Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 226-234

УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачівський державний університет, Мукачево)

ДВІ ВЛАСТИВОСТІ ОБЕРНЕНИХ ПОХІДНИХ ТІЛЕ

It is proved that the Thiele's reciprocal derivative of the $(2n-1)$–th order of polynomial $p_n(z), n \geq 2$, is equal zero, and that the Thiele's reciprocal derivative of $2n$–th order of rational function $p_m(z)/q_n(z), m < n$, is equal zero too.

В роботі доведено, що обернена похідна Тіле $(2n-1)$–го порядку багаточлена $p_n(z), n \geq 2$, дорівнює нулеві і що обернена похідна $2n$–го порядку раціональної функції $p_m(z)/q_n(z), m < n$, дорівнює нулеві.

1. Постановка задачі та основні результати. Функцію однієї дійсної або комплексної змінної можна розвинути в степеневий ряд або ланцюговий дріб. Формула Тіле [1, с. 139], яка є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів, спирається на обернені похідні Тіле. Обернені похідні Тіле володіють відомими властивостями [2],[3]. В даній роботі обґрунтовуються дві нові властивості обернених похідних Тіле. Основними результатами роботи є наступні дві теореми.

Теорема 1. *Обернена похідна Тіле $(2n-1)$–го порядку багаточлена n–го порядку $p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \ldots, n, a_n \neq 0$, дорівнює нулеві, коли $n \geq 2$, і обернена похідна Тіле 1–го порядку двочлена $p_1(z) = a_0 + a_1 z$ рівна $1/a_1$.*

Теорема 2. *Нехай функція $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ задана в області $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, де $p_m(z)$ та $q_n(z)$— багаточлени відповідно степенів m та n, $m < n$, знаменник $q_n(z)$ не має коренів в $\mathcal{Z}$. Обернена похідна Тіле $2n$–го порядку функції $R_{m,n}(z)$ дорівнює нулеві для всіх $z \in \mathcal{Z}$.*

2. Розвинення функції в степеневий ряд та ланцюговий дріб. Добре відомо [4, с. 322], що якщо функція $f(z)$ аналітична в області $\mathcal{Z}$, яка містить круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < R\}$, то в довільній точці $z \in K$ існує розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд

© М. М. Пагіря, 2015

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_*)^n\ , \qquad c_n=\frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}. \tag{1}$$

Визначником Ганкеля $H_k^{(n)}$ порядку k, який пов'язаний із степеневим рядом (1) (навіть коли (1) формальний степеневий ряд [5, с. 9]), називається визначник вигляду

$$H_0^{(n)}=1,\ H_k^{(n)}=\begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \cdots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \cdots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

де $k=1,2,\dots,$ $c_n=0$, коли $n<0$.

Нехай ${}^{(n)}f(z)$ — обернена похідна Тіле n–го порядку функції $f(z)$. Обернені похідні Тіле обчислюють за рекурентним співвідношенням [1, с. 138–139]

$$\begin{aligned} {}^{(k)}f(z) &= k\cdot{}^{\backprime}\big({}^{(k-1)}f(z)\big)+{}^{(k-2)}f(z), \qquad k=2,3,\dots, && \text{(3a)} \\ {}^{(0)}f(z) &= f(z),\ {}^{(1)}f(z)={}^{\backprime}f(z)=1/f'(z). && \text{(3b)} \end{aligned}$$

***Зауваження* 1.** Із (3a) випливає, що ${}^{(k)}f(z)\neq{}^{\backprime}({}^{(k-1)}f(z))$, а має місце формула ${}^{\backprime}\big({}^{(k-1)}f(z)\big)=({}^{(k)}f(z)-{}^{(k-2)}f(z))/k$.

Якщо припустити, що функція $f(z)$ в деякому околі точки z_* має обернені похідні до n–го порядку включно, то отримуємо аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів — формулу Тіле [1]

$$f(z)=b_0+\frac{z-z_*}{b_1}\,\underset{}{+}\,\frac{z-z_*}{b_2}\,+\cdots+\,\frac{z-z_*}{b_n}\,+\,\frac{z-z_*}{R_n(z_*)}, \tag{4}$$

де $b_0=f(z_*),\ b_1={}^{\backprime}f(z_*),\ b_n=n\cdot{}^{\backprime}({}^{(n-1)}f(z_*))\ ,\ n=2,3,\dots\ ,\ R_n(z_*)$ — залишок ланцюгового дробу.

3. Обернена похідна Тіле багаточлена та дробово–раціональної функції. Між оберненими похідними Тіле та звичайними похідними функції $f(z)$ існує взаємозв'язок.

Теорема 3. (Співвідношення Ньорлунда) [2, с. 427] *Якщо функція $f(z)$ аналітична в $\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$, то обернені похідні Тіле функції* *визначаються через похідні функції як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$ {}^{(2k)}f(z) = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}}, \quad {}^{(2k+1)}f(z) = \frac{H_k^{(3)}}{H_{k+1}^{(1)}}, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{5} $$

***Доведення теореми* 1.** Згідно із другою формулою (5) при $n \geq 2$

$$ {}^{(2n-1)}p_n(z) = \frac{H_{n-1}^{(3)}}{H_n^{(1)}} = \frac{\begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \end{vmatrix}} . $$

Оскільки $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{2n-1} = 0$, де $c_k = (p_n(z))^{(k)}/k!$, то у визначнику чисельника $H_{n-1}^{(3)}$ останній стовпчик буде складатися лише з нулів, а отже ${}^{(2n-1)}p_n(z) \equiv 0$. Твердження для двочлена $p_1(z) = a_0 + a_1 z$ безпосередньо випливає з (3b). Теорему 1 доведено.

Перш ніж встановити теорему 2, доведемо наступне твердження.

Теорема 4. *Для функції*

$$ f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}, \qquad a_i, \alpha \in \mathbb{C}, $$

ранг нескінченої матриці Ганкеля

$$ H^{(0)} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, $$

дорівнює n.

Для розглянутої в теоремі функції елементи матриці Ганкеля $H^{(0)}$ будуть рівні

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} \binom{k+i-1}{k} \frac{(-1)^k a_i}{(z-\alpha)^{k+i}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

***Доведення теореми* 4.** Для доведення твердження теореми розглянемо наступний визначник Ганкеля $(n+1)$–го порядку

$$H_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{n+i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i}{1} \frac{-a_i}{(z-\alpha)^{i+1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i+1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i+2}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+2} \frac{(-1)^{n+2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} a_i}{(z-\alpha)^{i+n-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-2}{2n-1} \frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(z-\alpha)^{2n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{i+n}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-1}{2n} \frac{(-1)^{2n} a_i}{(z-\alpha)^{2n+i}} \end{vmatrix}.$$

З першого рядка визначника винесемо спільний множник $1/(z-\alpha)$, з другого рядка винесемо $1/(z-\alpha)^2$, …, з $n+1$–го рядка винесемо множник $1/(z-\alpha)^{n+1}$. Тоді маємо

$$\bar{H}_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i}{1} \frac{-a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n+1}{n+2} \frac{(-1)^{n+2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-3}{n-2} \frac{(-1)^{n-2} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-3}{2n-2} \frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-2}{2n-1} \frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+2n-1}{2n} \frac{(-1)^{2n} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \end{vmatrix},$$

де $\bar{H}_{n+1}^{(0)} = H_{n+1}^{(0)}/(z-\alpha)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

У визначнику $\bar{H}_{n+1}^{(0)}$ послідовно виконаємо наступні еквівалентні перетворення: на місце k–го рядка запишемо суму елементів k–го та $k-1$–го рядків, $k = 2, 3, \ldots, n+1$, і враховуючи, що

$$\binom{s-1}{t} = \binom{s}{t} - \binom{s-1}{t-1}$$

отримуємо

$$\bar{H}_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i-1}{1} \frac{-a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-1}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i}{2} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n}{n+2} \frac{(-1)^{n+2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-4}{n-2} \frac{(-1)^{n-2} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+2n-4}{2n-2} \frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-3}{n-1} \frac{(-1)^{n-1} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+2n-3}{2n-1} \frac{(-1)^{2n-1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-2}{n} \frac{(-1)^{n} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+2n-2}{2n} \frac{(-1)^{2n} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \end{vmatrix}.$$

Перші два рядки визначника залишимо без змін, а на місці k-го рядка, $k = 3, 4, \ldots, n+1$, запишемо суму елементів k–го та $k-1$–го рядків. Виконавши $n-1$ таких кроків, отримаємо визначник

$$\bar{H}_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-1}{n} \frac{(-1)^n a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i-1}{1} \frac{-a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-1}{n+1} \frac{(-1)^{n+1} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=n-1}^{n} \binom{i-1}{n-2} \frac{(-1)^{n-2} a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \cdots & \sum\limits_{i=n-1}^{n} \binom{i+n-1}{2n-2} \frac{(-1)^{2n-2} a_i}{(z-\alpha)^{n+i-1}} \\ \frac{(-1)^{n-1} a_n}{(z-\alpha)^{n-1}} & \cdots & \frac{(-1)^{2n-1} a_n}{(z-\alpha)^{2n-1}} \\ \frac{(-1)^{n} a_n}{(z-\alpha)^{n-1}} & \cdots & \frac{(-1)^{2n} a_n}{(z-\alpha)^{2n-1}} \end{vmatrix}.$$

Визначник $\bar{H}^{(0)}_{n+1}$ буде рівним нулю, оскільки два останні його рядки пропорційні, а отже і $H^{(0)}_{n+1} = 0$.

В свою чергу визначник

$$\bar{H}^{(0)}_n = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{i+n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1}a_i}{(z-\alpha)^{n+i-2}} \\ \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i-1}{1} \frac{-a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \dots & \sum\limits_{i=2}^{n} \binom{i+n-2}{n} \frac{(-1)^{n}a_i}{(z-\alpha)^{n+i-2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=n-1}^{n} \binom{i-1}{n-2} \frac{(-1)^{n-2}a_i}{(z-\alpha)^{i-1}} & \dots & \sum\limits_{i=n-1}^{n} \binom{i+n-2}{2n-3} \frac{(-1)^{2n-3}a_i}{(z-\alpha)^{n+i-2}} \\ \frac{(-1)^{n-1}a_n}{(z-\alpha)^{n-1}} & \dots & \frac{(-1)^{2n-2}a_n}{(z-\alpha)^{2n-2}} \end{vmatrix}$$

тотожно не рівний нулю, а тоді і $H^{(0)}_n(z) \not\equiv 0$. Отже ранг матриці Ганкеля $H^{(0)}$ рівний n. Теорема 4 доведена.

Із доведеної теореми безпосередньо випливає наступний наслідок.

***Наслідок* 1.** *Довільний визначник $n+m+1$–го порядку вигляду*

$$\tilde{H}^{(0)}_{n+1} = \begin{vmatrix} c_{k_0} & c_{k_1} & \dots & c_{k_n} & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_{k_0+1} & c_{k_1+1} & \dots & c_{k_n+1} & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_0+n} & c_{k_1+n} & \dots & c_{k_n+n} & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{m+n} \end{vmatrix} = 0,$$

при довільних значеннях $k_0, k_1, \dots, k_n$.

Оскільки як ранг матриці Ганкеля $H^{(0)}$ рівний n, то довільні $n+1$ стовпчики цієї матриці будуть лінійно залежними, а тоді має місце твердження наслідку.

***Доведення теореми* 2.** Розглянемо окремо три випадки.

а) Якщо $R_{0,n}(z) = A/(z-\alpha)^n$, то згідно з властивістю оберненої похідної Тіле [3, твердження 4] та [6, наслідок 1] обернена похідна Тіле $2n$–го порядку дорівнює нулеві для всіх $z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.

б) Якщо $R_{m,n}(z) = p_m(z)/(z-\alpha)^n$, то функцію $R_{m,n}(z)$ можна подати у вигляді суми простих дробів, тобто записати наступним чином

$$R_{m,n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i} \ .$$

У цьому випадку елементи визначника Ганкеля рівні

$$c_k = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,z^k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(z-\alpha)^i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\binom{k+i-1}{k}\frac{(-1)^k a_i}{(z-\alpha)^{k+i}},$$

де $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Оскільки c_k визначаються за (6), то з теореми 4 маємо, що визначник Ганкеля $H_{n+1}^{(0)} = 0$, а тоді згідно із (5) ${}^{(2n)}R_{m,n}(z) = 0$.

в) В загальному випадку також маємо, що дробово–раціональну функцію $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ можна подати у вигляді суми простих дробів, тобто

$$R_{m,n}(z) = \sum_{s=1}^{r}\sum_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{i_s}}, \qquad l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n.$$

Тоді

$$c_k = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,z^k}(R_{m,n}(z)) = \sum_{s=1}^{r}\sum_{i_s=1}^{l_s}\binom{k+i_s-1}{k}\frac{(-1)^k a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{k+i_s}},$$

де $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

У цьому випадку визначник Ганкеля $H_{n+1}^{(0)}$ буде рівним

$$H_{n+1}^{(0)} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{i_s}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z-\alpha_s)^{i_s+n}} \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{-i_s a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{i_s+1}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1} (i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(z-\alpha_s)^{i_s+n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n (i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z-\alpha_s)^{i_s+n}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{2n} (i_s)_{2n} a_{i_s}^{(s)}}{(2n)!(z-\alpha_s)^{i_s+2n}} \end{vmatrix},$$

де $(i_s)_n = i_s(i_s+1)\ldots(i_s+n-1)$— символ Похгаммера.

У кожному стовпчику визначника міститься n доданків. Оскільки всі елементи 1–го стовпчика визначника $H_{n+1}^{(0)}$ складаються із суми n доданків, то згідно із відомою властивістю визначників $H_{n+1}^{(0)}$ рівний сумі n визначників, які будуть відрізнятися лише елементами

1–го стовпчика. Якщо кожний із n отриманих визначників подати у вигляді суми n визначників, кожен з яких відрізняється від іншого новоутвореного визначника лише елементами 2–го стовпчика, то отримаємо n^2 визначників. Продовжуючи далі подібні перетворення врешті–решт отримаємо n^{n+1} визначників, які будуть містити лише по одному доданку із кожного стовпця вихідного визначника.

Нехай

$$\tilde{H}^{(0)}_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{b^{(0)}_{j_0}}{(z-\beta_0)^{j_0}} & \dots & \binom{j_n+n-1}{n}\frac{(-1)^n b^{(n)}_{j_n}}{(z-\beta_n)^{j_n+n}} \\ \binom{j_0}{1}\frac{-b^{(0)}_{j_0}}{(z-\beta_0)^{j_0+1}} & \dots & \binom{j_n+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b^{(n)}_{j_n}}{(z-\beta_n)^{j_n+n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{j_0+n-1}{n}\frac{(-1)^n b^{(0)}_{j_0}}{(z-\beta_0)^{j_0+n}} & \dots & \binom{j_n+2n-1}{2n}\frac{(-1)^{2n} b^{(n)}_{j_n}}{(z-\beta_n)^{j_n+2n}} \end{vmatrix},$$

один із таких визначників, де $\beta_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, t = 0, 1, 2, \dots, n$, а j_t приймає деяке із можливих своїх значень, які відповідні β_t, тобто, якщо $\beta_t = \alpha_s$, то $1 \le j_t \le l_s, b^{(t)}_{j_t} = a^{(s)}_{j_t}$.

Оскільки визначник $\tilde{H}^{(0)}_{n+1}$ містить $n+1$ стовпців, а знаменник $q_n(z)$ має r різних коренів, $1 \le r \le n$, то принаймні два β_t будуть мати однакові значення.

У кожному такому визначнику містять стовпці, які відповідають одному і тому кореню α_s, і кількість таких стовпців більша за кратність кореня l_s. Ці стовпці будуть лінійно залежними, а тоді згідно із наслідком 1 кожен такий визначник буде рівний нулю.

Визначник $H^{(0)}_{n+1}$ рівний нулю як сума визначників того же порядку, кожен з яких рівний нулю. Тоді з (5) знову маємо, що ${}^{(2n)}R_{m,n}(z) = 0$. Теорема 2 доведена.

4. Висновки. Основним результатом роботи є встановлення двох нових властивостей для обернених похідних Тіле — рівність нулю оберненої похідної $(2n-1)$–го порядку багаточлена і рівність нулю оберненої похідної $2n$–го порядку раціональної функції, які сформульовані у вигляді теореми 1 та теореми 2. Якщо теорема аналогічна теоремі 1 має місце для звичайної похідної функції, то теорема 2 не має аналогу для звичайної похідної функції.

1. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. — Leipzig: Commisission von B.G. Teubner, 1909. — XII+175 S.
2. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Berlin:Springer, 1924. — IX+551 S.
3. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Властивості обернених похідних // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, №5. — С. 708–713.
4. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, ГИФМЛ, 1968. — 648 с.
5. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis.Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. — New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. — XV+682 p.
6. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. – С. 107–116.