

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін-т математики НАН України, Київ)**О. В. Федунік–Яремчук** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)**ОЦІНКИ ОРТОПРОЕКЦІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ**

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using operators of orthogonal projection as well as linear operators subjected to some conditions.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, в якому норма визначається наступним чином

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_{\infty}(\pi_d)$ — простір 2π -періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_{\infty}(\pi_d)} = \|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

© А. Ф. Конограй, О. В. Федунік–Яремчук, 2015

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, і $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, d}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з векторним кроком $h = (h_1, \dots, h_d)$, а різниця l -го порядку з кроком h_j за змінною x_j визначається наступним чином

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє такі умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;
- 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стечкина [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l) , якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i, i \neq j$.

Нехай $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$, а Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l . Тоді класи $B_{p, \theta}^{\Omega}$ можна означити наступним чином [2]:

$$B_{p, \theta}^{\Omega} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p, \theta}^{\Omega}} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^{\Omega}} := \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p, \infty}^{\Omega}} := \sup_{t > 0} \frac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, \dots, t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1, d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B_{p, \theta}^{\Omega}$ співпадають з класами H_p^{Ω} , які були розглянуті М.М. Пустовойтовим в [3].

Зауважимо також, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}, 0 < r_j < l$, класи $B_{p, \theta}^{\Omega}$ є аналогами відомих класів Бесова $B_{p, \theta}^r, 1 \leq \theta < \infty$, та Нікольського $B_{p, \infty}^r = H_p^r$ (див., наприклад, [4]).

Для подальших міркувань будемо використовувати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B_{p, \theta}^{\Omega}$.

Нехай $V_n(t), n \in \mathbb{N}$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f * A_s.$$

Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови (S) і (S_l), тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B_{p,\theta}^\Omega$ можна означити наступним чином

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \asymp \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Зазначимо, що співвідношення (1) і (2) були отримані в роботах [5] і [3] відповідно.

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі C_i , $i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору \mathbb{R}^d .

У роботі будемо розглядати класи $B_{p,\theta}^\Omega$, які визначаються функцією Ω деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^{r_j}}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max \left\{ 1, \log \frac{1}{t_j} \right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r$, $j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$, а значить для функції Ω вигляду (3) виконуються умови 1–4, (S) та (S_l).

Нами встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$ у просторі $L_q(\pi_d)$ при $1 \leq q < \infty$. Поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Перш, ніж навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_{\infty}(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d_M^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i(\cdot) \right\|_q \quad (4)$$

називається ортопроекційним поперечником (Фур'є–поперечником) цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

У роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d_M^B(F, L_q)$, розглянуті В. М. Темляковим (див., наприклад, [7]), які визначаються наступним чином:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \quad (5)$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує таке число $B \geq 1$, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\|Ge^{i(k, \cdot)}\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M , а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m .

Із (4) і (5) легко бачити, що величини $d_M^\perp(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^\perp(F, L_q).$$

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d_M^\perp(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчалися величини (4) і (5) для класів функцій багатьох змінних $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r , $B_{p,\theta}^r$ та H_p^Ω , і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

Зауважимо, що одержані нижче оцінки доповнюють результати, які отримані в роботах [12–14].

Наведемо необхідні позначення та означення, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\}.$$

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Враховуючи (3), множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \prod_{j=1}^d 2^{r s_j} s_j^{b_j} \leq N \right\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^\perp(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Лема А [11]. Кількість елементів множини $Q(N)$ рівна за порядком:

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1}.$$

Перш, ніж перейти до викладу отриманих результатів, покладемо $M = |Q(N)|$. Тоді, згідно з лемою А, отримаємо

$$\begin{aligned} M &\asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1}, \\ \log M &\asymp \log N, \quad N \asymp M^r (\log M)^{b_1 + \dots + b_d - (d-1)r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $1 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (3). Тоді при $0 < r < l$ мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} d_M^{\perp}(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q) &\asymp d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \\ &\asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+)}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Відмітимо, оскільки $d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q) \leq d_M^{\perp}(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q)$, то оцінку зверху в (7) достатньо встановити для поперечника $d_M^{\perp}(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q)$, а знизу — для величини $d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q)$.

Оцінка зверху для поперечника $d_M^{\perp}(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_q)$ у випадку $1 < q < \infty$, впливає із оцінки наближення функцій з класів $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$ тригонометричними поліномами $t_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x)$, де

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}, \quad \widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f , $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Тоді, скориставшись встановленим в [15] результатом

$$\sup_{f \in B_{\infty, \theta}^{\Omega}} \|f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot)\|_q \asymp N^{-1} (\log N)^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+},$$

та співвідношеннями (6), одержуємо шукану оцінку зверху в (7) у випадку $1 < q < \infty$. Для $q = 1$ проведемо аналогічні до наведених

вище міркування, додатково використавши нерівність $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_q$, $1 < q < \infty$.

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу. Зазначимо, що отримана оцінка зверху не залежить від параметра q , тому для доведення оцінки знизу величини $d_M^B(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_q)$ достатньо розглянути випадок $q = 1$. Доведення розіб'ємо на дві частини.

Нехай спочатку $1 \leq \theta < 2$. Використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувались у прикладі 1 роботи [8]. Нехай число M задане, $G \in L_M(B)_1$. Тоді існує вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in \tilde{Q}(N)$, де $\tilde{Q}(N) = \bigcup_{s \in \Theta(N)} \rho(s)$ такий, що

$$\|e^{i(k^0, \cdot)} - Ge^{i(k^0, \cdot)}\|_1 \gg 1. \quad (8)$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_3 N^{-1} e^{i(k^0, x)}, \quad C_3 > 0,$$

яка при відповідному виборі сталої C_3 належить до класу $B_{\infty,\theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < 2$.

Далі, скориставшись співвідношенням (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \|g_1(\cdot) - Gg_1(\cdot)\|_1 &\gg N^{-1} \|e^{i(k^0, \cdot)} - Ge^{i(k^0, \cdot)}\|_1 \gg \\ &\gg N^{-1} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r}. \end{aligned}$$

Нехай тепер $2 \leq \theta < \infty$. В цьому випадку для встановлення оцінки знизу величини $d_M^B(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_1)$ розглянемо функцію, яка аналогічна функції з прикладу 6 роботи [8].

За допомогою аналогічних міркувань, що і в [16], можна показати, що існує множина $\Theta_1(N) \subset \Theta(N)$ така, що для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \Theta_1(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d} \quad \text{і} \quad |\Theta_1(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Далі, для $G \in L_M(B)_1$ знайдуться N , $\Theta_2(N) \subset \Theta_1(N)$ такі, що

$$|\Theta_2(N)| \geq \frac{1}{2} |\Theta_1(N)|,$$

і в кожному $\rho(s)$, $s \in \Theta_2(N)$, знайдуться такі вектори k^s , що для функції

$$g_2(x) = \sum_{s \in \Theta_2(N)} e^{i(k^s, x)}$$

знайдеться $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*)$ такий, що

$$\|g_2(x + y^*) - Gg_2(x + y^*)\|_1 \gg (\log M)^{\frac{d-1}{2}}. \quad (9)$$

Доведення співвідношення (9) проводиться за допомогою тих же міркувань, які використовувались при доведенні відповідної оцінки в прикладі 6 роботи [8].

Отже, розглянемо функцію

$$g_3(x) = C_4 N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_2(x), \quad C_4 > 0.$$

Покажемо, що функція g_3 при відповідному виборі сталої C_4 належить до класу $B_{\infty, \theta}^{\Omega}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \|g_3\|_{B_{\infty, \theta}^{\Omega}} &= \left(\sum_s \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_3, \cdot)\|_{\infty}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Theta_2(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_2, \cdot)\|_{\infty}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Theta_2(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \cdot N \cdot |\Theta_2(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} (\log N)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, скориставшись співвідношенням (9), будемо мати

$$\begin{aligned} \|g_3(x + y^*) - Gg_3(x + y^*)\|_q &\geq \|g_3(x + y^*) - Gg_3(x + y^*)\|_1 \gg \\ &\gg N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g_2(x + y^*) - Gg_2(x + y^*)\|_1 \gg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\gg N^{-1}(\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}}(\log M)^{\frac{d-1}{2}} \asymp \\ &\asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему доведено.

Зауваження 1. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r$ результат теореми (для класів $B_{\infty,\theta}^r, 1 \leq \theta < \infty$) встановлений А. С. Романюком [10].

Зауваження 2. Точні за порядком оцінки величин $d_M^{\perp}(H_{\infty}^{\Omega}, L_q)$ та $d_M^B(H_{\infty}^{\Omega}, L_q)$ при $1 \leq q < \infty$ отримані М. М. Пустовойтовим [11].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.
4. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.
5. *Стасюк С. А., Федунік О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.
6. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, № 2. — С. 314–317.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.
8. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138–168.
9. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008. — **199**, № 2. — С. 93–114.
10. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшие приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**. — С. 181–213.

11. Пустовойтов Н. Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // *Anal. Math.* — 2008. — **34**. — С. 187–224.
12. Конограй А. Ф. Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^{\Omega}$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // *Мат. заметки.* — 2014. — **95**, № 5. — С. 734–749.
13. Конограй А. Ф., Федуник-Яремчук О. В. Оцінки апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // *Теорія наближення функцій та суміжні питання* : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 148–160.
14. Конограй А. Ф., Федуник-Яремчук О. В. Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // *Теорія наближення функцій та суміжні питання* : Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2014. — **11**, № 1. — С. 131–150.
15. Стасюк С. А. Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^{\Omega}$ // *Мат. заметки.* — 2010. — **87**, № 1. — С. 108–121.
16. Пустовойтов Н. Н. О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // *Anal. Math.* — 2003. — **29**. — С. 201–218.