УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін-т математики НАН України, Київ)

О. І. Черемшинська (Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Тернопіль)

ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Obtained here are the order estimates of linear widths of the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ and $2 \le p < q < \infty$.

Отримано порядкові оцінки лінійних поперечників класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ та $2 \le p < q < \infty$.

1. Вступ. У роботі досліджується поведінка лінійних поперечників класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у просторі L_q у випадках $1 < p \le 2$, $p/(p-1) < q < \infty$ і $2 \le p < q < \infty$. Детальніше про це мова буде йти пізніше, а спочатку наведемо основні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_d)$, $\mathrm{y} = (y_1, ..., y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + ... + x_dy_d$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0, 2\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}|f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x}\in\pi_d}|f(\mathrm{x})|.$$

Далі для зручностей позначень замість $L_p(\pi_d)$ будемо писати L_p.

Нехай $f \in L_p^0$, де

$$L_p^0 = \{f \in L_p : \int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{x}) dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}\}.$$

Для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, розглянемо різницю першого порядку по j-ій змінній з кроком h:

$$\Delta_{h,j} f(\mathrm{x}) = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_d) - f(\mathrm{x}),$$

і визначимо різницю порядку $l \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{h,j}^l f(\mathrm{x}) = \overbrace{\triangle_{h,j} \cdots \triangle_{h,j}}^{l} f(\mathrm{x})$$

по змінній x_j з кроком h.

Зауважимо, що її також можна означити за допомогою рівності

$$\Delta_{h,j}^l f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh, x_{j+1}, ..., x_d).$$

Тоді мішана різниця порядку $\mathrm{l} = \overbrace{(l, ..., l)}^{d}$, $l \in \mathbb{N}$, з векторним кроком $\mathrm{h} = (h_1, ..., h_d)$ означається наступним чином

$$\Delta_{\mathrm{h}}^{\mathrm{l}} f(\mathrm{x}) = \triangle_{h_1,1}^l \cdots \triangle_{h_d,d}^l f(\mathrm{x}).$$

Позначимо

$$\mathbb{R}_+^d = \{\mathrm{t} \in \mathbb{R}^d : \ t_j \ge 0, \ j = \overline{1,d}\}$$

і для $f \in L_p^0$ і $\mathrm{t} \in \mathbb{R}_+^d$ означимо мішаний модуль неперервності порядку l згідно з формулою

$$\Omega_{\mathrm{l}}(f, \mathrm{t})_p = \sup_{|h_j| \le t_j, j = \overline{1,d}} \|\Delta_{\mathrm{h}}^{\mathrm{l}} f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(\mathrm{t}) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку $\mathrm{l} = \overbrace{(l, ..., l)}^{d}$, $l \in \mathbb{N}$, тобто функція $\Omega(\mathrm{t})$ визначена на $\mathbb{R}^d_+$ і задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathrm{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ і $\Omega(\mathrm{t}) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathrm{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$;

3) $\Omega(m_1 t_1, ..., m_d t_d) \leq C_1 \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^{l} \Omega(\mathrm{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(\mathrm{t})$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{\mathrm{l},d}$. У випадку $d = 1$ будемо писати Ψ_l.

Далі будемо вважати, що Ω також належить множинам $S^{\alpha,d}$ і $S_{\mathrm{l},d}$. При $d = 1$ будемо писати відповідно S^{α} і S_l.

Будемо говорити, що невід'ємна функція $\varphi \in S^{\alpha}$, $\alpha > 0$, якщо функція $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \leq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}} \ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Невід'ємна функція $\varphi \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_3 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_3 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}} \ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Умова належності функції до множини S_l розглядалася вперше С. Б. Стєчкіним [1], а умова належності функції до множини S^{α} була введена по аналогії Н. К. Барі і С. Б. Стєчкіним [2]. Надалі ми будемо називати ці умови умовами Барі-Стєчкіна.

Будемо вважати, що $\Omega \in S^{\alpha,d}$ (відповідно $\Omega \in S_{\mathrm{l},d}$), якщо $\Omega(t_1, ..., t_d)$ як функція змінної t_j, $j = \overline{1, d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить множині S^{α} (відповідно множині S_l).

Позначимо $\Phi^d_{\alpha,\mathrm{l}} = \Psi_{\mathrm{l},d} \cap S^{\alpha,d} \cap S_{\mathrm{l},d}$. При $d = 1$ будемо писати $\Phi_{\alpha,l}$.

Наведемо далі приклад функції, яка належить множині $\Phi^d_{\alpha,l}$.

$$\Omega(\mathrm{t}) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j} \log_2^+(\frac{1}{t_j}), \ t_j > 0, j = \overline{1,d}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\alpha < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а $\log_2^+(t) = \max\{\log_2(t), 1\}$.

Нехай $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ і $1 \le p, \theta \le \infty$, тоді під класом функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ будемо розуміти [3]:

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B = \{f \in L^0_p : \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,\mathrm{t})_p}{\Omega(\mathrm{t})} \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \ 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\mathrm{t}>0} \frac{\Omega_l(f,\mathrm{t})_p}{\Omega(\mathrm{t})}, \qquad\qquad\qquad \theta = \infty. \end{cases}$$

Зауважимо, що у випадку коли $\mathrm{r} = (r_1, ..., r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, і $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ класи $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ співпадають з аналогами класів Бєсова $S^{\mathrm{r}}_{p,\theta}B$, які розглядалися у роботах [4] і [5]. Крім того, при $\theta = \infty$ класи $S^{\mathrm{r}}_{p,\infty}B = S^{\mathrm{r}}_{p}H$ є відомими аналогами класів Нікольського [6]. Класи $S^{\Omega}_{p,\infty}B = S^{\Omega}_{p}H$ розглядалися у роботі М.М. Пустовойтова [7].

Далі нам зручно буде користуватися означенням класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ в дещо іншому вигляді.

Для $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ через $\rho(\mathrm{s})$ позначимо підмножину цілочислової решітки $\mathbb{Z}^d$ вигляду

$$\rho(\mathrm{s}) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^d : \ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1,d}\}.$$

Покладемо для $f \in L^0_p$

$$\delta_{\mathrm{s}}(f, \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k} \in \rho(\mathrm{s})} \widehat{f}(\mathrm{k}) e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(\mathrm{k}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\mathrm{t}) e^{-i(\mathrm{k},\mathrm{t})} d\mathrm{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Отже, якщо $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і Ω — задана функція з множини $\Phi^d_{\alpha,l}$, то з точністю до абсолютних сталих класи $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ можна означити наступним чином:

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B = \left\{ f \in L^0_p : \ \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\mathrm{s}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathrm{s}}) \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|^{\theta}_p \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\mathrm{s}} \frac{\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

тут і надалі $\Omega(2^{-\mathrm{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ у (1) було розглянуто у роботі [3], а випадок $\theta = \infty$ — у роботі [7].

Наведене означення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ можна розповсюдити і на крайні випадки $p \in \{1, \infty\}$, дещо видозмінивши в (1) "блоки" $\delta_{\mathrm{s}}(f)$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_{\mathrm{s}}(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(\mathrm{x}) - V_{2^{s_j-1}}(\mathrm{x})), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d,$$

і для функції $f \in L^0_p$ розглянемо оператор виду

$$A_{\mathrm{s}}(f, \mathrm{x}) = f * A_{\mathrm{s}}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $" * "$ — операція згортки. Тоді при $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B = \left\{ f \in L_p : \ \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{\mathrm{s}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathrm{s}}) \, \|A_{\mathrm{s}}(f)\|_p^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{\mathrm{s}} \frac{\|A_{\mathrm{s}}(f)\|_p}{\Omega(2^{-\mathrm{s}})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Зазначимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ у (2) було розглянуто у роботі [8], а випадок $\theta = \infty$ — у роботі [7].

Зауважимо, що у роботі будуть розглядатися класи $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ з функцією Ω спеціального вигляду. Нехай ω — задана функція однієї змінної з множини $\Phi_{\alpha,l}$. Покладемо

$$\Omega(\mathrm{t}) = \omega\bigg(\prod_{j=1}^{d} t_j \bigg), \quad \mathrm{t} \in \mathbb{R}^d_+.$$

Зрозуміло, що таким чином задана функція Ω буде належати до множини $\Phi^d_{\alpha,\mathrm{l}}$.

Перейдемо тепер до означення досліджуваних апроксимативних характеристик.

Нехай W — центрально симетрична множина в банаховому просторі X, $\mathrm{Lin}_m(X)$ — множина всіх лінійних підпросторів L_m простору X, розмірність яких не більша, ніж m, $\mathcal{L}(X, L_m)$ — множина лінійних операторів, які відображають весь простір X у його підпростір $L_m \in \mathrm{Lin}_m(X)$. Тоді лінійний поперечник множини W в просторі X означається згідно з формулою

$$\lambda_m(W, X) = \inf_{L_m \in \mathrm{Lin}_m(X)} \inf_{A \in \mathcal{L}(X, L_m)} \sup_{f \in W} \|f - Af\|_X.$$

Поняття лінійного поперечника було введене В.М. Тихомировим у 1960 р. [9]. З історією дослідження лінійних поперечників можна ознайомитися в роботах Е. М. Галєєва [10, 11] та А. С. Романюка [12–14] та у монографіях [15], [16], в яких також міститься детальна бібліографія.

При одержанні оцінок знизу лінійних поперечників класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ будемо користуватися відомими оцінками колмогоровських поперечників дискретних множин. Нагадаємо, що колмогоровським поперечником центрально симетричної множини W банахового простору X

називається величина [17]

$$d_m(W,X) = \inf_{X_m \in \mathrm{Lin}_m(X)} \sup_{f \in W} \inf_{u \in X_m} \|f-u\|_X.$$

Легко бачити, що згідно з означеннями лінійного і колмогоровського поперечників має місце нерівність

$$d_m(W,X) \le \lambda_m(W,X). \tag{3}$$

Отримані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи $C_4,\ C_5 > 0$ такі, що $C_4 A \le B \le C_5 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають, що $C_6 A \le B$ і $B \le C_7 A$, $C_6, C_7 > 0$, відповідно. Всі константи C_i , $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

2. Допоміжні твердження. Перед формулюванням основних результатів наведемо твердження, які будемо використовувати при їх доведенні.

Нехай l^n_p означає простір всеможливих упорядкованих систем з n дійсних чисел, норма в якому означається таким чином

$$\|\mathrm{x}\|_{l^n_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le j\le n} |x_j|, & p = \infty, \end{cases}$$

і $B^n_p = \{\mathrm{x} : \|\mathrm{x}\|_{l^n_p} \le 1\}$ — одинична куля в цьому просторі.

Теорема A [18]. *Нехай $m < n$, $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Тоді*

$$\lambda_m(B^n_p,\ l^n_q) \asymp \max\left\{ n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\{1,\ n^{\frac{1}{q}} m^{-\frac{1}{2}}\} \sqrt{1-\frac{m}{n}} \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1$, $q > 2$ відповідний до теореми A результат випливає із твердження про колмогоровський поперечник октаедра B^n_1 в просторі l^n_q, встановленого Б.С. Кашиним [19].

Через $\mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ позначимо множину функцій f вигляду

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k}\in\rho(\mathrm{s})} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})},$$

де c_{k} — довільні числа.

Теорема Б [20]. *Між простором тригонометричних поліномів $\mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ і простором $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції $f \in \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$ вектор $\delta_{\mathrm{s}} f^j = \{f_{\mathrm{n}}(\tau_j)\} \in \mathbb{R}^{2^{(\mathrm{s},1)}}$*

$$f_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{sign} k_l = n_l} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{t})}, \quad l = \overline{1,d}, \ \mathrm{n} = (\pm 1, ..., \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, ..., \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, 2, ..., 2^{s_i - 1}, \ i = \overline{1,d},$$

і при цьому має місце співвідношення

$$\|f(\cdot)\|_p \asymp 2^{-(\mathrm{s},1)/p} \|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|_{l_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}}, \quad p \in (1, \infty).$$

При $d = 1$ теорема Б є відомою теоремою Марцинкевича-Зигмунда про дискретизацію [21, с. 46].

Теорема В (Літтлвуда–Пелі) [22]**.** *Нехай $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. Тоді існують додатні сталі C_8 і C_9 такі, що*

$$C_8 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{\mathrm{s}} |\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_9 \|f\|_p.$$

Як наслідок з означення лінійного поперечника, теореми В і теореми Літтлвуда-Пелі у роботі [10] записано наступне твердження.

Лема А. *Нехай $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ і $f \in \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$, $m_{\mathrm{s}} \in \mathbb{Z}_+$, $m_{\mathrm{s}} \le 2^{(\mathrm{s},1)}$. Якщо $1 < p, q < \infty$, то існує лінійний оператор $\Lambda_{m_{\mathrm{s}}} : \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s})) \to \mathcal{T}(\rho(\mathrm{s}))$, розмірність області значень якого не перевищує m_{s}, і такий, що*

$$\|f - \Lambda_{m_{\mathrm{s}}} f\|_q \asymp \lambda_{m_{\mathrm{s}}}(B_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}, l_q^{2^{(\mathrm{s},1)}}) 2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \|f\|_p.$$

Лема Б [23, с.25]. *Нехай $1 \le p < q < \infty$ і $f \in L_p$. Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_{\mathrm{s}} \left(\|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_p 2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \right)^q.$$

Лема В [10]. *Нехай* $1 < q < \infty$, $q_1 = \max\{q, 2\}$, $q_2 = \min\{q, 2\}$. *Тоді*

$$\left(\sum_{\mathrm{s}} \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_q^{q_1}\right)^{1/q_1} \ll \left\|\sum_{\mathrm{s}} \delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\right\|_q \ll \left(\sum_{\mathrm{s}} \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_q^{q_2}\right)^{1/q_2}.$$

Теорема Г [24]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, *і*

$$t(\mathrm{x}) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_{\mathrm{k}} e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d,$$

c_{k} — *довільні числа.*

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q - 1/p} \|t\|_q. \tag{4}$$

Нерівність (4) доведена С.М. Нікольським і має назву “нерівність різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [25].

Нехай знову X — банаховий простір і A — деяка підмножина цього простору. Полярою множини $A \subset X$ будемо називати наступну множину у спряженому просторі X^*:

$$A^{\circ} = \{x^* \in X^* : |\langle x, x^* \rangle| \le 1 \ \forall x \in A\},$$

де $\langle x, x^* \rangle$ — значення лінійного функціоналу x^* на елементі x.

Теорема Д [26]. *Нехай* BX *і* BY — *одиничні кулі в банахових просторах* X *і* Y *відповідно,* $(BX)^{\circ}$, $(BY)^{\circ}$ — *поляри цих множин, а простір* Y^* *вкладений в простір* X. *Тоді*

$$\lambda_m((BY)^{\circ}, X) = \lambda_m((BX)^{\circ}, Y).$$

Зауважимо, що якщо X — нормований простір (не банаховий), то означення поляри і теорема Д мають дещо інший вигляд. Більш детально з цими питаннями можна ознайомитися у роботах [26] і [27].

Через $l_{p,q}^{n,m}$, $1 \le p, q \le \infty$, $n, m \in \mathbb{N}$, будемо позначати нормований простір елементів з простору $\mathbb{R}^{nm}$, норма в якому означається наступним чином

$$\|\mathrm{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=1}^{m} \left(\sum\limits_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, & 1 \le p, q < \infty, \\ \max\limits_{1 \le s \le m} \left(\sum\limits_{k \in \Delta_s} |x_k|^p \right)^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

де $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} : (s-1)n < k \le sn\}$, $s = \overline{1, m}$. Відповідно, $B_{p,q}^{n,m} = \{\mathrm{x} : \|\mathrm{x}\|_{l_{p,q}^{n,m}} \le 1\}$ — одинична куля в просторі $l_{p,q}^{n,m}$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_{l_{p,p}^{n,m}} \equiv \|\cdot\|_{l_p^{nm}}$, $1 \le p \le \infty$.

Теорема E [28]. *Нехай $N \le mn/2$. Тоді існує додатна стала C_{10} така, що справедливі нерівності*

$$C_{10} m \frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \le d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,1}^{n,m}) \le m.$$

Тут і далі під log будемо розуміти логарифм за основою 2.

3. Основні результати. Має місце наступна

Теорема 1. *Нехай $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, де $1/p + 1/p' = 1$, а функція $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1 - 1/q$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $q < \theta < \infty$ має місце порядкове співвідношення*

$$\frac{\sqrt{\log \log m}}{\log m} \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} \ll \lambda_M(S_{p,\theta}^{\Omega} B, L_q) \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m}) 2^{m(1/2-1/q)} m^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}, \qquad (5)$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Задамо $M \in \mathbb{N}$ і підберемо $m \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалася умова $2^m m^{d-1} \asymp M$.

Для $\mathrm{s} \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$m_{\mathrm{s}} = \begin{cases} 2^{(\mathrm{s},1)}, & (\mathrm{s}, 1) \le m, \\ [2^{m+\beta(m-(\mathrm{s},1))}], & (\mathrm{s}, 1) > m, \end{cases}$$

де $\beta > 0$ — довільне достатньо мале число, значення якого ми уточнимо пізніше.

Покажемо, що $\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} m_s \ll M$. Справді

$$\sum_{s\in\mathbb{N}^d} m_s \le \sum_{(s,1)\le m} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,1)>m} 2^{m+\beta(m-(s,1))} =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{(s,1)=j} 2^{(s,1)} + 2^{m+\beta m}\sum_{j>m}\sum_{(s,1)=j} 2^{-\beta(s,1)} =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} 2^j \sum_{(s,1)=j} 1 + 2^{m+\beta m}\sum_{j>m} 2^{-\beta j}\sum_{(s,1)=j} 1. \qquad (6)$$

Враховуючи те, що

$$\sum_{(s,1)=j} 1 \asymp j^{d-1}, \qquad (7)$$

з (6) отримуємо

$$\sum_{s\in\mathbb{N}^d} m_s \ll \sum_{j=1}^{m} 2^j j^{d-1} + 2^{m+\beta m}\sum_{j>m} 2^{-\beta j} j^{d-1} \ll$$

$$\ll 2^m m^{d-1} + 2^{m+\beta m} 2^{-\beta m} m^{d-1} \asymp 2^m m^{d-1} \asymp M.$$

Нехай f — довільна функція з класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$. Через Λ_M позначимо лінійний оператор рангу M, який діє на f за формулою

$$\Lambda_M f = \sum_{s} \Lambda_{m_s}\delta_s(f),$$

де оператори Λ_{m_s} визначені згідно з лемою А.

Оцінимо далі норму $\|f-\Lambda_M f\|_q$. Послідовно застосувавши лему Б з заміною індекса p на p' і лему А, будемо мати

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)>m}\left(\|\delta_s(f)-\Lambda_{m_s}\delta_s(f)\|_{p'} 2^{(s,1)(1/p'-1/q)}\right)^q\right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \lambda_{m_s}(B_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}, l_{p'}^{2^{(\mathrm{s},1)}}) \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{J}_1.$$

Врахувавши, що згідно з теоремою А при $m_{\mathrm{s}} < 2^{(\mathrm{s},1)}$ має місце співвідношення

$$\lambda_{m_{\mathrm{s}}}(B_p^{2^{(\mathrm{s},1)}}, l_{p'}^{2^{(\mathrm{s},1)}}) \asymp$$

$$\asymp \max\left\{ 2^{(\mathrm{s},1)(1/p'-1/p)}, \min\{1, 2^{(\mathrm{s},1)/p'} m_{\mathrm{s}}^{-1/2}\} \sqrt{1 - \frac{m_{\mathrm{s}}}{2^{(\mathrm{s},1)}}} \right\} \leq$$

$$\leq \max\{2^{(\mathrm{s},1)(1/p'-1/p)}, 2^{(\mathrm{s},1)/p'} m_{\mathrm{s}}^{-1/2} \sqrt{1 - \frac{m_{\mathrm{s}}}{2^{(\mathrm{s},1)}}}\} \ll 2^{(\mathrm{s},1)/p'} m_{\mathrm{s}}^{-1/2},$$

продовжимо оцінку $\mathcal{J}_1$ таким чином:

$$\mathcal{J}_1 \ll \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1/p-1/q)} \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p 2^{(\mathrm{s},1)/p'} m_{\mathrm{s}}^{-1/2} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q)} \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p m_{\mathrm{s}}^{-1/2} \right)^q \right)^{1/q} = \mathcal{J}_2.$$

Підставивши в $\mathcal{J}_2$ замість m_{s} їх значення, будемо мати

$$\mathcal{J}_2 \leq \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q)} \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p 2^{-m/2-\beta/2(m-(\mathrm{s},1))} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\beta m/2} \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q+\beta/2)} \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\beta m/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\mathrm{s},1)>m} \left(2^{(\mathrm{s},1)(1-1/q+\beta/2)} \omega(2^{-(\mathrm{s},1)}) \omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)}) \|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-m/2} 2^{-\beta m/2} \times$$

$$\times\Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m}\bigg(2^{-(\mathrm{s},1)(\alpha-1+1/q-\beta/2)}\frac{\omega(2^{-(\mathrm{s},1)})}{2^{-\alpha(\mathrm{s},1)}}\omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p\bigg)^q\Bigg)^{1/q}=\mathcal{J}_3.$$

Оскільки $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>1-1/q$, то при $(\mathrm{s},1)>m$ буде виконуватись порядкова нерівність

$$\frac{\omega(2^{-(\mathrm{s},1)})}{2^{-(\mathrm{s},1)\alpha}}\ll\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}.$$

Врахувавши останнє співвідношення, отримаємо

$$\mathcal{J}_3\ll 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m}\bigg(2^{-(\mathrm{s},1)(\alpha-1+1/q-\beta/2)}\omega^{-1}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p\bigg)^q\Bigg)^{1/q}=\mathcal{J}_4.$$

Далі виберемо параметр β з умови $\alpha-1+1/q-\beta/2>0$ (це можливо зробити, оскільки за умовою теореми $\alpha>1-1/q$). Тоді застосувавши до $\mathcal{J}_4$ нерівність Гельдера

$$\sum_k|a_kb_k|\le\Big(\sum_k|a_k|^r\Big)^{1/r}\Big(\sum_k|b_k|^{r'}\Big)^{1/r'},\quad 1/r+1/r'=1,$$

де $a_k,\ b_k$ — довільні числа, з параметром $r=\theta/q$, отримаємо

$$\mathcal{J}_4\le 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}\Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m}\omega^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p^\theta\Bigg)^{1/\theta}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{(\mathrm{s},1)>m}2^{-(\mathrm{s},1)(\alpha-1+1/q-\beta/2)\frac{\theta q}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}\ll$$

$$\ll 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{j>m}\sum_{(\mathrm{s},1)=j}2^{-(\mathrm{s},1)(\alpha-1+1/q-\beta/2)\frac{\theta q}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}\ll$$

$$\ll 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}\left(\sum_{j>m}2^{-j(\alpha-1+1/q-\beta/2)\frac{\theta q}{\theta-q}}\sum_{(\mathrm{s},1)=j}1\right)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}.$$

Враховуючи співвідношення (7), продовжимо оцінку $\mathcal{J}_4$:

$$\mathcal{J}_4 \ll 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}\left(\sum_{j>m}2^{-j(\alpha-1+1/q-\beta/2)\frac{\theta q}{\theta-q}}j^{d-1}\right)^{\frac{\theta-q}{\theta q}} \ll$$

$$\ll 2^{-m/2}2^{-\beta m/2}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-m\alpha}}2^{-m(\alpha-1+1/q-\beta/2)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)} =$$

$$= \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

Таким чином, враховуючи отриману порядкову нерівність

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)},$$

згідно з означенням лінійного поперечника отримуємо оцінку зверху у співвідношенні (5).

Перейдемо тепер до встановлення оцінки знизу. Зауважимо, що оскільки при $p \le 2$ має місце вкладення $S^{\Omega}_{p,\theta}B \supseteq S^{\Omega}_{2,\theta}B$, то її достатньо встановити для випадку $p=2$. Для $M \in \mathbb{N}$ виберемо число $m \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалося співвідношення $2^m m^{d-1} \asymp M$ і кількість елементів множини $Q_m = \bigcup\limits_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\rho(\mathrm{s})$, де $\Theta_m = \{\mathrm{s}\in\mathbb{N}^d : (\mathrm{s},1)=m\}$, була не менша ніж $2M$.

Позначимо через $\mathcal{T}_m$ множину функцій

$$\mathcal{T}_m = \{f : f = \sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\delta_{\mathrm{s}}(f)\}$$

і нехай P_m оператор ортогонального проектування на цю множину. Тоді згідно з означенням лінійного поперечника

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \ge \lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B\cap\mathcal{T}_m, L_q). \tag{8}$$

З іншого боку, для $t\in\mathcal{T}_m$

$$\|f-t\|_q \ge \|P_m(f-t)\|_q = \|P_m f - t\|_q. \tag{9}$$

Врахувавши (8) і (9), отримаємо

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \geq \lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m, L_q \cap \mathcal{T}_m). \tag{10}$$

Для функції $f \in S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m$ згідно з теоремою Б будемо мати

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{2,\theta}B} = \Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m} \omega^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_2^{\theta}\Bigg)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m} \omega^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})2^{-(\mathrm{s},1)\theta/2}\|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|^{\theta}_{l_2^{2^{(\mathrm{s},1)}}}\Bigg)^{1/\theta} =$$

$$= \omega^{-1}(2^{-m})2^{-m/2}\Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\Bigg(\sum_{j=1}^{2^{(\mathrm{s},1)}} |\delta_{\mathrm{s}} f^j|^2\Bigg)^{\theta/2}\Bigg)^{1/\theta}. \tag{11}$$

Згідно з (11) $f \in S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m$ тоді і тільки тоді, коли $\|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|_{l_{2,\theta}^{2^m,|\Theta_m|}} \ll \omega(2^{-m})2^{m/2}$. Тут і далі під $|\mathfrak{N}|$ будемо розуміти кількість елементів множини $\mathfrak{N}$. Отже одиничній кулі з $S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m$ ставиться у відповідність куля радіуса $C_{11}\omega^{-1}(2^{-m})2^{-m/2}$, $C_{11} > 0$, з простору $l_{2,\theta}^{2^m,|\Theta_m|}$.

З іншого боку, для $f \in L_q \cap \mathcal{T}_m$, використовуючи послідовно лему В і теорему Б, можемо записати

$$\|f\|_q = \Bigg\|\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\delta_{\mathrm{s}}(f)\Bigg\|_q \gg \Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_q^q\Bigg)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m} 2^{-(\mathrm{s},1)}\|\delta_{\mathrm{s}} f^j\|^q_{l_q^{2^{(\mathrm{s},1)}}}\Bigg)^{1/q} = 2^{-m/q}\Bigg(\sum_{\mathrm{s}\in\Theta_m}\sum_{j=1}^{2^{(\mathrm{s},1)}} |\delta_{\mathrm{s}} f^j|^q\Bigg)^{1/q}. \tag{12}$$

Із (12) випливає, що між нормами функцій із $L_q \cap \mathcal{T}_m$ і нормами відповідних елементів з $l_q^{2^m|\Theta_m|}$ виконується співвідношення

$$\|\cdot\|_q \gg 2^{-m/q}\|\cdot\|_{l_q^{2^m|\Theta_m|}}. \tag{13}$$

Таким чином, згідно з (10), (11) і (13) будемо мати

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \geq \lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m, L_q \cap \mathcal{T}_m) \gg$$
$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}\lambda_M(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\theta}, l^{2^m|\Theta_m|}_q). \qquad (14)$$

Далі нам знадобляться деякі співвідношення. З нерівності про середнє степеневе будемо мати

$$|\Theta_m|^{-1/\theta}\|\cdot\|_{l^{|\Theta_m|}_\theta} \leq \|\cdot\|_{l^{|\Theta_m|}_\infty}.$$

Звідси має місце нерівність

$$\|\cdot\|_{l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\theta}} \leq |\Theta_m|^{1/\theta}\|\cdot\|_{l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty}},$$

а отже і вкладення

$$|\Theta_m|^{-1/\theta}B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty} \subset B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\theta}. \qquad (15)$$

З іншого боку, знову ж таки за нерівністю про середнє степеневе будемо мати

$$\|\cdot\|_{l^{|\Theta_m|}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{|\Theta_m|}_1}|\Theta_m|^{1/q-1}, \quad q \geq 1.$$

Врахувавши також, що при $q \leq \infty$

$$\|\cdot\|_{l^{2^m}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{2^m}_\infty},$$

отримаємо

$$\|\cdot\|_{l^{2^m|\Theta_m|}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}}|\Theta_m|^{1/q-1}. \qquad (16)$$

Прийнявши до уваги відомі співвідношення

$$\left(l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}\right)^* = l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty}, \quad \left(l^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}\right)^* \supseteq l^{2^m,|\Theta_m|}_{1,\infty}, \qquad (17)$$

згідно з означенням поляри множини будемо мати

$$\left(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}\right)^\circ = B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty}, \quad \left(B^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}\right)^\circ \supseteq B^{2^m,|\Theta_m|}_{1,\infty}. \qquad (18)$$

З (17), (18), теореми Д та означення лінійного поперечника отримуємо

$$\lambda_m(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}) = \lambda_m\left(\left(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}\right)^{\circ}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}\right) =$$

$$= \lambda_m\left(\left(B^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}\right)^{\circ}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}\right) \geq \lambda_m(B^{2^m,|\Theta_m|}_{1,\infty}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}) \qquad (19)$$

З (14), використовуючи (15), (16) і (19), будемо мати

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \geq \lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B \cap \mathcal{T}_m, L_q \cap \mathcal{T}_m) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}\lambda_M(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\theta}, l^{2^m|\Theta_m|}_{q}) \geq$$

$$\geq \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|\Theta_m|^{1/q-1/\theta-1}\lambda_M(B^{2^m,|\Theta_m|}_{2,\infty}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{\infty,1}) \geq$$

$$\geq \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|\Theta_m|^{1/q-1/\theta-1}\lambda_M(B^{2^m,|\Theta_m|}_{1,\infty}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}). \qquad (20)$$

Використавши нерівність (3) та теорему Е, із співвідношення (20) отримаємо

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|\Theta_m|^{1/q-1/\theta-1}d_M(B^{2^m,|\Theta_m|}_{1,\infty}, l^{2^m,|\Theta_m|}_{2,1}) \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}|\Theta_m|^{1/q-1/\theta-1}|\Theta_m|\frac{\sqrt{\log\log|\Theta_m|}}{\log|\Theta_m|}.$$

Оскільки зі співвідношення (7) випливає, що $|\Theta_m| \asymp m^{d-1}$, то останню оцінку продовжимо наступним чином

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{2,\theta}B, L_q) \gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}\frac{\sqrt{\log\log m^{d-1}}}{\log m^{d-1}} \gg$$

$$\gg \omega(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m},$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p < q < \infty$, *а функція* $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p - 1/q$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $q < \theta < \infty$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m}\omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)} \ll \lambda_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_q) \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}, \tag{21}$$

де $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Доведення. Оцінка зверху в (21) випливає з оцінок наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ їх східчасто гіперболічними сумами Фур'є [3], тобто поліномами вигляду

$$S_{Q_m}(f, \mathrm{x}) = \sum_{(\mathrm{s},1)<m} \delta_{\mathrm{s}}(f, \mathrm{x}),$$

де $Q_m = \bigcup\limits_{(\mathrm{s},1)<m} \rho(\mathrm{s})$ — східчасто гіперболічний хрест і число m підібрано таким чином, щоб $M \asymp 2^m m^{d-1}$.

Для встановлення в (21) оцінки знизу скористаємося результатами теореми 1. Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $2 \le p < \infty$. Тоді з теореми Г будемо мати

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \left(\sum_{\mathrm{s}} \omega^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_{\mathrm{s}} \omega^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})2^{(\mathrm{s},1)(1/2-1/p)\theta}\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} =$$

$$\le \left(\sum_{\mathrm{s}} \omega_1^{-\theta}(2^{-(\mathrm{s},1)})\|\delta_{\mathrm{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} = \|f\|_{S^{\Omega_1}_{2,\theta}B},$$

де $\Omega_1(\mathrm{t}) = \omega_1\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{1/2-1/p}$ — функція з множини $\Phi_{\alpha_1,l+1}$, $\alpha_1 = \alpha + (1/2 - 1/p) > 1/2 - 1/q$.

Звідси має місце вкладення

$$S^{\Omega_1}_{2,\theta}B \subset S^{\Omega}_{p,\theta}B. \tag{22}$$

Оскільки оцінка знизу в теоремі 1 є справедливою і для $\alpha > 1/2 - 1/q$, то, використавши (22), (5) і означення лінійного поперечника, будемо мати

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_q) \geq \lambda_M(S^{\Omega_1}_{2,\theta}B, L_q) \gg$$

$$\gg \omega_1(2^{-m})2^{m(1/2-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m} =$$

$$= \omega(2^{-m})2^{m(1/p-1/q)}m^{(d-1)(1/q-1/\theta)}\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m}.$$

Теорему доведено.

На завершення роботи наведемо деякі зауваження.

***Зауваження* 1.** При $\Omega(\mathrm{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, результати теорем 1 і 2 встановлено у роботі [29].

***Зауваження* 2.** Порядкові оцінки лінійних поперечників $\lambda_M(S^{\mathrm{r}}_pH, L_q)$ для співвідношень між параметрами p та q, розглянутих у теоремах 1 і 2, отримано у роботі [11]. На класи S^{Ω}_pH відповідні результати були поширені у роботі [30]. При цьому для цих класів функцій, так само, як і для класів $S^{\mathrm{r}}_{p,\theta}B$ (відповідно $S^{\Omega}_{p,\theta}B$), верхня і нижня оцінки відрізняються на "логарифмічний" множник. Для тих же p і q та $2 \leq \theta \leq q$ вдалося встановити точні за порядком оцінки лінійних поперечників $\lambda_M(S^{\mathrm{r}}_{p,\theta}B, L_q)$ [13], а також лінійних поперечників $\lambda_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_q)$ [31].

***Зауваження* 3.** При $d = 1$ відомі точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ для $1 \leq \theta \leq \infty$:

$$\lambda_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_q) \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-1})M^{1/2-1/q}, & 1 < p \leq 2, p' < q < \infty, \\ \Omega(M^{-1})M^{1/p-1/q}, & 2 \leq p < q < \infty. \end{cases} \tag{23}$$

При $2 \leq \theta \leq q$ оцінку (23) було отримано у роботі [31], при всіх інших θ — у роботі [32] . Для класів $S^{r}_{p,\theta}B$ при $1 \leq \theta < \infty$ відповідні порядкові оцінки встановлено у роботі [14], при $\theta = \infty$ — в [11].

1. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. сер. матем. — 1951. — **15**. — С. 219 – 242.
2. *Бари Н.К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

3. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. МИАН СССР. — 1997. — **219**. — P. 356 – 377.
4. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{(r)}_{p^*,\theta}$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, ..., n)$. // Тр. МИАН СССР. — 1965. — **77**. — P. 5 – 34.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. — 1989. — **187**, №3. — С. 143 – 161.
6. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. — 1963. — **4**, №6. — С. 1342 – 1364.
7. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35 – 48.
8. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.
9. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, №3. — С. 81 – 120.
10. *Галеев Э. М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестник МГУ, Сер. 1, Мат., Мех. — 1987. — **4**. — С. 13 – 16.
11. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера-Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996. — **59**, №2. — С. 189 – 199.
12. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №5. — С. 647 – 661.
13. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №6. — С. 820 – 829.
14. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — С. 181 – 213.
15. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления, ВИНИТИ. — 1987. — **14**. — С. 103 – 260.
16. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

17. *Kolmogoroff A.* Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse // Ann. of Math. — 1963. — **37**, №1. — C. 107 – 110.
18. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — **120**, №2. — С. 180 – 189.
19. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.). — 1980. — **15**, №5. — С. 379 – 394.
20. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}$ и $\widetilde{H}_p^{\bar{\alpha}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР (сер. мат.). — 1985. — **49**, №5. — С. 916 – 934.
21. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т.— М.: Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
22. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969. — 480 с.
23. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. — 1986. — **178**. — С. 3 – 113.
24. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.
25. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, №12. — P. 889 – 906.
26. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161 – 178.
27. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — **23**, №6. — С. 51 – 116.
28. *Изаак А. Д.* Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. — 1994. — **55**, №1. — С. 43–52.
29. *Романюк А. С.* К вопросу о линейных поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №7. — С. 970 – 982.
30. *Дерев'янко Н. В.* Оцінки лінійних поперечників класів H_p^{Ω} періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 128 – 145.
31. *Федуник О. В.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №1. — С. 93 – 104.
32. *Конограй А. Ф.* Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 94 – 112.