Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 125-137

УДК 517.5

В. А. Войтович (Ін–т математики НАН України, Київ)
А. П. Мусієнко (Державний університет телекомунікацій, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛЕБЕГА ДЛЯ іНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ АНАЛОГІВ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА МНОЖИНАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain estimates of of deviations of interpolation analogues of de la Valle Poussin sums from the functions that belong to the sets $C^\psi_\beta C$ and are represented through the best approximations of (ψ,β)-derivatives of these functions by trigonometric polynomials in the uniform metric.

Знайдено оцінки відхилень інтерполяційних аналогів сум Валле Пуссена від функцій з множин $C^\psi_\beta C$, які виражаються через найкращі наближення (ψ,β)-похідних цих функцій в рівномірній метриці.

Позначимо через $L = L_1$ — простір сумовних на $(0, 2\pi)$ 2π–періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt,$$

$L_\infty = M$ — простір вимірних, істотно обмежених 2π–періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|,$$

C — простір неперервних 2π–періодичних функцій f з нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Нехай далі $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L^0_1 = \{\varphi \in L_1 : \varphi \perp 1\}$ клас 2π–періодичних неперервних функцій $f(f \in C)$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) := \mathcal{J}_\beta^\psi \varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\Psi_\beta(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \quad (1)$$

з фіксованим ядром $\Psi_\beta(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S\left[\Psi_\beta\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \ \psi(k) > 0, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Функції виду (1) називають (ψ,β)-інтегралами функції φ. При цьому функцію φ називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають f_β^ψ. Множину всіх неперервних функцій, для яких існує (ψ,β)-похідна, позначають через C_β^ψ. Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і, крім того, $(\psi,\beta) \in \mathfrak{N}$, то пишуть $f \in C_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Класи $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ введені О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 25–35], [2, с. 131–142]).

Послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, можна вважати звуженням на множину натуральних чисел деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргумента $t \geq 1$. Множину всіх опуклих донизу при $t \geq 1$ функцій $\psi(t)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, позначають через $\mathfrak{M}$. Згідно з [2, с. 160], кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ можна поставити у відповідність пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ та $\mu(t) = \mu(\psi;t)$ за допомогою формул

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де $\psi^{-1}(\cdot)$ — функція, обернена до $\psi(\cdot)$. Через $\mathfrak{M}_\infty^+$ позначають підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ монотонно зростає і не обмежена зверху. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то, як показано в [1, с. 97], функція $\psi(t)$ спадає до нуля швидше довільної степеневої функції, тобто:

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = 0.$$

Це означає, що за умови $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, ряд Фур'є довільної функції f із $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ можна диференціювати довільне число разів і в результаті будуть одержуватися рівномірно збіжні ряди. Отже, класи $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ складаються із нескінченно диференційовних функцій.

Нехай $f(x)$ — довільна неперервна 2π–періодична функція. Через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_{n-1}\left(f; x_k^{(n-1)}\right) = f\left(x_k^{(n-1)}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Інтерполяційний тригонометричний поліном $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$, можна записати наступним чином (див., наприклад, [3, с. 10]):

$$\widetilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx\right), \qquad (2)$$

де

$$a_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f\left(x_j^{(n-1)}\right)\cos kx_j^{(n-1)}, k = 0, 1, ..., n, \qquad (3)$$

$$b_k^{(n-1)} = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f\left(x_j^{(n-1)}\right)\sin kx_j^{(n-1)}, k = 1, 2, ..., n, \qquad (4)$$

коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f по системі вузлів $x_k^{(n-1)}$.

Поліноми

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2}\lambda_0^{(n,p)} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n,p)}\left(a_k^{(n-1)}\cos kx + b_k^{(n-1)}\sin kx\right), \qquad (5)$$

де

$$\lambda_k^{(n,p)} = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p+1 \leqslant k \leqslant n, \end{cases} \quad n, p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n, \qquad (6)$$

а $a_k^{(n-1)}$ і $b_k^{(n-1)}$ означені згідно з формулами (3) та (4) відповідно, називають інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена з параметрами n та p. При $p = 1$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з інтерполяційними тригонометричними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$. У випадку

$p = n$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ перетворюються в інтерполяційні суми Феєра $\widetilde{\sigma}_{n-1}(f;x)$ порядку $n-1$

$$\widetilde{\sigma}_{n-1}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x),$$

де $\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x)$ — частинні суми інтерполяційних поліномів $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$

$$\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{j=1}^{k}\left(a_j^{(n-1)}\cos jx + b_j^{(n-1)}\sin jx\right).$$

У загальному випадку інтерполяційні суми Валле Пуссена виражаються через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ у вигляді

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x).$$

Зауважимо, що звичайні суми Валле Пуссена з параметрами n та p, побудовані на основі частинних сум Фур'є $S_k(f;x)$, задаються аналогічним співвідношенням:

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_k(f;x).$$

Дослідження апроксимативних характеристик сум $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ та $V_{n,p}(f;x)$ на різноманітних множинах періодичних функцій бере свій початок з робіт Валле Пуссена [4], С. Н. Бернштейна [5], С. М. Нікольського [6], О. П. Тімана [7] (див. коментарі та бібліографію [1, 8–11]).

Мета даної роботи полягає у знаходженні асимптотично непокращуваних нерівностей для величин

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| = |f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)|, \tag{7}$$

при довільних $x \in \mathbb{R}$, у випадках, коли $f \in C_\beta^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\beta \in \mathbb{R}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$ класи C^{ψ}_{β} є відомими класами W^r (див. [1, с. 26]). Для таких класів функцій С. М. Нікольський [6, с. 216], при $p = 1$, встановив наступну нерівність:

$$|\widetilde{\rho}_{n,1}(f;x)| \le \left(\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\ln n + O(1)\right)E_n(f)_C, \tag{8}$$

де $E_n(f)_C = \inf\limits_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C$ — найкраще наближення функції $f \in C$ в метриці простору C тригонометричними поліномами порядку не вище, ніж $n-1$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n та x.

Пізніше І. М. Ганзбург [12, с. 495] узагальнив оцінку (8) на випадок сум $\widetilde{V}_{n,p}$, а саме: ним було встановлено, що при $0 \le p \le n\theta$ $(0 < \theta < 1)$, має місце нерівність

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| \le \left(\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\ln\frac{n}{p} + O(1)\right)E_{n-p+1}(f)_C, \tag{9}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно n, p та x.

Що стосується класів $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, то при $p = 1$, (тобто, коли поліноми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з інтерполяційними тригонометричними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$) нерівності типу Лебега було встановлено в роботах [13, 14]. Для довільних $p = 1, 2, \ldots, n$ дана задача була розв'язана лише у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ спадає до нуля швидше за довільну геометричну прогресію [15]. Наступна теорема містить асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега, при умові $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p = p(n)$ *— довільна послідовність дійсних чисел, така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{\eta(n)-n} = 0$. *Тоді при* $n \in \mathbb{N}$ *для будь-якої функції* $f \in C^{\psi}_{\beta}C$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *справджується нерівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| \le \left(\frac{8}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\ln\frac{\eta(n)-n}{p} + \right.$$

$$\left. +O(1)\left(\psi(n) + \psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C, \tag{10}$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, p, β, x *і* $f \in C^{\psi}_{\beta}C$.

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\beta}$ *і довільних* $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ *в множині* C^{ψ}_{β} *знайдеться функція* $F(x) = F(f; n; p; x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta}) = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})$, *і для неї при виконується рівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(F;x)| = \left(\frac{8}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\psi(n)\ln\frac{\eta(n)-n}{p} + \right.$$

$$\left. +O(1)\left(\psi(n) + \psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right)\right) E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_C, \qquad (11)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, p, β, x *і* $f \in C^{\psi}_{\beta}C$.

Доведення. У роботі [16] показано, що коли $f \in C^{\psi}_{\beta}$, має місце рівність

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \frac{2}{\pi p}\sin\frac{2n-1}{2}x\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\times$$

$$\times\cos\left(kt + \frac{2n-1}{2}x + \frac{(\beta-1)\pi}{2}\right)dt +$$

$$+I^{(1)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) + I^{(2)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) + I^{(3)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) =$$

$$= 2\sin\frac{2n-1}{2}x\ \rho_{n,p}(F_x;x) + I^{(1)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) + I^{(2)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) + I^{(3)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x), \quad (12)$$

де

$$\delta_m(\tau) := f^{\psi}_{\beta}(\tau) - t_m(\tau),$$

$$\rho_{n,p}(f;x) := f(x) - V_{n,p}(f;x),$$

$$F_x(\cdot) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+\cdot)\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt + \frac{2n-1}{2}x + \frac{(\beta-1)\pi}{2}\right)dt,$$

а

$$I^{(1)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x) :=$$

$$= \frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{k=m+1}^{m+p-1} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \tag{13}$$

$$I^{(2)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) :=$$

$$= \frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{k=2n+m}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + (2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \tag{14}$$

$$I^{(3)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) :=$$

$$= -\frac{1}{\pi p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_{n-p}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{k=\nu(2n-1)-m}^{\nu(2n-1)+m} \psi(k) \cos(kt + (2n-1)\nu x + \frac{\beta\pi}{2}) dt. \tag{15}$$

Також, в роботі [16] було показано, що

$$\left| I^{(1)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) \right| = O(1)\psi(n-p+1) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C. \tag{16}$$

У роботі [9, с. 182] встановлено, що для довільної $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ має місце оцінка

$$\frac{1}{2} \le \frac{\eta(n) - n}{n - \eta^{-1}(n)} \le K_1, \tag{17}$$

де K_1 — константа, що не залежить від n, а $\eta^{-1}(\cdot)$ — функція обернена до $\eta(\cdot)$. На основі формули (17) легко бачити, що для всіх p, таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{\eta(n)-n} = 0$ має місце включення

$$p \in [1; n - \eta^{-1}(n) + 1]. \tag{18}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $p \in \left[1; n - \eta^{-1}(n) + 1\right]$, то в силу формули (3.2.84) роботи [9] $\psi(n-p+1) = O(1)\psi(n)$. Отже

$$\left| I^{(1)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) \right| = O(1)\psi(n) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C. \tag{19}$$

Далі оцінимо порядок спадання до нуля величини $\left| I^{(2)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) \right|$ при $n \to \infty$. У роботі [16] було показано, що

$$I^{(2)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta}; x) = \rho_{3n-1,p}(F^{(1)}_{x}; x), \tag{20}$$

де $F_x^{(1)}(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(\cdot + t) \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \gamma_1) dt$, а
$\gamma_1 = \gamma_1(n, x, \beta) := (2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}$.

З теореми 1 роботи [17] випливає зокрема, що при виконанні умов $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{p}{\eta(m)-m} = 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \le m$, $m \in \mathbb{N}$ для будь–якої функції g з класу $C_\alpha^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|\rho_{m,p}(g; x)| = O(1)\psi(m) \ln \frac{\eta(m)-m}{p} E_{m-p+1}(g_\beta^\psi)_C. \tag{21}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то з (20), (21) і з леми 2 роботи [18, с. 456] випливає, що

$$\left| I_{n,p}^{(2)}(f_\beta^\psi; x) \right| = O(1)\psi(3n-1) \ln \frac{\eta(3n-1)-(3n-1)}{p} E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_C =$$

$$= O(1)\psi(3n-1) \ln \frac{\eta(n)-n}{p} E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_C. \tag{22}$$

Перейдемо до оцінки величини $\left| I_{n,p}^{(3)}(f_\beta^\psi; x) \right|$. В роботі [16] показано, що має місце наступна рівність:

$$-I_{n,p}^{(3)}(f_\beta^\psi; x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \Big(\rho_{\nu(2n-1)-n+p,p}(F_{x;\nu}^{(2)}; x) - \rho_{\nu(2n-1)+n,p}(F_{x;\nu}^{(2)}; x) \Big), \tag{23}$$

де $F_{x,\nu}^{(2)}(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+\cdot) \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt+\gamma_\nu) dt$, а $\gamma_\nu := (2n-1)\nu x + \frac{\beta\pi}{2}$.

Із зображення (23) з урахуванням оцінки (21), отримаємо

$$\left| I_{n,p}^{(3)}(f_\beta^\psi; x) \right| = O(1) \sum_{\nu=2}^{\infty} \Bigg(\psi(\nu(2n-1)-n+p) \times$$

$$\times \ln \frac{\eta(\nu(2n-1)-n+p) - (\nu(2n-1)-n+p)}{p} E_{\nu(2n-1)-n+1}(f_\beta^\psi)_C +$$

$$+ \psi(\nu(2n-1)+n) \ln \frac{\eta(\nu(2n-1)+n) - (\nu(2n-1)+n)}{p} \times$$

$$\times E_{\nu(2n-1)+n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C\Bigg) =$$

$$= O(1)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C\sum_{\nu=2}^{\infty}\Bigg(\psi(\nu(2n-1)-n+p)\times$$

$$\times \ln\frac{\eta(\nu(2n-1)-n+p)-(\nu(2n-1)-n+p)}{p}\Bigg) \qquad (24)$$

В роботі [16] встановлено, що справедлива оцінка

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\Bigg(\psi(\nu(2n-1)-n+p)\times$$

$$\times \ln\frac{\eta(\nu(2n-1)-n+p)-(\nu(2n-1)-n+p)}{p}\Bigg) =$$

$$= O(1)\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(3n-1)-(3n-1)}{p}. \qquad (25)$$

Із (24), (25), враховуючи лему 2 [18, c. 456], отримаємо, що

$$\left|I^{(3)}_{n,p}(f^{\psi}_{\beta};x)\right| = O(1)\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C. \qquad (26)$$

На основі інтегрального зображення (12) та оцінок (19), (22) та (26) робимо висновок, що має місце рівність

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\times$$

$$\times\frac{1}{\pi p}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{2n-1}{2}x+\frac{(\beta-1)\pi}{2}\right)dt\right|+$$

$$+O(1)\left(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C. \qquad (27)$$

Як випливає з роботи [17], при виконанні умов теореми 1 має місце нерівність

$$\left|\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{2n-1}{2}x+\frac{(\beta-1)\pi}{2}\right)dt\right|\le$$

$$\le\left(\frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}+O(1)\psi(n)\right)E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_C, \qquad (28)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, p, x, β і $f\in C_\beta^\psi C$. Із (27) та (28) отримуємо (10).

Доведемо тепер другу частину теореми. На основі інтегрального зображення (12) та оцінок (19), (22), (26) має місце рівність

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)=2\sin\frac{2n-1}{2}x\times$$

$$\times\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n-p}(t+x)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt+\frac{2n-1}{2}x+\frac{(\beta-1)\pi}{2}\right)dt+$$

$$+O(1)\left(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln\frac{\eta(n)-n}{p}\right)E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_C. \qquad (29)$$

При кожному фіксованому значенні параметрів $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ розглянемо функцію

$$h(\cdot)=h_{x,n,\beta}(\cdot)=\mathcal{J}^\psi_{2\gamma_0/\pi}f_\beta^\psi(\cdot)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t+\cdot)\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\gamma_{n,0})dt,$$

де $\gamma_0=\gamma_{n,0}=\frac{2n-1}{2}x+\frac{\pi(\beta-1)}{2}$. Згідно з роботою [17] при кожному $n\in\mathbb{N}$ для функції $h(\cdot)$ знайдеться функція $\overline{\varphi}(\cdot)=\overline{\varphi}_{x,n,\beta}(\cdot)$ така, що $E_{n-p+1}(\overline{\varphi})_C=E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_C$ і для неї виконується рівність

$$|\rho_{n,p}(\mathcal{J}^\psi_{2\gamma_0/\pi;x}\overline{\varphi}(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi}(t+x)\sum_{m=n-p}^{n-1}\sum_{k=m+1}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\gamma_{n,0})dt\right|=$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2} \ln \frac{\eta(n)-n}{p} + O(1) \right) \psi(n) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C, \qquad (30)$$

у якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і по $f \in C^{\psi}_{\beta} C$.

Функція $F(t) = \mathcal{J}^{\psi}_{\beta} \bar{\varphi}(t)$ буде шуканою. Дійсно, оскільки $F^{\psi}_{\beta}(t) = \bar{\varphi}(t)$, то $E_n(F^{\psi}_{\beta})_C = E_n(f^{\psi}_{\beta})$ і згідно з формулами (29) і (30) при кожному заданому x

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(F;x)| =$$

$$= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{1}{\pi p} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\varphi}(t+x) \sum_{m=n-p}^{n-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt+\gamma_{n,0}) dt \right| +$$

$$+ O(1) \left(\psi(n) + \psi(3n-1) \ln \frac{\eta(n)-n}{p} \right) E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_C =$$

$$= \left(\left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{8}{\pi^2} \psi(n) \ln \frac{\eta(n)-n}{p} + \right.$$

$$\left. + O(1) \left(\psi(n) + \psi(3n-1) \ln \frac{\eta(n)-n}{p} \right) \right) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C.$$

Теорему доведено.

У випадку $p = 1$(коли поліноми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з тригонометричними інтерполяційними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$) результати теореми 1 можуть бути отримані з теореми 1 роботи [13, с. 502].

Важливими представниками множини $\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ є функції $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha \geq 0$, $0 < r < 1$. У цьому випадку ядра $\Psi_{\beta}(t)$ є узагальненими ядрами Пуассона, а класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначаються через $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$. Неважко переконатися, що для функції $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha \geq 0$, $0 < r < 1$

$$\eta(\psi;t) - t = t^{1-r} \left(\frac{\ln 2}{r\alpha} + O(1) \right)$$

і $\psi(3n-1) \ln \frac{\eta(\psi;n)-n}{p} = o(\psi(n))$. А тому з теореми 1 отримаємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C^{\psi}_{\beta} = C^{\alpha,r}_{\beta}$ *і* $p = p(n)$ *— довільна послідовність, така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n^{1-r}} = 0$. *Тоді при* $n \in \mathbb{N}$ *для будь-якої функції* $f \in C^{\alpha,r}_{\beta}C$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}$ *справедлива нерівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| \le \left(\frac{8}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\ln\frac{n^{1-r}}{p} + O(1)\right)e^{-\alpha t^r}E_{n-p+1}(f^{\alpha,r}_{\beta})_C.$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\alpha,r}_{\beta}$ *і довільних* $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ *в множині* $C^{\alpha,r}_{\beta}$ *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\alpha,r}_{\beta}) = E_{n-p+1}(f^{\alpha,r}_{\beta})$, *і для неї виконується рівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)| = \left(\frac{8}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\ln\frac{n^{1-r}}{p} + O(1)\right)e^{-\alpha t^r}E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_C,$$

де $O(1)$ *— величини рівномірно обмежені по* n, p, β, x *і* $f \in C^{\alpha,r}_{\beta}C$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України. — 2002. — **40.** — Ч.1. — 427 с.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т.2. — 538 с.
4. *La Vallé Poussin. Ch.* Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné. // C.r. Acad. sci. Paris. — 1918. — **166**. — P. 799–802.
5. *Бернштейн С. Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. — 1934. — **4** — С. 1–8.
6. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. — 1941. — **31**, № 3. — С. 215–218.
7. *Тиман А. Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — **17**, №2, — С.99–134.
8. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч.//Праці Ін–ту мат. НАН України. — 2002. — **40.** — Ч.2. — 468 с.
9. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.

10. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций// Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 6. – С. 806–816.

11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

12. *Ганзбург И. М.* Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1963. — **27.** — С. 487–528.

13. *Сердюк А. С.* Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 4. — С. 495–505.

14. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 12. — С. 1689–1701.

15. *Войтович В. А., Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена та їх інтерполяційних аналогів на класах $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 39–58.

16. *Войтович В. А.* Асимптотичні оцінки наближень інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2010. — Т. 7, № 1. — С. 22–45.

17. *Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах (ψ, β)–диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2010. — **7,** № 1. — С. 128–150.

18. *Степанець О.І., Сердюк А.С.* Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій// Теорія наближення функцій та її застосування// Праці ін–ту математики НАН України. — 2000. — **31.** — С. 446–460.