 1, як це показує наступне твердження.

Нехай $\mathcal{W}^*_{r,s}$ — лінійний оператор, який діє за правилом $\mathcal{W}^*_{r,s}(f)(z) = \overline{z}\mathcal{W}_{r,s}(f)(\overline{z})$.

Твердження 2 [7, 8, с. 503]. *Для кожного $r \in \mathbb{N}$*

$$\|\mathcal{W}^*_{r-1,-1} + \mathcal{W}_{r,1}\|_{H_\infty} = 1.$$

З твердження 2 випливає такий важливий факт: *для будь-яких $f \in UH_\infty$, $z \in \mathbb{D}$ і $r \in \mathbb{N}$*

$$\left| f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} (1 - |z|^{2(r-j)}) \widehat{f}_j z^j \right| =$$

$$= |z|^r \left| \left(\mathcal{W}^*_{r-1,-1} + \mathcal{W}_{r,1} \right)(f)(z) \right| \le |z|^r,$$

причому рівність досягається для функції $f(z) = z^r$.

Звідси у свою чергу випливає, що для всіх z таких, що $|z| = \rho$ при фіксованому $\rho \in [0,1)$ і кожному $r \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$\inf\left\{\sup\left\{\left|f(z) - \sum_{j=0}^{r-1}\lambda_{j,r}\widehat{f}_j z^j\right| : f \in UH_\infty\right\} : \lambda_{j,r} \in \mathbb{C}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|f(z) - \sum_{j=0}^{r-1}(1-\rho^{2(r-j)})\widehat{f}_j z^j\right| : f \in UH_\infty\right\} = \rho^r,$$

тобто, нескінченна нижньотрикутна числова матриця $A^* = \left(1-\rho^{2(r-j)}\right)$, $r \in \mathbb{N}, j = 0,1,\ldots,r-1$ породжує найкращий лінійний метод рівномірного наближення класу UH_∞ на концентричних колах радіуса $\rho \in [0,1)$.

2. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$ і $s \in \mathbb{N}$. Тоді:*

1) *для того, щоб $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} = 1$, необхідно і достатнъо, щоб $s \geq r+1$;*

2) *якщо $s \geq r+1$, то $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} = 1$ для будь-яких $p \geq 1$.*

Доведення. 1). Необхідність. Оскільки для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-irt}\left(1 + e^{-its}z + e^{-it2s}z^2 + \cdots\right)\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{e^{-irt}}{1-e^{-its}z}\frac{dt}{2\pi}, \qquad (3)$$

то

$$1 = \|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_\infty} \geq \sup\{|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)| : f \in UH_\infty\} =$$

$$= M_{r,s}(|z|) \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

де

$$M_{r,s}(\rho) := \sup\left\{\left|\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{e^{-irt}}{1-e^{-its}\rho}\frac{dt}{2\pi}\right| : f \in UH_\infty\right\}.$$

З другого боку, за теоремою двоїстості (див., наприклад, [9, с. 188])

$$M_{r,s}(\rho) = \min \left\{ \left\| \frac{1}{1 - e^{-its}\rho} + e^{irt} g(\rho, e^{it}) \right\|_{L_1} : g(\rho, \cdot) \in H_1^0 \right\},$$

де L_1–норма береться по e^{it}, а мінімум досягається для деякої, але єдиної функції $e^{it} \mapsto g^*(\rho, e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, з простору $H_1^0 := \{f \in H_1 : \widehat{f}_0 = 0\}$.

Тому

$$1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 - e^{-its}\rho} + e^{irt} g^*(\rho, \cdot) \right) \frac{dt}{2\pi} \leq M_{r,s}(\rho) \quad \forall\ \rho \in [0, 1).$$

Отже, $M_{r,s}(\rho) = 1$ для всіх $\rho \in [0, 1)$.

Звідси випливає, що для будь-якого $\rho \in [0, 1)$

$$\min \left\{ \left\| \frac{1}{1 - e^{-its}\rho} + g\left(\rho, e^{it}\right) \right\|_{L_1} : g(\rho, \cdot) \in H_1^0 \right\} = 1,$$

де мінімум досягається для єдиної функції $e^{it} \mapsto e^{irt} g^*(\rho, e^{it})$. Але остання рівність згідно з теоремою 2 в [10] тягне за собою той факт, що екстремальна функція, яка реалізує мінімум, має вигляд

$$e^{irt} g^*(\rho, e^{it}) = \frac{1}{1 - e^{its}\rho} - 1,$$

тобто

$$g^*(\rho, e^{it}) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j e^{ij(s-r)t}. \tag{4}$$

Оскільки $g^*(\rho, \cdot) \in H_1^0$, тобто ряд Фур'є її граничних значень має додатний спектр, то в розкладі (4) необхідно має бути $s \geq r + 1$.

Достатність. Якщо $s \geq r + 1$, то функція $w \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j w^{ij(s-r)}$ належить H_1^0 для будь-якого $z \in \mathbb{D}$. Тому рівність (3) для будь-якої функції $f \in UH_\infty$ і будь-якого $z \in \mathbb{D}$ можна переписати у вигляді

$$\mathcal{W}_{r,s}(f)(z) =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-irt}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-ijs} + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j e^{ijs}\right)\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-irt}\left(\frac{1}{1-ze^{-is}} + \frac{\overline{z}e^{is}}{1-\overline{z}e^{is}}\right)\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-irt}\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-is}|^2}\frac{dt}{2\pi}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)| \le \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-is}|^2}\frac{dt}{2\pi} = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{5}$$

2). Аналогічно, якщо $f \in H_p$, $p \ge 1$, то за нерівністю Гельдера

$$|\mathcal{W}_{r,s}(f)(z)|^p \le \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-is}|^2}\frac{dt}{2\pi} \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

звідки інтегруванням по концентричних колах радіуса $\rho = |z|$, $\rho \in [0,1)$, одержуємо

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{W}_{r,s}(f)(\rho e^{ix})|^p \frac{dx}{2\pi} \le 1 \quad \forall\, \rho \in [0,1). \tag{6}$$

Легко бачити, що співвідношення (5) і (6) перетворюються в рівності для функції $f(z) = z^r$.

Отже, $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p} = 1$ для всіх $p \in [1,\infty]$, що разом доводить достатність умов у пункті 1) і пункт 2).

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** За рівністю Парсеваля $\|\mathcal{W}_{r,s}\|_2 = 1$ для будь-яких $r \in \mathbb{Z}_+$ і $s \in \mathbb{N}$.

***Зауваження* 2.** При $r = 0$ твердження пункту 2) теореми 1 залишиться правильним при формальній заміні простору H_p на будь-який інший банахів простір X голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій з нормою $\|f\|_X$, інваріантною відносно повороту аргументу, тобто такою, що $\|f(e^{i\alpha}\cdot)\|_X = \|f\|_X$ для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Справді, згідно з (1)

$$\|\mathcal{W}_{0,s}(f)\|_X \le \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\left\|f(e^{i2\pi k/s}\cdot)\right\|_X = \|f\|_X,$$

а рівність у цих співвідношеннях досягається, зокрема, для функції $f(z) = z^s$.

2. Застосування до найкращих наближень.

Теорема 2. *Нехай $f \in H_p$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для будь-якого натурального n*

$$E_n(f)_p \ge \sup\left\{\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p : r \ge n, s \ge r+1\right\}. \tag{7}$$

При даному $n \in \mathbb{N}$ в (7) має місце рівність, якщо

$$z^{r^*}\mathcal{W}_{r^*,s^*}(f)(z^{s^*}) = f(z) - S_{n-1}(f)(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{8}$$

де r^*, s^* – фіксовані, $r^* \ge n$, $s^* \ge r^* + 1$. При цьому супремум в правій частині досягається при $r = r^*$ і $s = s^*$, а

$$E_n(f)_p = \|f - S_n(f)\|_p.$$

Доведення. Візьмемо довільні r і s такі, що $r \ge n$ і $s \ge r+1$. Тоді, враховуючи, що $\mathcal{W}_{r,s}(P) = 0$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, згідно з теоремою 1 одержимо співвідношення

$$\|\mathcal{W}_{r,s}(f)\|_p = \|\mathcal{W}_{r,s}(f-P)\|_p \le \|\mathcal{W}_{r,s}\|_{H_p}E_n(f)_p \le E_n(f)_p. \tag{9}$$

Беручи супремум в лівій частині цього співвідношення, одержимо нерівність (7).

Якщо має місце (8), де $r^* \ge n$, $s^* \ge r^*+1$, то згідно з (9) маємо:

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_p = \|\mathcal{W}_{r^*,s^*}(f)\|_p \le E_n(f)_p \le \|f - S_{n-1}(f)\|_p,$$

що й доводить непокращуваність оцінки (7).

***Приклад* 1.** Нехай $h_r(z,N)$ — r–та гіперболічна функція порядку $N \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, (див., наприклад, [12, p. 57]), тобто

$$h_r(z,N) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{jN+r-1}}{(jN+r-1)!}.$$

Тоді, якщо $r \le N$, то для всіх $p \in [1, \infty]$

$$E_n(h_r(\cdot, N))_p = \|h_r(\cdot, N)\|_p, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1.$$

***Приклад* 2.** Нехай $f(z) = e^z$ і $1 \le p \le \infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|h_{n+1}(\cdot, n+1)\|_p \le E_n(f)_p \le \|h_{n+1}(\cdot, 1)\|_p.$$

Зокрема,

$$E_n(f)_2 = \|h_{n+1}(\cdot, 1)\|_2$$

і

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(3n+2)!} + \cdots \le E_n(f)_\infty \le$$
$$\le \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots .$$

В наступному твердженні йдеться про те, що многочлен найкращого наближення інваріантного елемента оператора $\mathcal{W}_{r,s}$, тобто такої функції, що $\mathcal{W}_{r,s}(f) = f$ також є інваріантним елементом.

Теорема 3. *Нехай $f \in H_p$, $1 < p \le \infty$, і $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{js+r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$. Якщо $s \ge r+1$, то послідовність $\{P_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ многочленів найкращого наближення функції f в просторі H_p має вигляд*

$$P_n^*(z) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, \ldots, r-1, \ r \in \mathbb{N}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{[(n-r)/s]} c_j z^{js+r}, & n \ge r, \ r \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

де $[\cdot]$ означає цілу частину числа.

Зазначимо, що доведення того факту, що $P_n^*(z) = c_0 = \mathrm{const}$ при $r = 0$ і $n = 0, 1, \ldots, s-1$ належить М. З. Двейріну [11].

Доведення. Оскільки $f = \mathcal{W}_{r,s}(f)$, то згідно з теоремою 2 $E_n(f)_p = \|f\|_p$ при $n = 1, 2, \ldots, r$, у випадку, коли $r \in \mathbb{N}$. Якщо ж $r \in \mathbb{Z}_+$ і $n \ge r+1$, то згідно з теоремою 1

$$E_n(f)_p \ge \|\mathcal{W}_{r,s}(f - P_{n-1}^*)\|_p = \|f - \mathcal{W}_{r,s}(P_{n-1}^*)\|_p.$$

З другого боку, в силу того, що $\mathcal{W}_{r,s}(P^*_{n-1}) \in \mathcal{P}_{n-1}$, маємо:

$$E_n(f)_p \leq \|f - \mathcal{W}_{r,s}(P^*_{n-1})\|_p.$$

Отже, многочлен $\mathcal{W}_{r,s}(P^*_{n-1})$ також є многочленом найкращого наближення функції f. Але оскільки многочлен найкращого наближення в H_p при $1 < p \leq \infty$ є єдиним, то $P^*_n = \mathcal{W}_{r,s}(P^*_n)$.

Наведемо ще одне цікаве застосування теореми 2 в задачі про побудову многочленів найкращого наближення голоморфної функції, яка має лакунарний ряд Тейлора.

Наступне твердження належить С. Я. Альперу [13]. Тут ми пропонуємо елементарне доведення.

Теорема 4 [13]. *Нехай $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu}$, де $a_\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а n_ν — натуральні числа, такі, що для кожного $\nu \in \mathbb{N}$ всі члени числової послідовності $\{n_{\nu+\mu} - n_{\nu+\mu-1}\}_{\mu=1}^{\infty}$ мають спільний дільник $d_\nu \geq n_\nu + 1$. Тоді якщо $f \in H_1$, то при кожному $p \geq 1$ многочлен $S_n(f)$ степеня n, $n_{k-1} \leq n < n_k$, є многочленом найкращого наближення функції f в метриці H_p, тобто*

$$\|f - S_n(f)\|_p = E_{n+1}(f)_p, \quad \forall\ n \in [n_{k-1}, n_k),\ k \in \mathbb{N},\ n_0 = 1. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $n_{\nu+\mu} - n_{\nu+\mu-1} = c_{\nu,\mu} d_\nu$, де $(c_{\nu,\mu}), \nu, \mu \in \mathbb{N}$ — нескінченна прямокутна матриця натуральних чисел. Тоді

$$n_{\nu+\mu} = n_\nu + d_\nu \sum_{j=1}^{\mu} c_{\nu,j}, \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Далі, зафіксувавши довільне число $k \in \mathbb{N}$, при кожному $n \in [n_{k-1}, n_k)$ з урахуванням (11) переконуємося в виконанні умови (8) при $r^* = n_k$ і $s^* = d_k$:

$$z^{n_k} \mathcal{W}_{n_k,d_k}(f)(z^{d_k}) =$$

$$= a_k z^{n_k} + a_{k+1} z^{c_{k,1} d_k + n_k} + a_{k+2} z^{(c_{k,1}+c_{k,2}) d_k + n_k} + \cdots =$$

$$= \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu z^{n_\nu} = f(z) - S_n(f)(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

З огляду на те, що $d_k \geq n_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, а функція f внаслідок умов теореми належить всім просторам H_p, $p \geq 1$, (див., наприклад, [14, с. 690]), за теоремою 2 одержуємо рівності (10).

1. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. — 1914. — **(2) 13.** — P. 1—5.
2. *Boas H. P., Khavinson D.* Vita: Frederich Wilhelm Wiener // The Mathematical Intelligencer — 2000. — **22**, № 2. — P. 73—75.
3. *Szász O.* Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe // Math. Z. — 1918. — **1**. — P. 163—183.
4. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. — Berlin — New-York : Springer-Verlag, 1986. — 201 p.
5. *Dirichlet P. G. L.* Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält // Werke, Band 1. — Berlin: Reimer, 1889. — 664 s.
6. *Montgomery H. L., Vaughan R. C.* Multiplicative Number Theory I. Classical Theory. — New York: Cambridge University Press, 2006. — 552 p.
7. *Голузин Г. М.* Некоторые оценки для ограниченных функций // Мат. сб. — 1950. — **26**, № 1. — С. 7—18.
8. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 623 с.
9. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984, — 469 с.
10. *Савчук В. В.* Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 8. – С. 1047—1067.
11. *Двейрин М. З.* Неравенство Адамара и наилучшее приближение функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. вісник — 2006. — **3**, № 3. — С. 315—330.
12. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications. — Berlin — Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. — 443 p.
13. *Альпер С. Я.* О наилучшем приближении функций, представимых лакунарными рядами Фурье и Тейлора // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1963. — **27**, 4. — С. 747—760.
14. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.