Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 253-261

УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ КРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Exact order estimates of values of best approximations of q–ellipsoids from spaces of multiple sequences by their orthogonal projections on Euclidean subspaces $\mathbb{R}^m$ of dimension m are found.

Найдены точные по порядку оценки величин наилучших приближений q-эллипсоидов из пространств кратных последовательностей их ортогональными проекциями на евклидовы подпространства $\mathbb{R}^m$ размерности m.

Пусть $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$ обозначает линейное пространство последовательностей $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ действительных чисел, соответствующих какому–нибудь фиксированному упорядочению мультииндексов $k = (k_1, \ldots, k_d)$.

Пространство $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$, снабженное конечной квази–нормой

$$\|a\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k|^q\right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

и

$$\|a\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d)} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k|.$$

Будем обозначать через $l_q(\mathbb{Z}^d)$, $0 < q \le \infty$. Далее, для произвольной неубывающей функции $\nu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (пишем: $\nu \in P_0$) определим при $0 < q < \infty$

$$B_q(\nu) := \left\{ a \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d) : \quad \|a\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big(|a_k|\nu(|k|_\infty)\big)^q\right)^{1/q} \le 1 \right\}$$

— q–эллипсоид в $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$ и

$$B_\infty(\nu) := \left\{a \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d): \quad \|a\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k|\nu(|k|_\infty) \le 1\right\}.$$

Здесь $|k|_\infty := \|k\|_{l_\infty^d} = \max\limits_{1\le i\le d} |k_i|$.

Очевидно,

$$\|a\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \nu^q(n) \sum_{k\in\Gamma_n} |a_k|^q\right)^{1/q}$$

и

$$\|a\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\nu(n) \sup_{k\in\Gamma_n} |a_k|),$$

где $\Gamma_n = \{k \in \mathbb{Z}^d : |k|_\infty = n\}$.

Пусть далее Λ_m — произвольное подмножество в $\mathbb{Z}^d$, $\sharp\Lambda_m = m$, $m \in \mathbb{N}$; для фиксированной последовательности $a \in l_q(\mathbb{Z}^d)$, $\Omega_m(a)$ обозначает множество (или одно из множеств) мультииндексов $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ при максимальных по абсолютной величине членах последовательности $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, причем $\sharp\Omega_m(a) = m$. Согласно такому определению множества $\Omega_m(a)$:

$$\min\{|a_k|,\ k \in \Omega_m(a)\} \ge \max\{|a_k|, k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Omega_m(a)\}.$$

Для $A \subset l_s(\mathbb{Z}^d)$ положим

$$g_m(A)_s := \sup_{a\in A}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)} |a_k|^s\right)^{1/s},\ 0 < s < \infty,$$

$$g_m(A)_\infty := \sup_{a\in A} \sup_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)} |a_k|.$$

Понятно, что значение величины $g_m(A)_s$, $0 < s \le \infty$, при каждом $m \in \mathbb{N}$ совпадает со значением величин

$$e_m^\perp(A)_s := \sup_{a\in A} \inf_{\substack{\Lambda_m\subset\mathbb{Z}^d\\ \sharp\Lambda_m=m}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_m} |a_k|^s\right)^{1/s},\ 0 < s < \infty,$$

$$e_m^\perp(A)_\infty := \sup_{a\in A} \inf_{\substack{\Lambda_m\subset\mathbb{Z}^d\\ \sharp\Lambda_m=m}} \sup_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_m} |a_k|.$$

Далее по тексту запись $\alpha(m) \asymp \beta(m)$ для положительных последовательностей $\alpha(m)$ и $\beta(m)$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $m \in \mathbb{N}$ одновременно выполняются неравенства $\alpha(m) \leq C\beta(m)$ (пишем $\alpha(m) \ll \beta(m)$) и $\alpha(m) \geq C^{-1}\beta(m)$ (пишем $\alpha(m) \gg \beta(m)$).

Теорема 1. *Пусть*
1) $0 < q < s \leq \infty$, *а функция* $\nu \in P_0$ *такая, что для некоторого* $C \geq 1$ *выполняется неравенство* $\nu(2t) \leq C\nu(t)$, $t > 0$ *или*
2) $0 < s \leq q \leq \infty$, *а функция* $\nu \in P_0$ *такая, что для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполняется неравенство* $\nu(2^{\frac{1}{d}}t) > 2^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}+\varepsilon}\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $d \in \mathbb{N}$.
Тогда справедливо соотношение

$$g_m(B_q(\nu))_s \asymp m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{1}$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $0 < q < s \leq \infty$ и докажем оценку сверху в (1).

Пусть $(k(l))_{l=1}^{\infty}$ — упорядоченная последовательность множества мультииндексов $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, располагающая произвольную систему $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$ в невозрастающем порядке модулей ее значений так, что $|a_{k(1)}| \geq |a_{k(2)}| \geq \ldots$.

Тогда $\forall a \in B_q(\nu)$ имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Big(|a_k|\nu(|k|_\infty)\Big)^q \geq \sum_{k \in \Omega_m(a)} \Big(|a_k|\nu(|k|_\infty)\Big)^q =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \big(|a_{k(l)}|\nu(|k(l)|_\infty)\big)^q \geq |a_{k(m)}|^q \sum_{l=1}^{m} \nu^q(|k(l)|_\infty) \geq$$

$$\geq |a_{k(m)}|^q \sum_{l=1}^{[m/2]} \nu^q\big(\frac{m^{\frac{1}{d}}}{4}\big) \geq C(d,p)|a_{k(m)}|^q \cdot m \cdot \nu^q(m^{\frac{1}{d}}).$$

Это влечет неравенство

$$|a_{k(m)}| \ll m^{-\frac{1}{q}}/\nu(m^{\frac{1}{d}}), \tag{2}$$

откуда непосредственно следует оценка сверху в (1) при $s = \infty$.

Если же $0 < s < \infty$, то, используя (2), $\forall a \in B_q(\nu)$ при любом $\gamma > 0$ получаем

$$\Bigg(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)\\ |k|_\infty > \gamma m^{\frac{1}{d}}}} |a_k|^s\Bigg)^{1/s} \le \Bigg(|a_{k(m)}|^{s-q} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)\\ |k|_\infty > \gamma m^{\frac{1}{d}}}} |a_k|^q\Bigg)^{1/s} \le$$

$$\le \Bigg(|a_{k(m)}|^{s-q}\nu^{-q}(\gamma m^{\frac{1}{d}}) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k|^q \nu^q(|k|_\infty)\Bigg)^{1/s} \ll$$

$$\ll m^{-\frac{1}{q}(s-q)\cdot\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}) \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}), \tag{3}$$

а также

$$\Bigg(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)\\ |k|_\infty \le \gamma m^{\frac{1}{d}}}} |a_k|^s\Bigg)^{1/s} \le C(d) m^{\frac{1}{s}} m^{-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}) \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{4}$$

Из (3) и (4), в силу неравенства $(\alpha+\beta)^p \le \alpha^p+\beta^p$, α, $\beta > 0$, $0 < p \le 1$, заключаем, что $\forall a \in B_q(\nu)$

$$\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)} |a_k|^s\Bigg)^{1/s} \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}})$$

и это доказывает оценку сверху в (1) для $0 < q < s < \infty$.

Для доказательства оценки снизу в (1) в случае $0 < q < s \le \infty$ рассмотрим последовательность $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ такую, что

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} 1, & |k|_\infty \le [m^{\frac{1}{d}}], \\ 0, & |k|_\infty > [m^{\frac{1}{d}}], \end{cases}$$

где $[c]$ — целая часть числа $c \in \mathbb{R}$.

Тогда

$$\|\tilde{a}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big(|\tilde{a}_k|\nu(|k|_\infty)\big)^q\Bigg)^{1/q} =$$

$$= \Bigg(\sum_{k:\ |k|_\infty \le [m^{\frac{1}{d}}]} \nu^q(|k|_\infty)\Bigg)^{1/q} \ll \nu(m^{\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

и

$$\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\tilde{a})} |\tilde{a}_k|^s\Bigg)^{1/s} \ge \Bigg(\sum_{l=1}^{2^d m - m} 1\Bigg)^{1/s} \gg m^{\frac{1}{s}},\ 0 < s < \infty. \tag{6}$$

Из (6), с учетом (5), для $0 < s < \infty$ получаем

$$g_m(B_q(\nu))_s \gg m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{7}$$

При $s = \infty$ оценка (7) есть непосредственное следствие соотношения (5) и определения $g_m(B_q(\nu))_\infty$.

Утверждение теоремы 1 в случае $0 < q < s \le \infty$ доказано.

Теперь рассмотрим случай $0 < s \le q \le \infty$ и докажем в (1) оценку сверху.

Пусть задано натуральное $m > 2$ и $j \in \mathbb{N}$ выбрано таким, что $2^j < m \le 2^{j+1}$. Тогда для $a \in B_q(\nu)$, используя неравенство (2), с учетом условий на функцию ν, получаем при $0 < s < \infty$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)} |a_k|^s = \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_{k(n)}|^s \le \sum_{n=2^j+1}^{\infty} |a_{k(n)}|^s \le$$

$$\le \sum_{l=j}^{\infty}\Big(2^{\frac{l}{s}}|a_{k(2^l)}|\Big)^s \ll \sum_{l=j}^{\infty}\Bigg(2^{\frac{l}{s}-\frac{l}{q}}\frac{1}{\nu(2^{\frac{l}{d}})}\Bigg)^s \ll$$

$$\ll \Bigg(2^{j(\frac{1}{s}-\frac{1}{q})}\frac{1}{\nu(2^{\frac{j}{d}})}\Bigg)^s \asymp \Bigg(\frac{m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}}{\nu(m^{\frac{1}{d}})}\Bigg)^s, \tag{8}$$

а, значит,

$$g_m(B_q(\nu))_s \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}),\quad 0 < s \le q < \infty.$$

При $0 < s < \infty$ и $q = \infty$, учитывая, что для $a \in B_q(\nu)$ справедливо неравенство $a_{k(m)} \ll \nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}})$ (как предельный случай неравенства (2)), по аналогии с соотношением (8), можем записать

$$\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(a)} |a_k|^s\Bigg)^{\frac{1}{s}} \ll m^{\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}),$$

а, значит,

$$g_m(B_\infty(\nu))_s \ll m^{\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}).$$

Наконец, при $s=q=\infty$, оценка сверху в (1) — непосредственное следствие определения величин $g_m(B_q(\nu))_s$.

Доказательство оценки снизу в (1) в случае $0<s\le q\le\infty$ совпадает с ее доказательством в рассмотренном выше случае $0<q<s\le\infty$, только при $q=\infty$ вместо соотношения (5) используем неравенство $\|\tilde a\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu}\le \nu(m^{\frac{1}{d}})$.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** В случае, когда $\nu(t)=t^r$, $r>0$, а $0<q<s\le\infty$, оценка сверху в соотношении (1) фактически установлена в [1].

Далее приведем одно следствие теоремы 1 для конечномерных подмножеств из $B_q(\nu)$, определяемых функцией $\nu(t)=1$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Обозначим через E_n произвольное подмножество в $\mathbb{Z}^d$, $\sharp E_n=n$, и положим

$$\mathcal{B}_q^{E_n} := \{a=(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\in B_q(1):\ a_k=0 \text{ при } k\in\mathbb{Z}^d\setminus E_n\}$$

Таким образом, $\mathcal{B}_q^{E_n}$ — единичный шар фиксированного n–мерного подпространства в $l_q(\mathbb{Z}^d)$.

***Следствие* 1.** *Для любых m, $n\in\mathbb{N}$, $n<m$, и $\gamma>1$ справедливы соотношения*

$$g_m(\mathcal{B}_q^{E_n})_s \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}},\ 0<q\le s\le\infty, \tag{9}$$

$$g_m(\mathcal{B}_q^{E_{[\gamma m]+1}})_s \asymp m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}},\ 0<s\le q\le\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Соотношение (9) при $0<q<s\le\infty$ является следствием оценки сверху в соотношении (1), если учесть, что $\mathcal{B}_q^{E_n}\subset B_q(1)$. При $0<q=s\le\infty$ оценка (9) — тривиальна.

Если $0<s\le q\le\infty$, то условие 2) теоремы 1 для функции $\nu(t)=1$, $t\in\mathbb{R}_+$, не выполняется, однако доказательство оценки сверху в соотношении (1) с $\mathcal{B}_q^{E_{[\gamma m]+1}}$ вместо $B_q(\nu)$ только упрощается. Так, используя неравенство

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|b_k|^\lambda\right)^{1/\lambda} \ge \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|b_k|^\mu\right)^{1/\mu},$$

где $b = \{b_k\}_{k=1}^N$ — произвольная система действительных чисел и $1 \le \mu < \lambda < \infty$, для $a \in \mathcal{B}_q^{[\gamma m]+1}$ при $0 < s \le q < \infty$ можем сразу записать

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \Omega_m(a)} |a_k|^s \right)^{1/s} = \left(\sum_{n=m+1}^{[\gamma m]+1} |a_{k(n)}|^s \right)^{1/s} \ll m^{\frac{1}{s} - \frac{1}{q}}.$$

Предыдущее соотношение, очевидно, выполняется и в случае $0 < s < \infty$, $q = \infty$, а при $s = q = \infty$ оценка сверху в (10) — тривиальна.

Доказательство оценки снизу в (10) проводится по схеме доказательства такой оценки в теореме 1, отправляясь от построения последовательности $\tilde{a}$. В данном случае следует рассмотреть последовательность $\tilde{a} = (\tilde{a}_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ такую, что

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} 1, & k \in E^0, \\ 0, & k \in \mathbb{Z}^d \setminus E^0, \end{cases}$$

где E^0 — произвольное подмножество $E_{[\gamma m]+1}$, $\sharp E^0 = [\gamma_1 m]$, $1 < \gamma_1 < \gamma$.

***Замечание* 2.** При $n = [\gamma m] + 1$, $\gamma > 1$, оценка (9) точна по порядку. Доказательство аналогично случаю $0 < s \le q \le \infty$.

Сформулируем следствие 1 в другой форме.

Для этого рассмотрим конечномерные пространства l_s^n, $0 < s \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, векторов $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с квазинормой (нормой при $1 \le s \le \infty$)

$$\|x\|_{l_s^n} = \Bigl(\sum_{i=1}^n |x_i|^s \Bigr)^{1/s}, \quad 0 < s < \infty,$$

$$\|x\|_{l_\infty^n} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad s = \infty.$$

Для множества $B \subset l_s^n$ и $1 \le m < n$ определим величины:

(*a*) $$e_m^\perp(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup_{x \in B} \inf_{\gamma_m} \|x - \pi_{\gamma_m} x\|_{l_s^n},$$

где $\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — канонический (стандартный) базис в $\mathbb{R}^n$; $\pi_{\gamma_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор проектирования такой, что для $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\pi_{\gamma_m} x = \sum_{i \in \gamma_m} x_i e_i,$$

а γ_m— произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{card}\gamma_m = m$;

$$(b) \qquad g_m(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup_{x \in B} \|x - G_m^{(\varepsilon)} x\|_{l_s^n},$$

где $G_m^{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор (нелинейный), действующий по правилу

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \to G_m^{(\varepsilon)} x = \sum_{j=1}^{m} x_{k_j} e_{k_j},$$

$\{k_j\}_{j=1}^m$ — подсистема системы $\{1, \ldots, n\}$ такая, что $|x_{k_1}| \geq |x_{k_2}| \geq \ldots \geq |x_{k_m}|$. Из определений легко усмотреть, что $\forall\ B \subset l_s^n$: $e_m^{\perp}(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) = g_m(B;\ \varepsilon;\ l_s^n)$. При $m = 0$ полагаем, что $e_0^{\perp}(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) = g_0(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup\limits_{x \in B} \|x\|_{l_s^n}$. Отождествляя, естественным образом, множество $\mathcal{B}_q^{E_n}$ с единичным шаром B_q^n в пространстве l_q^n и сопоставляя определения величин $g_m(\mathcal{B}_q^{E_n})_s$ и $g_m(B_q^n;\ \varepsilon;\ l_s^n)$, от следствия 1, с учетом замечания 2, приходим к следующему утверждению.

***Следствие* 2.** *Для любых* m, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, *и* $\gamma > 1$ *справедливы соотношения*

$$g_m(B_q^n;\ \varepsilon;\ l_s^n) \ll m^{\frac{1}{s} - \frac{1}{q}},\ 0 < q \leq s \leq \infty,$$

$$g_m(B_q^{[\gamma m]+1};\ \varepsilon;\ l_s^{[\gamma m]+1}) \asymp m^{\frac{1}{s} - \frac{1}{q}},\ 0 < s, q \leq \infty. \tag{11}$$

***Замечание* 3.** Соотношение (11) является также следствием найденных ранее автором (см. [2, теорема 2 и замечание 2]) точных значений величин $e_m^{\perp}(B_p^n;\ \varepsilon;\ l_q^n)$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ и $0 < p, q \leq \infty$.

1. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approx. — 1998. — **14,** № 4. — P. 569 – 587.

2. *Романюк В. С.* Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010 — **7,** № 1. — С. 199 – 220.