Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 186-196

УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Міжнародний математичний центр НАН України імені Юрія Митропольського, Київ)

ОБМЕЖЕННЯ ПОРЯДКУ q-МОНОТОННООГО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

A continuous periodic q-monotone function, $q = 3, \ldots$, is constructed for which if it is approximated with q-monotone polynomials the Jackson-Stechkin estimate with the modulus of smoothness of order $\geq q+2$ is not valid (in contrast with the approximation without restrictions).

Побудовано неперервну періодичну q-монотонну функцію, $q = 3, \ldots$, для якої при наближенні її q-монотонними поліномами (на відміну від наближення без обмежень) не справджується оцінка Джексона-Стечкина з модулем гладкості прядку $\geq q+2$.

1. Вступ. Нехай C – простір неперервних 2π–періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, і $\mathbb{T}_n$ – простір тригонометричних поліномів $t_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядку $\leq n$, з $n\in\mathbb{N}$ і $a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$. Позначимо

$$E_n(f) := \inf_{t_n\in\mathbb{T}_n} \|f - t_n\|.$$

Нагадаємо, що при кожному $k\in\mathbb{N}$ для будь-якої $f\in C$ справджується нерівність Джексона-Стечкина [1]

$$E_n(f) \leq c(k)\, \omega_k\left(f, 1/n\right), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

де $c(k)$ – стала, яка залежить тільки від k, і $\omega_k\left(f,\cdot\right)$ – модуль гладкості порядку k функції f.

Зафіксуємо $s\in\mathbb{N}$ і через Y позначимо набір $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ точок y_i таких, що

$$-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \cdots < y_1 < \pi,$$

де для решти $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначаються (періодично) рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ $(y_0 = y_{2s} + 2\pi, ..., y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, ...)$. При кожному $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ виділимо в C множину $\Delta^{(q)}(Y)$ всіх функцій, які мають на $[y_1, y_0]$ невід'ємну q-ту похідну, на $[y_2, y_1]$ – недодатню, на $[y_3, y_2]$ – невід'ємну і т.д. Іншими словами, $\Delta^{(q)}(Y)$ містить всі $f \in C$, для яких

$$f^{(q)}(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{Z},$$

де

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2} \quad \Big(\Pi(x) > 0,\ x \in (y_1, y_0)\Big).$$

Функції з $\Delta^{(0)}(Y)$ називають копозитивними (одна одній), з $\Delta^{(1)}(Y)$ – комонотонними, з $\Delta^{(2)}(Y)$ – коопуклими і з $\Delta^{(q)}(Y)$ – q-монотонними. Позначимо

$$E_n^{(q)}(f) := E_n^{(q)}(f, Y) := \inf_{t_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(q)}(Y)} \|f - t_n\|.$$

Встановлення для $E_n^{(q)}(f)$ оцінок типу (1) є основною задачею q-монотонного наближення. Так, для $q = 1$ у [2] і, відповідно, у [3] доведено, що якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$E_n^{(1)}(f) \le c(s)\, \omega_1(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

і

$$E_n^{(1)}(f) \le c(s)\, \omega_2(f, 1/n), \quad n \ge N(Y), \tag{3}$$

$$E_n^{(1)}(f) \le C(Y)\, \omega_2(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

де $c(s)$ – стала, яка залежить тільки від s, а $N(Y)$ і $C(Y)$ – сталі, які залежать тільки від Y, тобто від $\min\limits_{i=1,\dots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$.

Тоді як в [4, с. 64–83], при кожному $n \in \mathbb{N}$ побудовано функцію $g_n(x) = g_n(x, s, Y, k) \in \Delta^{(1)}(Y)$ таку, що

$$E_n^{(1)}(g_n) \geq C(Y, k)\, n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k\left(g_n, 1/n\right), \tag{5}$$

де $C(Y, k)$ – стала, яка залежить тільки від Y і k. Тобто, при кожному $n \in \mathbb{N}$ підібрано функцію з $\Delta^{(1)}(Y)$, для якої (2)–(4) з ω_k, $k \geq 3$, хибні. В [5] побудовано одну таку функцію для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для $q = 2$ має місце така сама картина з оцінкою $E_n^{(2)}(f)$, тільки замість ω_2 у (3) і (4) стоїть ω_3, (див. [6]), а замість (5) – оцінка

$$E_n^{(2)}(f_n) \geq C(Y, k)\, n^{2\left(\frac{k}{3}-1\right)} \omega_k\left(f_n, 1/n\right), \tag{6}$$

див. [7]. Про суттєву залежність від Y сталих в оцінках вигляду (3) і (4) для $q = 2$, див. [8].

Для ознайомлення з випадком $q = 0$, (див. [9–12].

Наслідуючи роботу [13], де у випадку наближення на відрізку функції для нерівностей, аналогічних (5) і (6), побудовано для всіх $q \in \mathbb{N}$, ми доводимо

Приклад 1. *Для довільних натуральних* q, n *і* k, $k \geq q+2$ *існує функція* $f(x)$, *яка залежить від* Y, n *і* k *така, що*

$$f \in \Delta^{(q)}(Y)$$

і

$$E_n^{(q)}(f) > B_{Y,k} n^{q\left(\frac{k}{q+1}-1\right)} \omega_k\left(f, 1/n\right), \tag{7}$$

де стала $B_{Y,k}$ *залежить тільки від* Y *і* k.

2. Доведення. Як вже зазначалось, приклад 1 є відомим для $q = 1, 2$. Доведемо його для $q \geq 3$. Зафіксуємо $s \in \mathbb{N}$ і набір $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = Y$. Завдяки періодичності, не втрачаючи загальності, припустимо, що точка 0 належить набору Y, тобто $y_{i_*} = 0$ для деякого $i_* \in \mathbb{Z}$. Покладемо

$$\Pi_*(x) := \prod_{i=1 i \neq i_*}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}.$$

Нехай для визначеності i_* – непарне число. Тоді $\Pi_*(0) > 0$.

Через $2d$ позначимо відстань від y_{i_*} до найближчої точки набору Y, зазначимо, що

$$d \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Pi_*(x) > 0, \quad x \in (-2d, 2d).$$

Покладемо

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \qquad M_1 := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi_*'(x)|, \qquad m := \min_{x \in [-d,d]} \Pi_*(x).$$

Враховуючи набір Y, позначимо через N найменше з натуральних чисел, яке задовольняє нерівність

$$m \left(\sin \frac{d}{8} \right)^{2q-1} \geq \frac{5}{N} \left(M + M_1 \right) (2q - 1) \tag{8}$$

тоді, зокрема,

$$d > \frac{40}{N}. \tag{9}$$

Виберемо натуральне число j^* з умови

$$\frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N} \leq d < \frac{\pi}{N} + (j^* + 1) \frac{2\pi}{N}$$

та позначимо

$$d^* := \frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N},$$

помітивши, що

$$\frac{1}{2} d < d^* \leq d. \tag{10}$$

При побудові контрприкладу використовується ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 .$$

Нагадаємо (див., наприклад, [14, с. 127]) деякі його властивості:
а) $J_N(t)$ — парний невід'ємний тригонометричний поліном порядку $2(N-1)$;
б)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_N(t)dt = 1; \tag{11}$$

в) для довільної неперервно диференційовної періодичної функції g в кожній точці x має місце нерівність

$$\frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(t) - g(x)) J_N(t-x)dt \right| \le \frac{5}{N} \|g'\|. \tag{12}$$

Позначимо

$$\tilde{M} := \frac{1}{\pi} \|J_N\|,$$

$$\tilde{m} := \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t - d^*) = \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t + d^*).$$

Враховуючи, що $\tilde{m} > 0$, покладемо

$$\overline{M} := 2 \left(2 + \pi^3 \sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}} \right) \sum_{\nu=0}^{q} \binom{q}{\nu} .$$

Скрізь надалі число b задовольняє нерівності

$$0 < b < \frac{\pi}{2N\overline{M}}. \tag{13}$$

Покладемо

$$\tilde{\Pi}(x) := \tilde{\Pi}(x, b, B_q) := \sin\frac{x-2b}{2}\prod_{\nu=0}^{2q-3}\sin\frac{x-b_\nu}{2},$$

де точки $B_q := \{b_\nu\}_{\nu=0}^{2q-3}$ є такі, що

$$2b < b_{2q-3} < ... < b_1 < b_0 < \overline{M}b. \tag{14}$$

Враховуючи (9) та (10), зазначимо, що

$$\frac{d^* - b_0}{2} > \frac{d}{8}. \tag{15}$$

Для кожних b і B_q, позначимо

$$Q_r(x) := Q_r(x, b, B_q) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)J_N(t-d^*)dt,$$

$$Q_l(x) := Q_l(x, b, B_q) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)J_N(t+d^*)dt.$$

Оскільки

$$Q_r(2\pi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*)J_N(t-d^*)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t) - \tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*)\right)J_N(t-d^*)dt,$$

то, враховуючи (11), (12), (15) та (8), отримаємо

$$Q_r(2\pi) \geq \tilde{\Pi}(d^*)\Pi_*(d^*) - \frac{5}{N}\left\|\left(\tilde{\Pi}(\cdot)\Pi_*(\cdot)\right)'\right\| \geq$$

$$\geq m\left(\sin\frac{d}{8}\right)^{2q-1}-\frac{5}{N}\left(M+M_1\right)(2q-1)\geq 0.$$

Аналогічно, оскільки

$$Q_l(2\pi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*)J_N(t+d^*)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)-\tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*)\right)J_N(t+d^*)dt,$$

то з (11), (12), (15) та (8) випливає

$$Q_l(2\pi)\leq\tilde{\Pi}(-d^*)\Pi_*(-d^*)+\frac{5}{N}\left\|\left(\tilde{\Pi}(\cdot)\Pi_*(\cdot)\right)'\right\|\leq$$

$$\leq -m\left(\sin\frac{d}{8}\right)^{2q-1}+\frac{5}{N}\left(M+M_1\right)(2q-1)\leq 0.$$

Отже, існує $\alpha_b\in[0,1]$ таке, що

$$\alpha_b Q_r(2\pi)+(1-\alpha_b)Q_l(2\pi)=0. \tag{16}$$

Покладемо

$$Q(x):=Q(x,b,B_q):=\frac{1}{b^{2(q-1)}}\Big(\alpha_b Q_r(x)+(1-\alpha_b)Q_l(x)\Big).$$

Рівність (16) означає, що $Q(x)$ є тригонометричним поліномом, порядок якого у відповідності з а) дорівнює $2(N+q-2)+s$. Наступна лема 1 доводиться за індукцією, аналогічно лемі 3.1 роботи [4].

Лема 1. *Для довільного b і $q\geq 2$, існує набір B_q такий, що*

$$\int\limits_0^{b_0}\int\limits_0^{t_1}...\int\limits_0^{t_{q-2}}Q(t_{q-1})dt_{q-1}...dt_1=0. \tag{17}$$

Нехай $K_b(x)$ — 2π-періодична функція така, що

$$K_b(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in (0, b_0), \\ 1, & \text{якщо} \quad x \in [-\pi, 0] \cup [b_0, \pi]. \end{cases}$$

Позначимо

$$g(x) := g(x, b, B_q) :=$$

$$\frac{1}{\pi b^{2(q-1)}} \int_0^x K_b(x)\tilde{\Pi}(t)\Pi_*(t)\big(\alpha_b J_N(t-d^*)+(1-\alpha_b)J_N(t+d^*)\big)dt.$$

З (17) та (14) випливає, що g — 2π-періодична функція з $\Delta^{(1)}(Y)$. Покладемо

$$f(x,b,2) := \int\limits_0^x (g(t,b) - A_{b,2})dt, \quad f(x,b,3) := \int\limits_0^x (f(t,b,2) + A_{b,3})dt,$$

$$f(x,b,4) := \int\limits_0^x (f(t,b,3) + A_{b,4})dt, \; f(x,b,5) := \int\limits_0^x (f(t,b,4) + A_{b,5})dt,$$

$$f(x,b,6) := \int\limits_0^x (f(t,b,5) - A_{b,6})dt, \qquad ...., \qquad f(x) := f(x,b,q),$$

де числа

$$A_{b,\nu} \in \begin{cases} [0, 5/b^{2(q-1)}], & \text{якщо} \quad \nu \text{ парне}, \\ [-1, 1], & \text{якщо} \quad \nu \text{ непарне}, \end{cases}$$

вибрані з умов $f(2\pi, b, \nu) = 0$, $\nu = 2, ..., q$. Тому, зокрема, $f \in \Delta^{(q)}(Y)$. Існування чисел $A_{b,\nu}$ доводиться аналогічно доведенню (16). Позначимо

$$P(x,b,2) := \int\limits_0^x (Q(t,b) - A_{b,2})\,dt, \; P(x,b,3) := \int\limits_0^x (P(t,b,2) + A_{b,3})\,dt,$$

$$P(x,b,4):=\int\limits_0^x (P(t,b,3)+A_{b,4})\,dt, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad P(x):=P(x,b,q).$$

Зауважимо, що $P(2\pi\nu)=0,\ \nu\in\mathbb{Z}$, тобто P – тригонометричний поліном, при кожному $q\geq 2$.

Отже,

$$\|g-Q\|=\|g-Q\|_{[0,b_0]}=\|Q\|_{[0,b_0]}\leq$$

$$\leq M\tilde{M}b_0\frac{1}{b^{2(q-1)}}\left(\sin\frac{b_0-2b}{2}\right)^{2q-1}<\frac{1}{2^{2q-1}}M\tilde{M}\overline{M}^{2q}b^2=:c_1b^2,$$

$$\|f-P\|=\|f-P\|_{[0,2\pi]}=$$

$$=\frac{1}{b^{2(q-1)}}\left\|\int\limits_0^{\cdot}\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{q-2}}(g(t_{q-1})-Q(t_{q-1}))\,dt_{q-1}\ldots dt_1\right\|_{[0,2\pi]}<$$

$$<2\overline{M}^{q-1}c_1b^{q+1}, \tag{18}$$

$$\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\leq\omega_k\left(f-P,\frac{1}{n}\right)+\omega_k\left(P,\frac{1}{n}\right)\leq 2^k\|f-P\|+$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^k\|P^{(k)}\|\leq 2^{k+1}\overline{M}^{q-1}c_1b^{q+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^kM_k, \tag{19}$$

де стала M_k не залежить від n.

Виберемо з множини $\Delta^{(q)}(Y)$ довільний тригонометричний поліном τ_n порядку $\leq n$, $n>s+2N$. Нехай

$$R_n(x):=\tau_n(x)-P(x).$$

Тоді

$$R_n^{(q)}(b)=\tau_n^{(q)}(b)-P^{(q)}(b)\geq -P^{(q)}(b)\geq\frac{bm\tilde{m}}{\pi^{2q-1}}=:c_2b.$$

Скориставшись нерівністю Бернштейна, отримаємо

$$c_2 b \le R_n^{(q)}(b) \le n^q \|R_n\|,$$

звідки

$$\frac{c_2 b}{n^q} \le \|R_n\| \le \|\tau_n - f\| + \|f - P\| \le \|\tau_n - f\| + 2\overline{M}^{q-1} c_1 b^{q+1},$$

тобто

$$\|\tau_n - f\| \ge \frac{c_2 b}{n^q} - 2\overline{M}^{q-1} c_1 b^{q+1} = \frac{c_2 b}{n^q}\left(1 - \frac{2\overline{M}^{q-1} c_1 b^q n^q}{c_2}\right). \quad (20)$$

Нарешті, для додоведення (7) залишилось розглянути два випадки. Якщо $n > N_0$, то візьмемо

$$f(x) := f(x, b_n), \quad b_n := \sqrt[q]{\frac{c_2}{4\overline{M}^{q-1} c_1}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{q+1}},$$

де N_0 вибрано з урахуванням, що $\overline{M} b_{N_0} < \frac{\pi}{2N}$ і $N_0 > s + 2N$. Тоді (7) випливає з (19) та (20), а саме

$$\frac{\|\tau_n - f\|}{\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)} \ge \frac{\frac{c_2 b_n}{n^q}\left(1 - \frac{2\overline{M}^{q-1} c_1 b_n^q n^q}{c_2}\right)}{2^{k+1}\overline{M}^{q-1} c_1 b_n^{q+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2n^q} \frac{c_2 b_n}{2^{k+1}\overline{M}^{q-1} c_1 b_n^{q+1} + (\frac{1}{n})^k M_k} =: B_{Y,k} n^{q\left(\frac{k}{q+1} - 1\right)}.$$

Якщо $n < N_0$, то (7) випливає з нерівності $E_n^{(q)}(f) \ge E_{1+N_0}^{(q)}(f)$. Приклад 1 доведено.

1. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1951. — **15.** — С. 219-242.

2. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's Inequality // J. Approx. Theory. — 1999. — **99.** — P. 409-421.
3. *Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций // Мат. заметки. — 2008. — **83.** — С. 199-209.
4. *Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева. Дисс. ... к.ф.-м.н. — Саратов: СГУ, 1997.
5. *Дзюбенко Г. А.* Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій // Збірник праць Ін–ту математики НАН України. — 2008. — **5,** № 1. — С. 113-123.
6. *Залізко В. Д.* Коопукле наближення періодичних функцій // Укр. матем. журн. — 2007.— **59,** № 1. — С. 29-42.
7. *Залізко В. Д.* Контрприклад для коопуклого наближення періодичних функцій // Наукові записки: Зб. наук. ст. Нац. пед. ун–ту ім. М. П. Драгоманова Серія 1. Фіз.-мат. науки .—- 2006. № 6. —- С. 91—96.
8. *Попов П. А.* Один контрприклад в коопуклому наближенні періодичних функцій // Праці Ін–ту математики НАН України: Теорія наближення функцій та суміжні питання, — 2002. — **35.** — С. 113–118.
9. *Плешаков М. Г., Попов П. А.* Знакосохраняющее приближение периодических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — **55,** № 8. — С. 1087-1098.
10. *Плешаков М. Г., Попов П. А.* Второе неравенство Джексона в знакосохраняющем приближении периодических функций // Укр. мат. журн. — 2004. — **56,** № 1. — С. 123-128.
11. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J.* Copositive approximation of periodic functions // Acta Math. Hungar. — 2008. — **120,** № 4. — P. 301-314.
12. *Попов П. А.* Один контрприклад в знакозберігаючому наближенні періодичних функцій // Зб. праць Ін–ту математики НАН України: Проблеми теорії наближення фунуцій та суміжні питання. — 2005. — **2,** № 2. — С. 176–185.
13. *Шведов А. С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. — 1981. — **29,** № 1. — С. 117-130.
14. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. — 512 с.