Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 11–30

УДК 519.622;517.5

# Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно–нелінійних рівнянь математичної фізики

***В. І. Біленко***[1]***, К. В. Божонок***[1]***, С. Ю. Дзядик***[2]***, О. Б. Стеля***[3]

[1] *Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна, katboz2014@gmail.com;*
[2] *Державний університет телекомунікацій, м. Київ, Україна;*
[3] *Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, м. Київ, Україна, oleg.stelya@gmail.com*

In the work on the basis of the ideas and results of V. K. Dzyadyk and V. L. Makarov high–exact numerical–analytical algorithms for solving algebraically–nonlinear equations of mathematical physics are constructed and theoretical grounded. Two mutually complemented algorithm (approximating without the satiation of exactness and spline–algorithm) for solving such equations are proposed. Using parabolic spline allowed to construct a monotone difference scheme for the equation of convection–diffusion. The results of computational experiments in the event of significant advantages over convection diffusion are considered.

В работе на основе синтеза идей и результатов В. К. Дзядыка и В. Л. Макарова конструируются и теоретически обосновываются высокоточные численно–аналитические алгоритмы для решения алгебраично–нелинейных уравнений математической физики. Предложено два взаимно дополняемых алгоритма (аппроксимационный без насыщения точности и сплайн–алгоритм) решения таких уравнений. Использование параболического сплайна позволило построить монотонную разностную схему для уравнений типа конвекция–диффузия. Приведены результаты вычислительного эксперимента в случае значительного преимущества конвекции над диффузией.

# 1 Інтегро–апроксимаційний алгоритм

## 1.1 Вступ

Актуальність подальшого розвитку та застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика [1], [2] обумовлена зростаючими вимогами при розв'язуванні сучасних задач математичного та комп'ютерного моделювання до трьох основних характеристик обчислювальних алгоритмів: точності, швидкодії та інформаційної складності [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. При розв'язуванні подібних задач, як правило, використовуються потужні різницеві методи, методи скінчених елементів, сплайн–функції, інтегро–інтерполяційні методи та інші [6], [9], [10], [11]. Ці методи мають основний недолік — явище насичення [8] (відома проблема Фавара–Колмогорова у теорії наближення функцій та явища насичення у чисельному аналізі), наслідком якого може бути «вибух» похибок [6], [12].

Зазначимо, що питання підвищення точності алгоритмів обумовлено також вимогами до надійності математичного та комп'ютерного моделювання екстремальних динамічних процесів, систем і технологій, пов'язаних з ризиком для життя людей [12], [13], [14], [15].

Академіком В. Л. Макаровим у [3] були визначені наступні цілі при побудові високоточних алгоритмів розв'язування операторних рівнянь:

1) конструювання алгоритмів без насичення точності;

2) конструювання експоненціально збіжних алгоритмів для аналітичних розв'язків зі складністю, яка поліноміальна за $\log \varepsilon^{-1}$ .

При цьому в роботі [3] запропоновано використовувати перетворення Келі оператора $A$:

$$T_\gamma = (\gamma I + A)(\gamma I - A)^{-1},$$

де $I$ — тотожний оператор і $\gamma$ — довільне комплексне число, та розроблено функціонально–дискретний метод розв'язування операторних рівнянь [16], [17], [18], [19].

Метою роботи є конструювання та теоретичне обґрунтування високоточних чисельно–аналітичних, без насичення точності та оптимальних в сенсі найкращого поліноміального наближення в рівномірній та квадратичній метриках алгоритмів для розв'язання алгебраїчно–нелінійних рівнянь математичної фізики [20], [21].

### 1.2 Постановка задачі

Нехай $X$ — банахів простір векторнозначних функцій $u$, $A$ — алгебраїчно–нелінійний диференціальний оператор, що діє в $X$, $f$ — кусково-поліноміальна функція відповідного числа змінних. Розглянемо питання щодо застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика ($a$–методу) (див. [2]) до операторного рівняння [22]:

$$u = Au + f \tag{1}$$

в області $\Pi = [0, H] \times [0, \Theta]$, $H$, $\Theta > 0$.

Щодо цього методу В. К. Дзядик [2] зазначав, що «головна ідея в процесі розробки та розвитку $a$–методу полягає у побудові такого наближеного розв'язку, який би як можна точніше задовольняв би апроксимаційну теорему Чебишева П .Л. про характеризацію многочлена найкращого наближення (чебишевський альтернанс). Саме тому цей метод отримав назву "апроксимаційний". Для нього отримані не тільки апостеріорні оцінки похибки, але також і апріорні оцінки (шляхом їх порівняння $\forall\, n \in \mathbb{N}$ з величинами найкращих наближень шуканого розв'язку за допомогою многочлена степеня не вище $n$)» .

### 1.3 Алгоритм

Запропонований алгоритм, який узагальнює алгоритми, що були побудовані у попередніх роботах авторів [23], [24], [25], [26], полягає у реалізації наступної схеми:

1. Задачу (1) запишемо в еквівалентній інтегро–функціональній формі [2], [5], [6], [21]:

$$\mathcal{L}u = F(x, t, u), \tag{2}$$

де $\mathcal{L}u$ — алгебраїчно–нелінійний інтегральний оператор, $F(x, t, u)$ — алгебраїчна функція трьох змінних, що знаходиться у результаті еквівалентного переходу, виду

$$F(x, t, u) = \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{K} A_{ijk} x^i t^j u^k, \tag{3}$$

$A_{ijk}$ — відомі коефіцієнти.

2. Наближений розв'язок інтегро–функціонального рівняння (2) шукаємо у вигляді поліномів

$$u_{mn}(x, t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} \omega_i(x) \cdot \omega_j(t), \tag{4}$$

де $\{\omega_k(\,\cdot\,)\}_{k=0}^{\infty}$ — класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишева–Ерміта,Чебишева–Лагерра та узагальнені многочлени Якобі).

3. Інтегро–функціональне рівняння (2) замінюємо операторним рівнянням

$$\mathcal{L}u_{mn}(x,t) = F(x,t,u_{mn}(x,t)) + \varepsilon_{mn}(x,t) \tag{5}$$

відносно поліноміального розв'язку (4) з невідомою нев'язкою

$$\varepsilon_{mn}(x,t) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}\tau_{ij}\omega_i(x)\omega_j(t), \tag{6}$$

де $\delta_{00} = \frac{1}{4}$, $\delta_{0j} = \delta_{i0} = \frac{1}{2}$, якщо $i \geq 1$ і $j \geq 1$, та $\delta_{ij} = 1$, якщо $ij > 0$.

4. Конструюємо ітераційний процес, який враховує особливості алгебраїчних нелінійностей [27] для знаходження розв'язку рівняння(5)

$$\mathcal{L}u_{mn}^{\nu+1}(x,t) = F(x,t,u_{mn}^{\nu}(x,t)) + \varepsilon_{mn}^{\nu}(x,t). \tag{7}$$

5. Після виконання операцій множення та інтегрування в (5) на кожному кроці ітерації $\nu$, прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах $x^i t^j$ і в отриманій таким чином системі нелінійних алгебраїчних рівнянь визначаємо усі невідомі коефіцієнти $c_{ij}$ через $\tau_{ij}$, $i = \overline{0,m}$ , $j = \overline{0,n}$ .

Далі для конкретних диференціальних рівнянь ми розглянемо кожний із цих пунктів алгоритму більш детально.

## 1.4 Похибка алгоритму

Оцінку похибки алгоритму дослідимо для випадку, коли функції $\omega_i$ та $\omega_j$ у формулах (4), (6) — це многочлени Чебишева першого роду $T_k(\cdot) = \cos(k \arccos(\cdot))$, $k = 0, 1, 2, ...$, зміщені, відповідно, на сегменти $[0, H]$ і $[0, \Theta]$: $T_i\,(2x/H - 1)$ та $T_j\,(2t/\Theta - 1)$.

Через $C[\pi]$ та $L_g^2[\pi]$ будемо позначати, відповідно, простори неперервних та сумовних з квадратом функцій при чебишевській вазі

$$g\,(h,\theta) := 1/\sqrt{1-\left(\frac{2x}{h}-1\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{2t}{\theta}-1\right)^2} \tag{8}$$

на прямокутнику $\pi = [0,h] \times [0,\theta]$ з загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{L_g^2[\pi]}$, $\|\cdot\|_{C[\pi]}$ .

На основі результатів [23] – [26] має місце наступна теорема:

**Теорема 1.1.** ***(апріорна оцінка).*** *Нехай при деяких* $h \in (0, H]$, $\theta \in (0, \Theta]$ *і деяких* $m,n = 1, 2, 3, \ldots$ *в кулі*

$$\sigma(\rho) := \Big\{\psi \in C[\pi] \ : \ \|\psi\|_{C[\pi]} \leq \rho\Big\}$$

*існує єдиний розв'язок* $u(x,t)$ *задачі* (1) *і єдиний розв'язок* (4) *операторного рівняння* (5) *на* $\pi$. *Тоді при вказаних* $m$ *і* $n$ *на* $\pi$ *справедлива рівність:*

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \frac{\|u(x,t) - u_{mn}(x,t)\|_X}{E^{h\theta}_{m,n}(u)_X} = 1, \tag{9}$$

*де* $X = C[\pi]$ *або* $X = L^2_g[\pi]$ *з вагою* (8), $E^{h\theta}_{m,n}(u)_X$ *— найкраще наближення функції* $u(x,t)$ *алгебраїчними поліномами двох змінних степеня, не вище ніж* $m$ *і* $n$, *відповідно.*

**Теорема 1.2.** ***(апостеріорна оцінка).*** *В умовах теореми 1.1 справедлива оцінка:*

$$\|u(x,t) - u_{mn}(x,t)\|_X \leq K \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \delta_{ij} \, |\tau_{ij}|, \ \text{де } K = K(h,\theta) = const.$$

**Зауваження 1.1.** *1) Зазначимо, що апріорна рівність* (9) *вказує на те, що запропонований алгоритм буде без насичення точності.*

*2) Отримана апостеріорна оцінка зручна при відомих* $\tau_{ij}$ *для контролю за точністю комп'ютерно–реалізованого алгоритму.*

Доведення теорем 1.1 та 1.2 виконуються за схемами доведень відповідних теорем, запропонованих у роботах [2], [24].

## 1.5 Застосування $a$–методу для алгебраїчно–нелінійних рівнянь гіперболічного типу

**1.5.1 Постановка задачі Гурса.** Розглянемо на прямокутнику $\Pi := [0, H_1] \times [0, H_2]$, $H_i > 0$, алгебраїчно–нелінійне рівняння гіперболічного типу виду

$$a_0(x,y)u_{xy} + a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y + a_3(x,y)u = f(x,y,u), \tag{10}$$

в якому всі коефіцієнти $a_i(x,y)$ — многочлени за $x$, $y$ і при цьому $a_0(x,y) \geq c > 0 \ \forall (x,y) \in \Pi$, де $c = const$; вільний член $f(x,y,u)$ є квадратичним многочленом відносно невідомої функції $u$:

$$f(x,y,u) = a(x,y) + b(x,y)u + c(x,y)u^2. \tag{11}$$

Задача Гурса у розглянутому нами випадку полягає у тому, щоб знайти на прямокутнику П такий двічі неперервно диференційовний розв'язок $u(x,y)$ рівняння (10), який на відрізках характеристик $y=0$ та $x=0$ цього рівняння, що містяться в П, задовольняє умови

$$u(x,0)=p_1(x), \quad u(0,y)=p_2(y), \tag{12}$$

де $p_i$ — наперед задані многочлени, що приймають у точці перетину характеристик рівні значення: $p_1(0)=p_2(0)$.

Візьмемо довільну точку $(x,y)\in\Pi$. Інтегруючи рівняння (10) по прямокутнику $[0,x]\times[0,y]$ з урахуванням умов (12), отримаємо для визначення розв'язку $u(x,y)$ наступне інтегральне рівняння, еквівалентне задачі Гурса (10), (12):

$$a_0(x,y)u(x,y)=\int\limits_0^x P(s,y)u(s,y)ds+\int\limits_0^y Q(x,t)u(x,t)dt+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y R(s,t)u(s,t)dsdt+F(x,y,u), \tag{13}$$

де $P$, $Q$, $R$ і $F$ — многочлени, що визначаються формулами

$$P(x,y)=[a_0(x,y)]_x-a_2(x,y), \;\; Q(x,y)=[a_0(x,y)]_y-a_1(x,y),$$

$$R(x,y)=[a_1(x,y)]_x+[a_2(x,y)]_y-[a_0(x,y)]_{xy}-a_3(x,y),$$

$$F(x,y,u)=a_0(x,0)p_1(x)-\int\limits_0^x P(s,0)p_1(s)ds+a_0(0,y)p_2(y)- \tag{14}$$

$$-\int\limits_0^y Q(0,t)p_2(t)dt-a_0(0,0)p_1(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t,u)dsdt.$$

Нам будуть потрібні натуральні числа, що виражають собою прості функції від степенів за змінними $x$ і $y$ коефіцієнтів рівняння (10) і граничних умов (12).

Позначимо степені за змінною $x$:

у многочленів $a_j(x,y)$ — $\alpha_{jx}$, $j=0,1,2,3$;

у многочлена $p(x,y)$ — $\rho_x$.

Відповідні степені цих многочленів за змінною $y$ позначимо $\alpha_{jy}$ і $\rho_y$, а степені многочленів $p_1(x)$ і $p_2(y)$ — $\rho_{1x}$ і $\rho_{2y}$. Після цього введемо натуральні числа:

$$l_1 = \max\{\alpha_{0x}, \alpha_{1x}, \alpha_{2x}+1, \alpha_{3x}+1\},$$

$$l_2 = \max\{\alpha_{0y}, \alpha_{1y}+1, \alpha_{2y}, \alpha_{3y}+1\}, \tag{15}$$

$$m_1 = \max\{\alpha_{0x}+\rho_{1x}, \alpha_{2x}+\rho_{1x}+1, \rho_x+1\},$$

$$m_2 = \max\{\alpha_{0y}+\rho_{2y}, \alpha_{1y}+\rho_{2y}+1, \rho_y+1\}. \tag{16}$$

**1.5.2.** Для довільних

$$m \geq \max\{0, m_1 - l_1\} \text{ і } n \geq \max\{0, m_2 - l_2\} \tag{17}$$

будемо шукати наближений розв'язок задачі (10), (12) на двовимірному сегменті П або на деякому його підсегменті $[0,h_1]\times[0,h_2]$, де $h_i \leq H_i$, у вигляді многочлена з невизначеними коефіцієнтами виду

$$u_{mn}(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x^i y^j, \tag{18}$$

який задовольняє операторне рівняння

$$a_0(x,y)u_{mn}(x,y) = \int_0^x P(s,y)u_{mn}(s,y)ds + \int_0^y Q(x,t)u_{mn}(x,t)dt +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y R(s,t)u_{mn}(s,t)dsdt + F(x,y,u_{mn}) - \varepsilon_{mn}(x,y). \tag{19}$$

В цьому рівнянні $\varepsilon_{mn}(x,y)$ визначається за формулою

$$\varepsilon_{mn}(x,y) = \sum_{(k,l)\in\Gamma} \delta_{kl}\tau_{kl}T_k^*\left(\frac{x}{h_1}\right)T_l^*\left(\frac{y}{h_2}\right), \tag{20}$$

де:

1) $\delta_{00} = 1/4$, $\delta_{0l} = \delta_{k0} = 1/2$, якщо $k \geq 1$ і $l \geq 1$, та $\delta_{kl} = 1$, якщо $kl > 0$;

2) $T_j^*(s) := T_j(2s-1)$ — зміщені на $[0,1]$ многочлени Чебишева, а $T_k^*(x/h_1)$ та $T_j^*(y/h_2)$ – зміщені многочлени Чебишева, «пересаджені» відповідно на сегменти $[0,h_1]$ і $[0,h_2]$;

3) через $\Gamma(m, n, l_1, l_2)$ позначена у координатній площині $XOY$ фігура, яка є різницею двох прямокутників:

$$\Gamma = [0, m + l_1] \times [0, n + l_2] \setminus [0, m] \times [0, n];$$

$$\Gamma = \{(m+1, 0), ..., (m+l_1, 0), ..., (m+1, n), ..., (m+l_1, n), (0, n+1), ...$$
$$..., (m+l_1, n+1), ..., (0, n+l_2)..., (m+l_1, n+l_2)\};$$

4) $\tau_{kl}$ — невідомі коефіцієнти.

**1.5.3 Ітераційні схеми.** Проілюструємо використання ітераційного процесу у випадку квадратичної нелінійності за розв'язком, тобто коли функція $f(x, y, u)$ має вигляд (11).

Аналогічно до побудови відповідних ітераційних схем у роботі [24] запишемо *схему з лінійною швидкістю збіжності ітерацій*:

$$a_0(x,y)u_{mn}^{\nu+1}(x,y) = \int_0^x P(s,y)u_{mn}^{\nu}(s,y)ds + \int_0^y Q(x,t)u_{mn}^{\nu}(x,t)dt +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y R(s,t)u_{mn}^{\nu}(s,t)dsdt + F(x,y,u_{mn}^{\nu}) - \varepsilon_{mn}^{\nu}(x,y), \qquad (21)$$

де $P$, $Q$, $R$ і $F$ — многочлени, що визначаються формулами

$$P(x,y) = [a_0(x,y)]_x - a_2(x,y), \quad Q(x,y) = [a_0(x,y)]_y - a_1(x,y),$$

$$R(x,y) = [a_1(x,y)]_x + [a_2(x,y)]_y - [a_0(x,y)]_{xy} - a_3(x,y),$$

$$F(x,y,z_n) = a_0(x,0)p_1(x) - \int_0^x P(s,0)p_1(s)ds + a_0(0,y)p_2(y) -$$

$$- \int_0^y Q(0,t)p_2(t)dt - a_0(0,0)p_1(0) + \int_0^x \int_0^y f(s,t,u_{mn}^{\nu})dsdt.$$

Аналогічно можна побудувати *схему з квадратичною швидкістю збіжності ітерацій.*

Тут через $u_{mn}^{\nu}(x,y)$ і $\varepsilon_{mn}^{\nu}(x,y)$ позначено відповідний многочлен виду (18) і нев'язку виду (20) на $\nu$–му кроці ітерацій.

**Зауваження 1.2.** *Апріорну та апостеріорну оцінки похибок алгоритму для задачі Гурса* (10), (12) *можна одержати користуючись теоремами 1.1, 1.2.*

## 1.6 Задача Дирихле для алгебраїчно–нелінійних рівнянь еліптичного типу на прямокутнику

**1.6.1 Апроксимаційний метод для задачі Дирихле у випадку однієї з найпростіших її постановок** [2]. Розглянемо задачу Дирихле

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u = f(x,u), \tag{22}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Pi, \tag{23}$$

в якій $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \overline{\Pi}$, $\Pi = (0, h_1) \times (0, h_2)$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. Будемо вважати, що виконана умова рівномірної еліптичності

$$M_0(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq M_1(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

де $M_0$, $M_1$ — додатні сталі, і, крім того, виконані умови виду

$$0 < M_2 \leq a(x) \leq M_3, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad M_2,\ M_3 = const.$$

Для простоти припустимо, що в рівнянні (22) $a_{ij}$, $a$ — многочлени відповідного числа змінних; $f(x,u)$ — з квадратичною нелінійністю за розв'язком виду (11).

Відомо, що для заданої задачі існує єдиний аналітичний в $\Pi$, неперервний на $\overline{\Pi}$ розв'язок $u$.

**1.6.2 Зведення до еквівалентного інтегрального рівняння** [2]. Припустимо, що $u$ — розв'язок задачі Дирихле. Замість того, щоб шукати невідомий розв'язок $u(x)$ задачі Дирихле, будемо спочатку шукати його другу частинну похідну

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \widetilde{u} \Rightarrow u = \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_2} \widetilde{u}(s_1, s_2) ds_2.$$

При цьому задача Дирихле (22), (23) еквівалентна наступній задачі для інтегрального рівняння:

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \Big[ \int_0^{x_{i'}} a_{ij}(s) ds_{i'} \Big( \int_0^{s_{j'}} \widetilde{u}(s') ds'_{j'} \Big|_{s'_{j'}=s_j} \Big) \Big] \Big|_{s_i=0}^{s_i=x_i} +$$

$$\int\limits_0^{x_1} ds_1 \int\limits_0^{x_2} a(s) ds_2 \int\limits_0^{s_1} ds_1 \int\limits_0^{s_2} \widetilde{u}(s') ds'_2 = \int\limits_0^{x_1} ds_1 \int\limits_0^{x_2} f(s,u) ds'_2 =: F, \qquad (24)$$

$$\int\limits_0^{h_1} \widetilde{u}(x) dx_1 = 0, \qquad \int\limits_0^{h_2} \widetilde{u}(x) dx_2 = 0, \qquad (25)$$

де $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x)$, $s = (s_1, s_2)$, $s' = (s_1, s'_2)$, $i' = 3 - i$, $j' = 3 - j$.

**1.6.3 Апроксимаційні многочлени.** Розв'язок задачі (24), (25) шукаємо у вигляді многочлена

$$\widetilde{u}_n = \widetilde{u}_n(x) = \sum_{i,j=0}^{n_1,n_2} c_{ij} x_1^i x_2^j, \quad n = (n_1, n_2), \qquad (26)$$

що задовольняє умови (24), де $c_{ij}$ — деякі дійсні числа.

Припустимо, що після підстановки многочлена (26) і формального виконання обчислень отримаємо многочлен $L\widetilde{u}_n$, степень якого за $x_1$ не перевищує $n_1 + l_1$, а за $x_2$ — $n_2 + l_2$.

Нев'язку задачі (24), (25) шукаємо у вигляді

$$\widetilde{\varepsilon}_{n,l}(x) = \sum_{i,j=0}^{n_1+l_1, n_2+l_2}{}' \tau_{ij} P_i(x_1) P_j(x_2), \qquad (27)$$

де $P_i(x_1)$, $P_j(x_2)$ — многочлени Лежандра, зміщені відповідно на відрізки $[0, h_1]$ і $[0, h_2]$, штрих над знаком суми вказує на те, що $\tau_{ij} = 0$, якщо $1 \le i \le n_1$ і $1 \le j \le n_2$. Введемо тепер наступні важливі означення [2].

**Означення 1.1.** *а–Многочленом задачі* (24), (25) *назвемо такий многочлен* $\widetilde{u}_n(x)$ *виду* (26), *для якого має місце рівність*

$$\int\limits_0^{h_1} \widetilde{u}_n(x) dx_1 = 0, \qquad \int\limits_0^{h_2} \widetilde{u}_n(x) dx_2 = 0, \qquad (28)$$

*і існує така нев'язка* $\widetilde{\varepsilon}_{n,l}(x)$ *виду* (27), *при якій виконується рівність*

$$\mathcal{L}\widetilde{u}_n = F - \widetilde{\varepsilon}_{n,l}, \qquad (29)$$

*що розуміється у сенсі рівності функцій. Доведено, що* $\forall\, n = (n_1, n_2)$, *де* $n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$ *існує единий а–многочлен* $\widetilde{u}_n(x)$ *і відповідна йому нев'язка* $\widetilde{\varepsilon}_{n,l}(x)$.

**Означення 1.2.** *a–Многочленом задачі* (22), (23) *назвемо многочлен*

$$u_{n+1}(x) = \int_0^{x_1} ds_1 \int_0^{x_2} \widetilde{u}_n(s) ds_2 = 0, \tag{30}$$

*де* $\widetilde{u}_n$ *— a–многочлен задачі* (24), (25).

*Відмітимо, що згідно з* (28) *a–многочлени* $u_{n+1}$ *задачі Дирихле задовольняють крайову умову* (23).

**1.6.4 Порядок збіжності** $a$**–многочленів.** Порядок збіжності $a$–многочленів характеризується наступною теоремою.

**Теорема 1.3.** *Якщо розв'язок u задачі Дирихле* (22), (23) *володіє дробними похідними порядків* $\alpha$ *і* $\beta$ *відповідно за* $x_1$ *і* $x_2$ *у сенсі Рімана–Ліувілля, то для відхилення a–многочленів* $u_{n+1}$ *від відповідного точного розв'язку u на кожному кроці* $\nu$ *ітераційного процесу має місце наступна оцінка:*

$$\|u - u^{\nu}_{n+1}\|_{C(\Pi)} \le C_2 \sqrt{(n_1^{-\alpha+1} + n_2^{-\beta+1})(n_1^{-\alpha+2} + n_2^{-\beta+2})} + \sigma_\nu(h)$$

*при* $\alpha > 2$, $\beta > 2$, *де*

$$\sigma_\nu(h) = \|f\|_{C(\Pi)} \cdot \frac{[2h(4+h)]^\nu}{\nu!} \exp[2h(4+h)], \quad h = \max(h_1, h_2). \tag{31}$$

## 1.7 Наближений розв'язок початкової задачі для алгебраїчно–нелінійних рівнянь параболічного типу на прямокутнику

Відмітимо, що $a$–метод може застосовуватися також при розв'язанні параболічних рівнянь. Наприклад, таким чином можна розв'язати першу початково–крайову задачу в області $\Pi = (0, H) \times (0, \Theta)$, $H, \Theta > 0$:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u), \tag{32}$$

з початковою умовою $u(x, 0) = u_0(x)$ і крайовими умовами $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(H, t) = \mu_2(t)$; де $f(x, t, u)$ — з квадратичною нелінійністю за розв'язком виду (11).

Застосувавши $a$–метод, замінимо задачу еквівалентним їй інтегро–функціональним рівнянням. Наближений розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$u_{mn}(x,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{ij} x^i t^j. \tag{33}$$

Далі приходимо до співвідношення, аналогічного (5).

У відповідності до загальної схеми та міркувань з пункту 1.5 будуємо відповідну ітераційну схему. На основі результатів [23]– [26] доведена наступна теорема:

**Теорема 1.4.** *Нехай при деяких $h \in (0,H]$, $\theta \in (0,\Theta]$ і деяких $m$,$n = 1,2,3,...$ в кулі*

$$\sigma(\rho) := \Big\{ \psi \in C[\pi] \ : \ \|\psi\|_{C[\pi]} \le \rho \Big\}$$

*на кожному кроці $\nu$ ітераційного процесу існує єдиний розв'язок $u(x,t)$ задачі (32) і єдиний розв'язок (33) операторного рівняння (5) на $\pi$. Тоді при вказаних $m$ і $n$ на $\pi$ справедливі оцінки:*

*a)* $\|u(x,t) - u^{\nu}_{mn}(x,t)\|_X \le C_1 \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} \delta_{ij} \left|\tau^{\nu}_{ij}\right| + K_1 \sigma_\nu(h);$

*b)* $\|u(x,t) - u^{\nu}_{mn}(x,t)\|_X \le C_2 E^{h\theta}_{m,n}(u)_X + K_2 \sigma_\nu(h),$

*де $X = C[\pi]$ або $X = L^2_g[\pi]$ з вагою (8); $E^{h\theta}_{m,n}(u)_X$ — найкраще наближення функції $u(x,t)$ алгебраїчними поліномами двох змінних степеня, не вище ніж $m$ і $n$, відповідно; $C_i = C_i(h,\theta) = const$ $(i = 1,2)$, $K_j = K_j(h,\theta) = const$ $(j = 1,2)$; $\sigma_\nu(h)$ визначаєтьcя формулою (31), де $h = \max(H,\Theta)$.*

**Зауваження 1.3.** *Зазначимо, що алгоритм і теоретичні результати його обгрунтування без принципових труднощів можуть бути поширені на випадок, коли $f(x,t,u)$ є кусково–многочленною або раціональною функцією.*

# 2 Сплайн–алгоритм

## 2.1 Монотонна схема для рівняння конвекції–дифузії

Розглядається двоточкова крайова задача для сингулярно збуреного рівняння типу конвекції–дифузії. У роботі [28] для розв'язування крайових задач для рівняння конвекції–дифузії з постійними коефіцієнтами використано параболічний сплайн з [29].

Розглянемо крайову задачу для рівняння конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами

$$D(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - V(x)\frac{du(x)}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (0,H), \tag{34}$$

$$u(0) = U_0, \tag{35}$$

$$u(H) = U_H, \tag{36}$$

де $f(x,u) = a(x) + b(x)u + c(x)u^2$, $V \neq 0$, $0 < D(x) << 1$ .

Не обмежуючи загальності, розглянемо схему для рівняння (34) у випадку правої частини $-f(x)$.

Нехай на відрізку $[0,H]$ задані розбиття $\Delta_x$ и $\Delta_\tau$

$$a) \qquad \Delta_x: \quad 0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = H,$$

$$b) \qquad \Delta_\tau: \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{N-1} = H, \tag{37}$$

де $x_i < \tau_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, N-2}$ .

Позначимо $C_i$ та $\varphi_i$ значення деяких сіткових функцій, відповідно, на сітках (37), причому $\varphi_0 = C_0$, $\varphi_{N-1} = C_N$. Записавши кусково–квадратичну функцію $C(x)$, $x \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-2}$ та знайшовши першу та другу похідні цієї функції на кожному з відрізків, підставимо їх у рівняння (34). Одержуємо:

$$D(x)\Big\{\varphi_i \frac{2}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)} - C_{i+1}\frac{2}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-x_{i+1})} +$$

$$+\varphi_{i+1}\frac{2}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big\} - V(x)\Big\{\varphi_i \frac{(x-x_{i+1})+(x-\tau_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)} -$$

$$-C_{i+1}\frac{(x-\tau_i)+(x-\tau_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-x_{i+1})} + \varphi_{i+1}\frac{(x-\tau_i)+(x-x_{i+1})}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big\} =$$

$$= -f(x). \tag{38}$$

Будемо вимагати, щоб $C_i$ задовольняли рівняння (34) у внутрішніх вузлах сітки (37). Поклавши $x = x_{i+1}$ та позначивши $D(x_{i+1}) = D_{i+1}, V(x_{i+1}) = V_{i+1}, f(x_{i+1}) = f_{i+1}$, з (38) знаходимо $C_{i+1}$ :

$$C_{i+1} = \Big\{\varphi_i\Big(\frac{2D_{i+1}}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)} - \frac{V_{i+1}(x_{i+1}-\tau_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big) +$$

$$+\varphi_{i+1}\Big(\frac{2D_{i+1}}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}-\frac{V_{i+1}(x_{i+1}-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big)+f_{i+1}\Big\}/$$

$$\Big[\frac{2D_{i+1}}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-x_{i+1})}-\frac{V_{i+1}((x_{i+1}-\tau_i)+(x_{i+1}-\tau_{i+1}))}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-x_{i+1})}\Big], \tag{39}$$

де $i=\overline{0,N-2}$.

Для визначення невідомих параметрів $\varphi_i$ будемо вимагати виконання умов:

$$C(\tau_i-0)=C(\tau_i+0),\quad i=\overline{1,N-2},$$

$$C'(\tau_i-0)=C'(\tau_i+0),\quad i=\overline{1,N-2}.$$

Використовуючи перші похідні $C(x)$ для відрізків $[\tau_{i-1},\tau_i]$ та $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, запишемо умови їх неперервності у точках $\tau_i$ , $i=\overline{1,N-2}$ :

$$\varphi_i\frac{(\tau_i-\tau_{i-1})+(\tau_i-x_i)}{(\tau_i-x_i)(\tau_i-\tau_{i-1})}=\varphi_i\frac{(\tau_i-x_{i+1})+(\tau_i-\tau_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}-$$

$$-C_{i+1}\frac{(\tau_i-\tau_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-x_{i+1})}+\varphi_{i+1}\frac{(\tau_i-x_{i+1})}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}. \tag{40}$$

Після підстановки у (40) $C_i$ та $C_{i+1}$ з (39) одержуємо систему рівнянь:

$$\varphi_{i-1}\Big\{\frac{2D_i-V_i(x_i-\tau_i)}{(x_i-\tau_{i-1})(2D_i-V_i((x_i-\tau_{i-1})-(\tau_i-x_i)))}\Big\}-$$

$$-\varphi_i\Big\{\frac{(\tau_i-\tau_{i-1})+(\tau_i-x_i)}{(\tau_i-x_i)(\tau_i-\tau_{i-1})}-\frac{2D_i-V_i(x_i-\tau_{i-1})}{(\tau_i-x_i)(2D_i-V_i((x_i-\tau_{i-1})-(\tau_i-x_i)))}$$

$$+\frac{(x_{i+1}-\tau_i)+(\tau_{i+1}-\tau_i)}{(x_{i+1}-\tau_i)(\tau_{i+1}-\tau_i)}-$$

$$+\frac{2D_{i+1}+V_{i+1}(\tau_{i+1}-x_{i+1})}{(x_{i+1}-\tau_i)(2D_{i+1}-V_{i+1}((x_{i+1}-\tau_i)-(\tau_{i+1}-x_{i+1})))}\Big\}+$$

$$+\varphi_{i+1}\Big\{\frac{2D_{i+1}-V_{i+1}(x_{i+1}-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(2D_{i+1}-V_{i+1}((x_{i+1}-\tau_i)-(\tau_{i+1}-x_{i+1})))}$$

$$-\frac{(x_{i+1}-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-x_{i+1})(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big\}=$$

$$=-f_{i+1}(\tau_{i+1}-\tau_i)/[2D_{i+1}-V_{i+1}((x_{i+1}-\tau_i)-(\tau_{i+1}-x_{i+1}))]-$$

$$-f_i(\tau_i-\tau_{i-1})/[2D_i-V_i((x_i-\tau_{i-1})-(\tau_i-x_i))], \quad \text{де} \ \ i=\overline{1,N-2}. \quad (41)$$

Ці рівняння розглядаються спільно з рівняннями $\varphi_0 = U_0$, $\varphi_{N-1} = U_H$, які визначаються крайовими умовами задачі.

Має місце така

**Теорема 2.1.** *Нехай для розбиття* (37) *виконуються умови:*

$$\tau_{i+1}=\tau_i+h-\mu_i+\mu_{i+1}, \ \ 0<\mu_i<h, \ \ i=\overline{0,N-2},$$

$$h>0, \ \ (N-1)h-\mu_0+\mu_{N-1}=H,$$

$$x_1=x_0+h-\mu_0, \ \ x_{i+1}=x_i+h, \ \ i=\overline{1,N-2}, \ \ x_N=x_{N-1}+\mu_{N-1}.$$

*Тоді при* $V_i > 0$ *і виконанні обмежень*

$$\mu_i > h-\frac{D_{i+1}}{|V_{i+1}|}, \ \ i=\overline{1,N-2}, \tag{42}$$

*а при* $V < 0$ *і виконанні обмежень*

$$\mu_i < \frac{D_i}{|V_i|}, \ \ i=\overline{1,N-2} \tag{43}$$

*для системи* (41) *виконується різницевий принцип максимума.*

Доведення цього твердження наведено в [28].

Питання визначення у загальному випадку оптимального набору параметрів $\mu_i$ на цей час є відкритим. Поставимо питання інакше: чи можна підібрати параметри так, щоб розв'язок різницевої задачі співпадав з точним розв'язком крайової задачі? З цією метою розглянемо крайову задачу:

$$D\frac{d^2u(x)}{dx^2}+V\frac{du(x)}{dx}=0, \tag{44}$$

$$u(0)=0, \tag{45}$$

$$u(1)=1, \tag{46}$$

де $D$, $V$ — додатні константи.

Тоді, слідуючи [28], різницева задача для (44)–(46) записується наступним чином:

$$\varphi_{\tau_0}=0, \tag{47}$$

$$\alpha\varphi_{\tau_{i-1}}-\gamma\varphi_{\tau_i}+\beta\varphi_{\tau_{i+1}}=0, \quad i=\overline{1,N-2}, \tag{48}$$

$$\varphi_{\tau_{N-1}} = 1, \tag{49}$$

де позначено

$$\alpha = -\frac{V}{h^2}\mu, \ \ \gamma = \frac{2D}{h^2} + \frac{V}{h}\Big(1 - \frac{2\mu}{h}\Big), \ \ \beta = \frac{D}{h^2} + \frac{V}{h}\Big(1 - \frac{\mu}{h}\Big).$$

Точний розв'язок різницевого рівняння (48) будемо шукати у вигляді

$$\varphi_i = \lambda^i.$$

Тоді характеристичне рівняння запишеться:

$$\beta\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha = 0.$$

Звідси знаходимо його корені

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta} = \Big(-\frac{V}{h^2}\mu\Big)/\Big(\frac{D}{h^2} + \frac{V}{h}\Big(1 - \frac{\mu}{h}\Big)\Big).$$

Запишемо точний розв'язок:

$$\varphi_i = A_0 + B_0\Big(\frac{D - V\mu}{D - V\mu + Vh}\Big)^i, \quad i = \overline{1, N-2}. \tag{50}$$

Константи $A_0$ та $B_0$ вибираються так, щоб задовольнити крайові умови (47) та (49), і в нашому випадку можемо наближено покласти $A_0 = 1$, $B_0 = -1$.

При заданих крайових умовах рівняння (44) має точний розв'язок

$$u(x) = \frac{1 - \exp(-Vx/D)}{1 - \exp(-1/D)}.$$

Прирівняємо значення точного розв'язку до значень розв'язку з (50), одержуємо

$$\frac{1 - \exp(-Vx_i/D)}{1 - \exp(-1/D)} = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{D/V - \mu}}\right)^i.$$

Зауважимо, що для малих $D$ величину $\exp(-1/D)$ можна наближено замінити нулем. Тоді маємо

$$\exp(-Vx_i/D) = \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{D/V - \mu}}\right)^i.$$

Позначимо через $\mu_T$ параметр $\mu$, при якому різницева схема дає точний розв'язок крайової задачі. Тоді маємо

$$\mu_T = \frac{D}{V} - \frac{h}{\left(e^{\frac{Vh}{D}} - 1\right)}. \tag{51}$$

У загальному випадку оптимальним цей параметр назвати не можна, але формула (51) разом з умовами (42), (50) дозволяє обрати стратегію вибору параметра $\mu$.

У проведеному обчислювальному експерименті коефіцієнти рівняння приймали значення: $D = 0,05$, $V = 1$. Обчислення проводились для різних кроків різницевої сітки $h$. У таблиці 1 наведено значення $h$ та параметра $\mu_T$, знайдені за (51).

**Таблиця 1.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | 1.0E-01 | 1.0E-02 | 1.0E-03 | 1.0E-04 | 1.0E-05 |
| $\mu_T$ | 0.3434E-01 | 0.4833E-02 | 0.4983E-03 | 0.4998E-04 | 0.4999E-05 |

На рисунку (1) суцільною лінією позначено точний розв'язок рівняння, трикутниками та пунктирною лінією позначено чисельний розв'язок, одержаний для різних значень $h$.

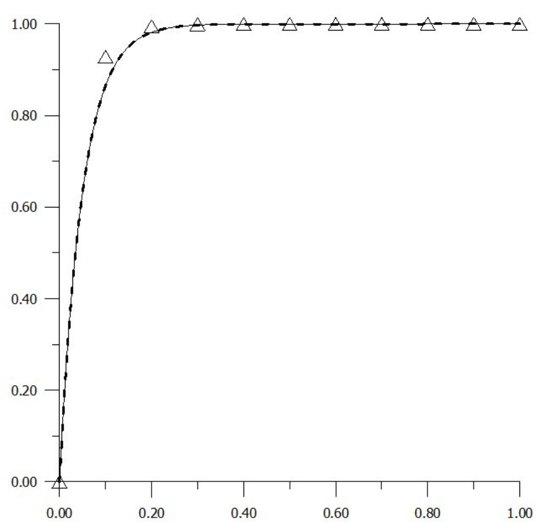


**Рис 1.** Точний та чисельний розв'язки задачі.

## 3 Висновки

1. На основі апроксимаційного методу Дзядика В. К. сконструйовано та теоретично обґрунтовано високоточний алгоритм без насичення точності для розв'язання алгебраїчно–нелінійних операторних рівнянь математичної фізики.
2. Доведені теореми про існування наближених розв'язків відповідних задач на основі запропонованого алгоритму та одержані оцінки похибок поліноміальної апроксимації у рівномірній та квадратичній метриках.
3. Побудована за допомогою параболічного сплайна різницева схема є монотонною і добре пристосована для розв'язування рівняння конвекції–дифузії з переважаючою конвекцією.
4. Проведені обчислювальні експерименти на тестових задачах, які добре проілюстрували теоретично прогнозовані властивості ненасичуваності та оптимальності у сенсі найкращих наближень побудованого алгоритму. Запропоновані алгоритми були апробовані при розв'язуванні модельних задач [13] із монографій [2], [5] та деяких практичних задач [13], [15], [30], [31].

[1] *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — К.: Наукова думка, 1977. — 512 с.

[2] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — К.: Наукова думка, 1988. — 387 с.

[3] *Гаврилюк И. П., Макаров В. Л.* Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. — К.: Ин–т математики НАН Украины, 2004. — 500 с.

[4] *Сергієнко І. В.* Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. — К.: Академперіодика, 2010. — 293 с.

[5] *Дейнека В. С., Сергієнко І. В.* Аналіз багатокомпонентних розподілених систем та оптимальне керування. — К.: Наукова думка, 2007. — 794 с.

[6] *Молчанов И. Н.* Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. — К.: Наукова думка. — 1988. — 342 с.

[7] *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно–аналитические методы исследования решения краевых задач. — К.: Наукова думка, 1985. — 224 с.

[8] *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 3. – С. 505–508.

[9] *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2–е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.

[10] *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984. — 356 с.

[11] *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Сплайн–аппроксимация функций. — М.: Высшая школа, 1983. — 80 с.

[12] *Гладкий С. Л., Степанов Н. А., Ясницкий Л. Н.; под ред. Ясницкого Л. Н.* Интеллектуальное моделирование физических проблем. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2006. — 200 с.

[13] *Біленко В. І., Воробйов В. В., Пасенко А. В., Підоріна Л. І., Стеля О. Б., Сьомик О. Б., Шевченко І. В.* Інформаційно–математичне моделювання та прогнозування екологічного стану грунтових вод // Техногенно–екологічна безпека та цивільний захист. — 2015. — Т. 8. — С. 49–54.

[14] *Bilenko V. I., Pasenko A. V., Stelya O. B., Syomyk E. B., Pidorina L. I.* Computer Technologies of Mathematical Modeling of Complex Hydrogeological Environment // Eight International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences 22–27 June 2016, Albena, Bulgaria: Book of abstracts. — 2016. — P. 12.

[15] *Кононов В. В.* Математические модели процессов военных действий и их применение для планирования и управления распределения боевых средств. — Харьков: МОУ, ХУВС им. Ивана Кожедуба, 2007. — 280 с.

[16] *Макаров В. Л.* Функціонально–дискретний метод розв'язування задач на власні значення для нелінійних диференціальних рівнянь // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 16–22.

[17] *Макаров В. Л., Драгунов Д. В., Сембер Д. А.* Функціонально–дискретний метод (FD–метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 10. — С. 33–39.

[18] *Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V.* Exact and Truncated Difference Schemes for Boundary Value ODEs. — Basel: Birkhauser/Springer Basel AG, 2011. — xi+247 pp.

[19] *Василик В. Б., Драгунов Д. В., Ситник Д. О.* Функціонально–дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування: монографія, НАН України, Ін–т математики. — К.: Наук. думка, 2011. — 175 с.

[20] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2004. — 798 с.

[21] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[22] *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 455 с.

[23] *Биленко В. И., Коновалов В. Н., Луковский І. А., Лучка А. Ю., Пухов Г. Е., Ронто Н. И.* Аппроксимационные методы Дзядика решения дифференциальных и интегральных уравнений // Укр. мат. журнал. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 454–465.

[24] *Биленко В. И.* О погрешности a–метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями // Укр. мат. журнал. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 537–543.

[25] *Bilenko V. I.* Integro–approxmational method for the modelling of certain class of nonlinear dynamic object // Proc. of the int. SYMP. on Comp math. modelling and scientific computations. — Sofia: Bulg. Acad. Sciences. — 1992. — P. 146–158.

[26] *Біленко В. І., Деріенко А. І., Кирилаха Н. Г.* Кусково–поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика // Журн. обчисл. та приклад. математики. — 2013. — № 2. — С. 68–77.

[27] *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. — 446 с.

[28] *Стеля О.Б.* Використання параболічних сплайнів для розв'язування задач конвекції-дифузії // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2007. — Т. 2(95). — С. 109–116.

[29] *Кивва С. Л., Стеля О. Б.* Об одном параболическом сплайне // Вычислительные технологии, Издательство Сибирского отделения РАН. — 2001. — Т. 6, №3. — С. 21–31.

[30] *Дзядык С. Ю.* О поведении решения неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и малым параметром при производной // Украинский математический журнал. — 1973. — Т. 25(2). — С. 657–662.

[31] *Bozhonok E.V.* Some Existence Conditions for the Compact Extrema of Variational Functionals of Several Variables in Sobolev Space $W^{1,2}$ // Operator Theory: Advances and Applications. — 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.