Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 197-204

УДК 517.51

**Ю. Б. Зелинский** (Ин–т математики НАН Украины, Киев)

# ЗАДАЧА О ТЕНИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА МНОЖЕСТВ

*The problem of shadow for family of convex sets with non empty interior is solved. It is equivalent to condition for point is in generalized convex hull of a family of compact sets.*

*В работе получено решение задачи о тени для семейства выпуклых множеств с непустой внутренностью, что эквивалентно нахождению условий принадлежности точки к обобщенной выпуклой оболочке этого семейства множеств.*

Главная цель работы — решение задачи о тени для произвольного выпуклого множества с непустой внутренностью и с компактным замыканием в $n$-мерном евклидовом пространстве и действия группы преобразований. Эту задачу можно рассматривать как нахождение условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке семейства множеств, полученного из исходного множества действием группы преобразований.

**Определение 1.** *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-выпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, если найдется $m$-мерная плоскость $L$, такая, что $x \in L$ и $L \cap E = \varnothing$.*

**Определение 2.** *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-выпукло, если оно $m$-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.*

Оба приведенные определения удовлетворяют известной аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное $m$-выпуклое множество, содержащее $E$, и назвать его $m$-оболочкой множества $E$.

В работе [1] получено полное решение следующей задачи о тени, впервые рассмотренной Г.Худайбергановым [2-4].

**Задача** (о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере $S^{n-1}$ и радиуса, меньшего от радиуса сферы, достаточно, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

В [1] показано, что для этого необходимо и достаточно $n+1$-го шара. Мы сначала рассмотрим аналогичную задачу для семейства шаров, центры которых не привязаны ни к какому наперед заданному множеству.

**Определение 3.** *Двусторонним конусом $K \subset \mathbb{R}^n$ назовем подмножество евклидового пространства, замкнутое относительно умножения на вещественные числа.*

Такое множество есть объединение прямых, проходящих через начало координат.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы выбранная точка в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно $n$ шаров.*

***Доказательство.*** Не нарушая общности, за выбранную точку возьмем начало координат. Рассмотрим куб с центром в начале координат, одна из вершин которого точка $a = (5, 5, \ldots, 5)$, а другие вершины куба задаются последовательной симметрией точки $a$ относительно координатных гиперплоскостей. Рассмотрим шар $B_1$ с центром на первой координатной оси, граничная сфера которого проходит через все вершины той грани куба $C$, которая содержит точку $(5, 0, \ldots, 0)$. Дополнительно требуем, чтобы эта сфера проходила через точку $(4, 0, \ldots, 0)$. Эти условия однозначно определяют центр шара — точку $((25n-24)/2, 0, \ldots, 0)$. Другая точка пересечения сферы с осью координат — $((50n-44), 0, \ldots, 0)$. Очевидно, что двусторонний конус, образованный прямыми, проходящими через начало координат и точки шара $B_1$, содержит как подмножество грань $C$ и центрально симметричную к ней грань куба. Отметим также, поскольку это нам понадобится в теореме 2, что тангенс угла между осью $0x_1$ и боковой поверхностью конуса превышает $\sqrt{n-1}$. Шар $B_2^{'}$ получим из шара $B_1$ преобразованием гомотетии $\varphi$ с коэффициентом $k = 4/(50n-44) = 2/(25n-22)$. Следовательно, $B_2^{'} = \varphi(B_1)$.

Шары $B_1$ и $B_2^{'}$ касаются по точке $(4, 0, \ldots, 0)$. Остальные $(n-2)$ шара зададим по индукции $B_{i+1}^{'} = \varphi(B_i^{'}),\ i = \overline{2, n-1}$. Теперь поворотом относительно начала координат переместим каждый шар $B_i^{'},\ i = \overline{2, n}$ в шар $B_i, i = \overline{2, n}$, соответственно, центр которого находится на $i$-й оси координат. Легко убедиться, что двусторонний конус, заданный набором замкнутых попарно непересекающихся шаров $\{B_i\}, i = \overline{1, n}$, содержит все точки пространства $\mathbb{R}^n$. То же справедливо и для семейства открытых шаров $\{\text{Int } B_i\}, i = \overline{1, n}$, где Int $B_i$ внутренность шара $B_i$. Из леммы 1 [1] следует, что произвольной совокупности из $n-1$ шаров для создания тени мало. Поэтому точное значение необходимого и достаточного количества шаров $n$. Теорема доказана.

Распространим теорему на семейства множеств, полученных при помощи некоторой группы преобразований из выпуклого множества.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы выбранная точка в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью и с компактным замыканием при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно $n$ элементов семейства.*

***Доказательство.*** Пусть $B_1$ — заданное выпуклое множество с непустой внутренностью. Согласно [5] локально его границу можно задать выпуклой функцией, а согласно [6] выпуклая функция дифференцируема почти всюду на области задания. Поэтому существует точка $x$ границы $\partial B_1$ множества $B_1$, в которой существует касательная гиперплоскость. Существует достаточно близкая к точке $x$ точка $y$ такая, что конус с вершиной в ней и с лучами, проходящими через точки множества $B_1$, содержит круговой конус, тангенс угла в котором между осью (прямой через точки $x, y$) и боковой поверхностью превышает $\sqrt{n-1}$. Переместим движением исходное множество $B_1$ так, чтобы точка $y$ совпала с началом координат, а прямая, содержащая точки $x, y$ с осью $0x_1$. Не нарушая общности, сохраним для перемещенного множества обозначение $B_1$. Теперь длина отрезка $0x$ есть радиус $r_1$ максимального шара с центром в начале координат, внутренность которого не пересекается с множеством $B_1$ и который пересекается с этим множеством по точке $x$. Пусть $r_2$ — радиус минимального шара с центром в начале координат, который содержит множество $B_1$. Множество $B_2^{'}$ получим из множества $B_1$ преобразованием гомотетии $\varphi$ с коэффициентом $k = r_1/r_2$. Дальше продолжим, как и в теореме 1, построим остальные $(n-2)$ множества по индукции $B_{i+1}^{'} = \varphi(B_i^{'}), i = \overline{2, n-1}$. Теперь такими же поворотами относительно начала координат переместим каждое множество $B_i^{'}, i = \overline{2,n}$ во множество $B_i = \overline{2,n}$, соответственно. Легко убедиться, что двусторонний конус, заданный набором замкнутых попарно непересекающихся множеств $\{B_i\}, i = \overline{1,n}$, так же содержит все точки пространства $\mathbb{R}^n$.

***Замечание* 1.** Теорема 2 справедлива и для семейства открытых множеств $\{\mathrm{Int}\ B_i\},\ i = \overline{1,n}$, где $\mathrm{Int}\ B_i$ внутренность множества $B_i$.

Рассмотрим более сложные по отношению к предыдущим определениям объекты.

**Определение 4.** *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-полувыпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, если найдется $m$-мерная полуплоскость $P$, такая, что и $x \in P$ и $P \cap E = \varnothing$.*

**Определение 5.** *Скажем, что множество $m$-полувыпукло, если оно $m$-полувыпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.*

Эти определения тоже удовлетворяют аксиоме выпуклости.

Рассмотрим аналог задачи о тени для полувыпуклости. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) множеств достаточно, чтобы любой луч из начала координат пересекал хотя бы одно из этих множеств?

В случае $n = 2$ в [1, Теорема 3] показано, что три шара даже с центрами, расположенными на фиксированной сфере, решают эту задачу.

**Теорема 3.** *Для того, чтобы выбранная точка в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно $n+1$ шара.*

***Доказательство.*** Не нарушая общности, за выбранную точку возьмем начало координат. Рассмотрим равносторонний симплекс с ортоцентром в начале координат, одна из граней которого $A$ перпендикулярна оси $0x_1$ и пересекает эту ось в своем ортоцентре. Пусть

$a$ — эта точка пересечения. Рассмотрим шар $B_1$ с центром на первой координатной оси, граничная сфера которого проходит через все вершины грани $A$ и точку $b$, принадлежащую отрезку $[0, a]$. Пусть $r_1$ — длина отрезка $[0, b]$, а $r_2$ — радиус минимального шара с центром в начале координат, который содержит шар $B_1$. Построим $n+1$ множество $B_i^{'}, \overline{1, n+1},\ B_1^{'} = B_1$, где каждое следующее множество получено из предыдущего гомотетией с одинаковым коэффициентом $k = r_1/r_2$. Выберем $n$ лучей из начала координат, перпендикулярных к остальным n граням симплекса. Теперь семейство множеств $B_i,\ i = \overline{2, n+1}$ получим из семейства $B_i^{'},\ i = \overline{2, n+1}$ поворотом соответственного шара, который перенесет центр шара на один из выбранных лучей. Легко убедиться, что так построенное семейство из $n+1$ шара удовлетворяет утверждению теоремы. Система односторонних открытых (замкнутых) конусов, порожденная этими шарами, будет содержать все грани исходного симплекса, а, следовательно, и все пространство. Необходимость результата следует из теоремы 4 [1].

***Замечание* 2.** Используя рассуждения теоремы 3, мы можем уточнить один результат из [1]. Если разрешить центрам шаров находиться на двух концентричных сферах, то, в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ для того, чтобы центр сфер принадлежал 1-полувыпуклой оболочке шаров, достаточно пяти шаров. Для этого достаточно разместить три шара в вершинах треугольника с разными сторонами, лежащего в экваториальной плоскости $0x_1x_2$ (как в теореме 3, [1]), а еще два достаточно малого радиуса симметрично на оси.

**Теорема 4.** *Для того, чтобы выбранная точка в $n$-мерном евклидовом пространстве при $n \geq 2$ принадлежала 1-полувыпуклой оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых множеств, полученного из заданного выпуклого множества с непустой внутренностью и с компактным замыканием при помощи группы преобразований, состоящей из движений и гомотетий, необходимо и достаточно $n+1$ элемента семейства.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, достаточно выбирать конусы, содержащие грань равностороннего симплекса, как в теореме 3.

***Замечание* 3.** Используя плотность точек гладкости на границе выпуклого тела с непустой внутренностью, теоремы 2 и 4 можно уточнить. Теорема 2 останется справедливой, если рассматривать группу преобразований, состоящую из параллельных перемещений множества и его гомотетий. В теореме 4 при рассмотрении группы параллельных перемещений множества и его гомотетий необходимо $2n$ множеств. Это можно показать, если за исходное множество взять прямоугольный параллелепипед.

Изучим, как изменится ситуация с предыдущими задачами, если мы вместо действительного евклидового пространства будем рассматривать комплексное или гиперкомплексное пространство.

**Определение 6.** *Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ $m$-комплексно ($m$-гиперкомплексно) выпукло относительно точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$, если найдется $m$-мерная комплексная (гиперкомплексная) плоскость $L$ такая что $z \in L$ и $L \cap E = \varnothing$. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ $m$-комплексно ($m$-гиперкомплексно) выпукло, если оно $m$-комплексно ($m$-гиперкомплексно) выпукло относительно каждой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus E(\mathbb{H}^n \setminus E)$.*

**Задача** (о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ и радиуса, меньшего от радиуса сферы, достаточно, чтобы любая комплексная (гиперкомплексная) прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Аналогично вещественному случаю для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n(E \subset \mathbb{H}^n)$ мы можем рассматривать минимальное $m$-комплексно ($m$-гиперкомплексно) выпуклое множество, содержащее $E$, и назвать его $m$-комплексной ($m$-гиперкомплексной) оболочкой множества $E$.

**Теорема 5.** *Для того, чтобы выбранная точка в 2-мерном комплексном (гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^2)$ принадлежала 1-комплексной (1-гиперкомплексной) оболочке семейства попарно непересекающихся открытых (замкнутых) шаров, которые данную точку не содержат, необходимо и достаточно 2-х шаров.*

***Доказательство.*** Доказательство проведем для комплексного пространства. В гиперкомплексном случае доказательство аналогично. Обозначим $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ произвольную точку пространства.

Выберем один открытый шар радиуса 1. Расположим его центр в точке $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$. Касательная вещественно трехмерная плоскость в начале координат к этому шару задается уравнением $\mathrm{Re}\, z_1 = 0$. Прямая $z_1 = 0$ будет единственной комплексной прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через начало координат. Следовательно, достаточно выбрать второй шар (радиус его может быть как угодно малым) так, чтобы он имел точки пересечения с прямой $z_1 = 0$. В частности его центр можно выбрать в точке $(0, 1)$. Поэтому мы доказали даже больше утверждения теоремы. Центры обоих шаров могут находиться на сфере с центром в начале координат. Чуть уменьшая радиусы этих шаров и используя непрерывное изменение касательных плоскостей к шару, получим справедливость теоремы и в случае замкнутых шаров.

***Замечание* 4.** Рассуждения, аналогичные проведенным в теореме 2, позволят показать, что теорема 5 останется справедливой, если шары заменить выпуклыми множествами с непустой внутренностью и с компактным замыканием, полученными из одного множества действием группы преобразований.

Теорема 5 дает точное значение количества шаров только при $n = 2$. Из теорем 1,2 мы получим оценку сверху на количество шаров и выпуклых множеств. Поэтому следующие вопросы остаются открытыми.

**Вопрос 1.** Какое минимальное количество шаров в $n$-мерном комплексном (гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ при $n \geq 3$ обеспечит принадлежность начала координат их 1-комплексной (1-гиперкомплексной) оболочке?

**Вопрос 2.** Какое минимальное количество открытых (замкнутых) шаров с центрами на фиксированной сфере и радиуса не превышающего (меньшего) радиуса сферы, в $n$-мерном комплексном (гиперкомплексном) евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ при $n \geq 3$ обеспечит принадлежность центра сферы их 1-комплексной (1-гиперкомплексной) оболочке?

Аналогично остаются открытыми оценки комплексной и гиперкомплексной полувыпуклости для семейств множеств, которую можно ввести подобно вещественной полувыпуклости.

Считаю своей приятной обязанностью высказать благодарность

М. В. Ткачуку за ценные замечания при обсуждении этих результатов, которые способствовали существенному усилению теорем 3 и 4.

1. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // arXiv preprint arXiv: 1501.06747.
2. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе // К.: Наук. думка, 1993. — 264 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Ін–ту математики НАН України, — 2012. — **92**. — 280 с.
4. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982. — №1772. — 85 Деп.
5. *Anderson R.D., Klee V.L.* Convex functions and upper-semi-continuous collections // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P. 349 – 357.
6. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 336 с.