Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т.12, №4, 216-225

УДК 517.5

І. Ю. Меремеля (Ін–т математики НАН України, Київ)

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ПОМПЕЯ–ЛАНДАУ–САСА ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ В БІКРУЗІ

We find the solution of Pompéiu–Landau–Szász's problem for partial sums of Taylor series of bounded holomorphic functions in the bidisk.

Розв'язано задачу Помпея–Ландау–Саса про оцінку частинної суми ряду Тейлора голоморфної функції в бікрузі.

Нехай B — клас функцій f голоморфних в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < 1$, і нехай

$$\widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

— коефіцієнти Тейлора функції f.

Д. Помпей [1] показав, що

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_0\right| + \left|\widehat{f}_1\right| : f \in B\right\} = \frac{5}{4},$$

а максимум досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(z) = \frac{2z+1}{z+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \ldots.$$

Е. Ландау [2] узагальнив цей результат, показавши, що для будь-якого цілого $n \geq 0$

$$\max\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} \widehat{f}_k\right| : f \in B\right\} = G_n := 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2, \qquad (1)$$

де сума в правій частині при $n = 0$ покладається рівною нулю.

Максимум в (1) досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(z) = \frac{z^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^{n-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k}.$$

Згодом О. Сас [3] узагальнив результат Е. Ландау, показавши, що для будь-якого цілого $n \geq 0$ і довільної пари комплексних послідовностей $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n}$ та $\{\mu_j\}_{j=0}^{n}$, пов'язаних системою рівностей

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j \lambda_{n-k-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

справджується співвідношення

$$\sup\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} \mu_k \widehat{f}_k \right| : f \in B \right\} \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|^2, \tag{3}$$

яке за умови, що многочлен $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k z^k$ не має коренів в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ перетворюється в рівність, а супремум при цьому досягається для єдиної з точністю до унімодулярного множника функції

$$f(z) = \frac{z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right)}{P_n(z)}.$$

Результат О. Саса без перебільшення можна вважати найзначущішим в питаннях оцінок лінійних середніх рядів Тейлора, коефіцієнтів Тейлора, похідних вищих порядків функцій класу B тощо. Підтвердимо ці слова доведенням такого

Твердження 1. *Для будь-яких цілих m і n таких, що $m \geq 0$, $n \geq 2m+1$, справджуються рівності*

$$W_{m,n} := \sup\left\{ \frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|^2} : f \in B \right\} = 1,$$

$$L_{m,n} := \sup \left\{ \frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1 - \left|\widehat{f}_m\right|} : f \in B \right\} = 2.$$

Зауважимо, що числа $W_{0,n}$ і $L_{0,n}$ — це точні константи в нерівностях

$$\left|\widehat{f}_n\right| \le 1 - \left|\widehat{f}_0\right|^2 \text{ і } \left|\widehat{f}_n\right| \le 2\left(1 - \left|\widehat{f}_0\right|\right),$$

перша з яких відома, як нерівність Вінера, а друга — як нерівність Ландау [4, 5, с. 34].

Зазначимо також, що твердження 1 є відомим. Детальні історичні коментарі до нього можна знайти в [6].

Доведення. Підлаштуємо спочатку співвідношення (3) до наших потреб. З цією метою візьмемо в (2) $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = \mu_{m+1} = \ldots \mu_{n-1} = 0$, $\mu_m = \rho$, $\rho \ge 0$, і $\mu_n = 1$. Нескладно переконатися, що послідовність $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-m-1} = \lambda_{n-m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, $\lambda_{n-m} = \rho/2$ є розв'язком системи (2) тоді і тільки тоді, коли $n \ge 2m+1$. Оскільки многочлен $z \mapsto 1 + \rho z^{n-m}/2$ при $0 \le \rho < 2$ не має коренів в $\overline{\mathbb{D}}$, то співвідношення (3) у цьому випадку набуде вигляду

$$\max\left\{\rho\left|\widehat{f}_m\right| + \left|\widehat{f}_n\right| : f \in B\right\} = 1 + \frac{\rho^2}{4}, \quad 0 \le \rho < 2, \tag{4}$$

де максимум досягається для функції

$$f(z) = z^m \frac{2z^{n-m} + \rho}{\rho z^{n-m} + 2} = \frac{\rho}{2} z^m + \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) z^n + \ldots.$$

Для оцінок зверху величин $W_{m,n}$ і $L_{m,n}$ візьмемо довільну функцію $f \in B$ відмінну від алгебраїчного многочлена будь-якого степеня $\le m$. Тоді згідно з (4) справджується співвідношення

$$\left|\widehat{f}_n\right| \le 1 + \frac{\rho^2}{4} - \rho\left|\widehat{f}_m\right| \quad \forall\, n \ge 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Спрямувавши тепер $\rho \to 2\left|\widehat{f}_m\right|$ (це законно, оскільки $\left|\widehat{f}_m\right| \le 1$), отримаємо оцінку

$$\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1-\left|\widehat{f}_m\right|^2} \le 1 \quad \forall\, n \ge 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+,$$

а якщо спрямуємо $\rho \to 2$, то й оцінку

$$\frac{\left|\widehat{f}_n\right|}{1-\left|\widehat{f}_m\right|} \le 2 \quad \forall\, n \ge 2m+1, m \in \mathbb{Z}_+.$$

У випадку, коли $f(z) = \sum_{k=0}^{l} a_k z^k$, $l < m$, останні співвідношення слід розуміти як $0/0 = 1$.

Таким чином, в силу довільності f доведено оцінки зверху: $W_{m,n} \le 1$ і $L_{m,n} \le 2$.

Для оцінок знизу розглянемо сім'ю функцій $\{f_a\}_{0<a<1}$, де

$$f_a(z) = z^m \frac{z+a}{az+1} = az^m + (1-a^2) \sum_{k=m+1}^{\infty} (-a)^{k-m-1} z^k.$$

Зрозуміло, що $f_a \in B$ і $\widehat{(f_a)}_m = a$, $\widehat{(f_a)}_n = (1-a^2)(-a)^{n-m-1}$.

Отже,

$$W_{m,n} \ge \frac{\left|\widehat{(f_a)}_n\right|}{1-\left|\widehat{(f_a)}_m\right|^2} = a^{n-m-1} \text{ і } L_n \ge \frac{\left|\widehat{(f_a)}_n\right|}{1-\left|\widehat{(f_a)}_m\right|} = (1+a)a^{n-m-1}.$$

Спрямувавши тепер $a \to 1$, отримаємо потрібні оцінки знизу.

Мета даної роботи — отримати аналоги наведених результатів у двовимірному випадку.

Нехай $\mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ — одиничний бікруг, $\mathbb{T}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ — кістяк бікруга $\mathbb{D}^2$, $B(\mathbb{D}^2)$ — клас функцій f, голоморфних в бікрузі $\mathbb{D}^2$, для яких $\sup_{(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2} |f(z_1, z_2)| \le 1$, і нехай

$$\widehat{f}_{k,l} := \frac{1}{k!\; l!} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial z_1^k \partial z_2^l}(0,0)$$

— коефіцієнти Тейлора функції f.

Екстремальною задачею Помпея–Ландау–Саса для бікруга називатимемо екстремальну задачу про обчислення точного значення величини

$$\sup\left\{\left|\sum_{(k,l)\in\gamma}\mu_{k,l}\widehat{f}_{k,l}\right| : f\in X\right\},$$

де $\{\mu_{k,l}\}$ — двократна комплексна послідовність, γ — деяка скінченна підмножина $\mathbb{Z}_+^2$, а X — деякий підклас $B(\mathbb{D}^2)$, а також знаходження екстремальних елементів, на яких досягається ця точна верхня межа.

У випадку, коли γ є трикутною областю в $\mathbb{Z}_+^2$, тобто $\gamma=\{(k,l): k,l\geq 0, k+l\leq n\}$, $n\in\mathbb{N}$, розв'язання екстремальної задачі Помпея–Ландау–Саса в бікрузі зводиться до одновимірного випадку [7].

Наступне твердження надає одну з таких нових можливостей.

Твердження 2. *Нехай $f\in B(\mathbb{D}^2)$. Тоді для будь-яких натуральних p,q функція*

$$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\widehat{f}_{\nu p,\nu q}z^{\nu}, z\in\mathbb{D},$$

належить класові B.

Це твердження для обмежених голоморфних функцій в полікрузі $\mathbb{D}^m, m\geq 2$, доведене в [6]. Тут ми наводимо елементарне доведення для зручності.

Доведення. Зафіксуємо $r\in(0,1)$ і $z\in\mathbb{D}$. Оскільки за формулою Коші для коефіцієнтів (див., наприклад, [8, с. 47])

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(rw_1,rw_2)\left(\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q\right)^{\nu}\frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{w_2}=$$

$$=\begin{cases} r^{(p+q)\nu}\widehat{f}_{\nu p,\nu q}, \nu=0,1,2,\ldots, \\ 0, \qquad\qquad \nu=-1,-2,\ldots\end{cases},$$

то для будь-якого $z\in\mathbb{D}$ справджується низка рівностей

$$g(r^{p+q}z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\widehat{f}_{\nu p,\nu q}r^{(p+q)\nu}z^{\nu}=$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2)\sum_{\nu=0}^{\infty}(\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q z)^\nu \frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{w_2} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q z)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty}(w_1^p w_2^q z)^{-\nu}\right)\frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{w_2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2)\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q z|^2}\frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{w_2}.$$

З (5) в силу довільності r випливає голоморфність функції g, а з останньої рівності оцінка

$$|g(z)| \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(rw_1, rw_2)|\frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q z|^2}|dw_1 dw_2| \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}_1^p\overline{w}_2^q z|^2}|dw_1 dw_2| = 1.$$

Таким чином, $g \in B$.

Наприклад, з рівності (1) і твердження 2 одразу випливає такий

***Наслідок* 1.** *Для будь-якого цілого $n \ge 0$ і натуральних p, q*

$$\max\left\{\left|\sum_{\nu=0}^{n}\widehat{f}_{\nu p, \nu q}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = G_n,$$

а максимум досягається для функції

$$f(z_1, z_2) = \frac{(z_1^p z_2^q)^n + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}(z_1^p z_2^q)^{n-\nu}}{1 + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}(z_1^p z_2^q)^{\nu}}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Помпея–Ландау–Саса у випадку, коли $\gamma = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ і $\mu_{k,l} = 2\rho_1^{1-l}\rho_2^{1-k}$, $\mu_{1,1} = 1$.

Основним результатом є така

Теорема. *Нехай* $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{C}$ *і* $|\rho_1| + |\rho_2| < 1$. *Тоді*

$$\max\left\{\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0} + \rho_1\widehat{f}_{1,0} + \rho_2\widehat{f}_{0,1}) + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Максимум досягається для функції

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2) := \frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1} =$$

$$= \overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + (1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2) z_1 z_2 + \ldots.$$

Безпосередньо з теореми випливає

***Наслідок* 2.** *Мають місце рівності*

$$\sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right| + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B^0(\mathbb{D}^2)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{1}{2}\widehat{f}_{0,0} + \widehat{f}_{1,0} + \widehat{f}_{0,1} + \widehat{f}_{1,1}\right| : f \in B(\mathbb{D}^2)\right\} = \frac{3}{2},$$

де $B^0(\mathbb{D}^2) := \{f \in B : \widehat{f}_{0,0} = 0\}$.

Точні верхні межі досягаються на послідовності функцій $\{f_{\rho_1,\rho_2}\}_{|\rho_1|+|\rho_2|<1}$.

Справді, поклавши для даної функції $f \in B^0(\mathbb{D}^2)$ $\varrho_1 = \lambda e^{i(\arg \widehat{f}_{1,1} - \arg \widehat{f}_{1,0})}$ і $\varrho_2 = \lambda e^{i(\arg \widehat{f}_{1,1} - \arg \widehat{f}_{0,1})}$, $0 < \lambda < 1/2$, з теореми отримаємо співвідношення

$$2\lambda\left(\left|\widehat{f}_{1,0}\right| + \left|\widehat{f}_{0,1}\right|\right) + \left|\widehat{f}_{1,1}\right| \leq \frac{3}{2},$$

з якого при $\lambda \to 1/2$ випливає потрібна оцінка зверху. Непокращуванність такої оцінки перевіряється безпосередньо на прикладі послідовності функцій $\{f_{\varrho_1,\varrho_2}\}$.

Твердження наслідку 2 цікаво порівняти з рівністю, яка безпосередньо випливає з рівності Д. Помпея (1) в одновимірному випадку:

$$\max\left\{\left|\widehat{f}_{0,0}+\widehat{f}_{1,0}+\widehat{f}_{0,1}+\widehat{f}_{1,1}\right| : f\in B(\mathbb{D}^2)\right\}=\frac{25}{16},$$

де максимум досягається для функції

$$f(z_1,z_2)=\frac{2z_1+1}{z_1+2}\cdot\frac{2z_2+1}{z_2+2}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}z_1+\frac{3}{8}z_2+\frac{9}{16}z_1z_2+\ldots.$$

Доведення теореми. Візьмемо довільну функцію $f\in B(\mathbb{D}^2)$ і число $r\in(0,1)$. Тоді за формулою Коші

$$2\left(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0}+r\rho_1\widehat{f}_{1,0}+r\rho_2\widehat{f}_{0,1}\right)+r^2\widehat{f}_{1,1}=$$

$$=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\left(2(\rho_1\rho_2+\rho_1\overline{w}_1+\rho_2\overline{w}_2)+\overline{w}_1\overline{w}_2\right)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2)=$$

$$=\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(w_1,w_2)\overline{w}_1\overline{w}_2K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2),\tag{6}$$

де

$$K(\rho_2w_1,\rho_1w_2):=2(\rho_1\rho_2w_1w_2+\rho_1w_2+\rho_2w_1)+1.$$

Оскільки

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}f(rw_1,rw_2)\overline{w}_1\overline{w}_2(\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2)d\sigma(w_1)d\sigma(w_2)=0,$$

то вираз $K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)$ в інтегралі (6) можна замінити на $K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)+\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2$, не змінивши при цьому значення самого інтегралу.

Легко бачити, що

$$K(\rho_2w_1,\rho_1w_2)+\rho_1^2w_2^2+\rho_2^2w_1^2=(\rho_1w_2+\rho_2w_1+1)^2.$$

Тому

$$2\left(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0}+r\rho_1\widehat{f}_{1,0}+r\rho_2\widehat{f}_{0,1}\right)+r^2\widehat{f}_{1,1}=$$

$$= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(rw_1, rw_2)\overline{w}_1\overline{w}_2(\rho_1 w_2 + \rho_2 w_1 + 1)^2 d\sigma(w_1)d\sigma(w_2).$$

Звідси за рівністю Парсеваля отримуємо нерівність

$$\left|2(\rho_1\rho_2\widehat{f}_{0,0} + r\rho_1\widehat{f}_{1,0} + r\rho_2\widehat{f}_{0,1}) + r^2\widehat{f}_{1,1}\right| \leq$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |\rho_1 w_2 + \rho_2 w_1 + 1|^2 d\sigma(w_1)d\sigma(w_2) =$$

$$= 2(|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1). \tag{7}$$

Оскільки права частина нерівності (7) не залежить від r, то вона має місце і при $r = 1$.

Покажемо, що співвідношення (7) є непокращуваними. Для цього розглянемо функцію

$$f_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2) = \frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1}, \quad |\rho_1| + |\rho_2| < 1.$$

Оскільки $|\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1| \leq |\rho_1| + |\rho_2| < 1$, то $|\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1| \geq 1 - |\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1| > 0$ для всіх $(z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$. Отже, функція f_{ρ_1,ρ_2} не має полюсів в $\mathbb{D}^2$, а тому є голоморфною в $\mathbb{D}^2$.

З другого боку, для всіх $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2$

$$|f_{\rho_1,\rho_2}(z_1, z_2)| = \left|\frac{\overline{\rho}_1 z_1 + \overline{\rho}_2 z_2 + z_1 z_2}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1}\right| = \left|\frac{\overline{\rho}_1 \overline{z}_2 + \overline{\rho}_2 \overline{z}_1 + 1}{\rho_1 z_2 + \rho_2 z_1 + 1}\right| = 1.$$

Тому за принципом максимуму $f_{\rho_1,\rho_2} \in B(\mathbb{D}^2)$.

Обчислимо коефіцієнти Тейлора функції f_{ρ_1,ρ_2}:

$$(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{0,0} = f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = 0,$$

$$(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{1,0} = \frac{\partial}{\partial z_1} f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = \overline{\rho}_1,$$

$$(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{0,1} = \frac{\partial}{\partial z_2} f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = \overline{\rho}_2,$$

$$(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{1,1} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} f_{\rho_1,\rho_2}(0,0) = 1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2.$$

Отже,

$$2\left(\rho_1\rho_2(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{0,0} + \rho_1(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{1,0} + \rho_2(\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{0,1}\right) + (\widehat{f_{\rho_1,\rho_2}})_{1,1} =$$

$$= 2(|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2) + 1 - |\rho_1|^2 - |\rho_2|^2 = |\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + 1.$$

Теорему доведено.

1. *Pompéiu D.* Sur une relation d'inégalité dans la théorie des fonctions holomorphes // Arch. Math. und Phys. — 1912. — **(3)** 19. — P. 224 – 228.

2. *Landau, E.* Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. I. und II. // Arch. Math. und Phys. — 1913. — **(3)** 21. — P. 42 – 50, 250 – 255.

3. *Szász O.* Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe // Math. Z. — 1918. — **1**. — P. 163 – 183.

4. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. — 1914. — **(2)** 13. — P. 1 – 5.

5. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie — Berlin — New-York : Springer-Verlag, 1986. — 201 p.

6. *Меремеля І. Ю., Савчук В. В.* Точні константи в нерівностях для коефіцієнтів Тейлора обмежених голоморфних функцій в полікрузі // Укр. мат. журн. (у друці).

7. *Савчук В. В., Савчук М. В.* Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2002. — **54,** № 12. — С. 1669 – 1679.

8. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. — М.: Физматгиз, 1962. — 420 с.