Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т. 12, № 4, 111-124

УДК 517.5

Г. М. Власик (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОРТОПРОЕКЦІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,p}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ L_q

Obtained here are the exact order estimates of orthoprojective widths of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between the parameters p and q.

Отримано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

У роботі встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій однієї змінної у просторі L_q для певних співвідношень між параметрами p та q.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)| \,, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f. І скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

Далі, нехай $\psi \neq 0$ — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О.І. Степанця [1, c. 25] (див. також [2, Т. 1, с. 132]), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}, \ r > 0, \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля-Надя $W^r_{p,\beta}$ (див., наприклад, [1, c. 25]).

Позначимо через Ψ множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C, \quad \forall \tau \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції: $\frac{1}{\tau^r}, r > 0$; $\frac{\ln^{\gamma}(\tau+1)}{\tau^r}, \ \gamma \in \mathbb{R}, \ r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ $(B \geq C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі константи $C_i, \ i = 1, 2, ...,$ які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, у якій вимірюється похибка наближення.

Тепер перейдемо до означення апроксимативних характеристик, які будуть досліджуватися.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1, m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m}(f,u_j)u_j(x),$$

де

$$(f,u_j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{u_j(x)}dx,$$

а $\overline{u_j}$ — функції комплексно-спряжені до u_j.

Якщо $F\subset L_q$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^{\perp}(F,L_q)=\inf_{\{u_j\}_{j=1}^m}\sup_{f\in F}\left\|f-\sum_{j=1}^{m}(f,u_j)u_j\right\|_q \tag{1}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі L_q. Ортопроекційний поперечник введено В.М. Темляковим [3]. Паралельно з поперечниками $d_m^{\perp}(F,L_q)$ будемо розглядати величини $d_m^{B}(F,L_q)$, також введені В.М. Темляковим (див., наприклад, [4]), які для функціонального класу $F\subset L_q$ означаються за формулою

$$d_m^{B}(F,L_q)=\inf_{G\in\mathcal{L}_m(B)_q}\sup_{f\in F\cap D(G)}\left\|f-Gf\right\|_q. \tag{2}$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі L_q розмірності m;

б) існує число $B\geq 1$ таке, що для всіх k виконується нерівність $||Ge^{ikx}||_2\leq B$.

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать, зокрема, оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l|\leq 1$ для всіх l. Із означення величин $d_m^{\perp}(F,L_q)$ і $d_m^{B}(F,L_q)$ слідує, що вони пов'язані між собою співвідношенням

$$d_m^{B}(F,L_q)\leq d_m^{\perp}(F,L_q). \tag{3}$$

Із нерівності (3) видно, що оцінки знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^\perp(F, L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_m^\perp(F, L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величини $d_m^B(F, L_q)$. Ця обставина буде врахована при доведенні відповідних тверджень. Відмітимо також, що при доведенні оцінок знизу величини $d_m^B(F, L_q)$ будемо використовувати метод, який розробив В.М. Темляков при встановленні оцінок цих величин для деяких класів функції багатьох змінних [4, 5, 6]. Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів F, які "погано" наближаються за допомогою операторів G. З детальнішою інформацією стосовно дослідження величин (1) і (2) можна ознайомитись у роботах [5], [7 – 16], а також у монографіях [4, 6].

1. Допоміжні твердження. У цьому пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які будуть використовуватися при встановленні отриманих результатів.

Нехай $L^\psi_{\beta,p} \subset L_q,\ 1 \le q \le \infty$, тоді через $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q$ будемо позначати величину

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,p}} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q .$$

Зазначимо, що величини $d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ і $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q$, де $m = 2n+1$, пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \le \mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q. \tag{4}$$

Теорема А [17]. *Нехай $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \Psi \cap \Psi_p$, де Ψ_p — множина монотонно незростаючих послідовностей $\psi(\tau)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що послідовність $\psi(\tau)\tau^\alpha$ майже спадає. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(m) m^{1/p}.$$

Теорема Б [17]. *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \Psi \cap \Psi_1$, де Ψ_1 — множина монотонно незростаючих послідовностей $\psi(\tau)$, для яких існує стала*

$\alpha > 1$ така, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{\alpha}$ майже спадає, і виконується одна з умов

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \geq 0, \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \leq 0, \ \ k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді справедливе наступне співвідношення

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(m)m.$$

Теорема В [18]. *Нехай $1 < q \leq p < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Нехай

$$T_N = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема Г [19]. *Нехай $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$. Тоді для довільного полінома $t \in T_N$ справедлива оцінка*

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(N)\|t\|_p.$$

Лема А [6, с. 55]. *Нехай A — лінійний оператор, такий, що для довільного k*

$$Ae^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a^k_l \psi_l(x),$$

де $\{\psi_l\}_{l=1}^{m}$ — ортонормована система функцій. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t \in T_N$ виконується нерівність

$$\min_{y=x} ReAt(x-y) \leq B(m(2N+1))^{1/2} \max_k |\hat{t}(k)|.$$

Твердження A [2, Т.II, с. 119]. *Нехай $\psi(\tau)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов (5) або (6) і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{N-1}\psi(N)(k\psi(k))^{-1}=O(1), \tag{7}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по N. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t\in T_N$ виконується нерівність

$$\|t_\beta^\psi\|_1\le O(1)|\psi(N)|^{-1}\|t\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ — рівномірно обмежена по N і t.

2. Основні результати. Має місце таке тведження.

Теорема 1. *Нехай $1<p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\beta\in\mathbb{R}$ і, крім того, існує таке $\varepsilon>0$, що $\psi(\tau)\tau^{1/p+\varepsilon}$, $\tau\in\mathbb{N}$, не зростає. Тоді*

$$d_m^B(L_{\beta,p}^\psi,L_\infty)\asymp d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi,L_\infty)\asymp\psi(m)m^{1/p}. \tag{8}$$

Доведення. Оцінки зверху в (8) одержуються з оцінок наближення функцій з класів $L_{\beta,p}^\psi$ сумами Фур'є у метриці простору L_∞. Для цього достатньо скористатися теоремою A та нерівностями (3) і (4):

$$d_m^B(L_{\beta,p}^\psi,L_\infty)\le d_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi,L_\infty)\ll\mathcal{E}_m(L_{\beta,p}^\psi)_\infty\asymp\psi(m)m^{1/p}.$$

Тепер перейдемо до встановлення в (8) оцінок знизу, зробивши попередньо деякі зауваження.

При оцінці знизу величин $d_m^B(L_{\beta,p}^\psi,L_\infty)$ будемо вважати, що оператори G належать до $\mathcal{L}_m(B)_2$. Таке припущення не є додатковим обмеженням на оператори G, і це детально було обгрунтовано В.М. Темляковим у роботі [5].

Розглянемо ядро Валле-Пуссена вигляду

$$V_{2^n}(x)=1+2\sum_{k=1}^{2^n}\cos kx+2\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1}\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^n}\right)\cos kx,\quad m\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Через $\mathbf{V}_{2^n}$ позначимо оператор, що діє на функцію $f \in L_q$ наступним чином

$$\mathbf{V}_{2^n} f = f * V_{2^n},$$

де "$*$" — операція згортки.

Далі, нехай задано оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ і $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^n > m$. Розглянемо оператор

$$A = \mathbf{V}_{2^n} G \in \mathcal{L}_m(B)_2.$$

Відомо (див., наприклад, [6, с. 28]), що має місце співвідношення

$$\|\mathbf{V}_{2^n}\|_{q \to q} \le 3, \ 1 \le q \le \infty,$$

і тому для $f \in T_{2^n}$ можемо записати

$$\|f - Af\|_q = \|\mathbf{V}_{2^n}(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q, \ 1 \le q \le \infty. \tag{9}$$

Із співвідношення (9) випливає, що оцінку знизу достатньо встановити для класу $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T_{2^n}$ і операторів $A \in \mathcal{L}_m(B)_q$ з областю значень в $T_{2^{n+1}}$. Тоді для оператора A і класу функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$ можемо записати співвідношення, яке є наслідком (9),

$$\inf_{A \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T_{2^n}} \|f - Af\|_q \ll d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q). \tag{10}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до отримання оцінки знизу величин $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty)$. Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) = K_{2^n - 1}(x),$$

де

$$\mathcal{K}_{l-1}(t) = \sum_{|k| \le l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikx}$$

— ядро Фейєра порядку l, $\mathcal{K}_{l-1}(t) \equiv 1$ при $l \le 1$.

Встановимо оцінку знизу величин в лівій частині співвідношення (10). Розглянемо величину

$$I = \sup_y \|\varphi_n(x - y) - A\varphi_n(x - y)\|_\infty.$$

Легко бачити, що

$$I \geq \varphi_n(0) - \min_{y=x} Re\ A\varphi_n(x-y). \tag{11}$$

Згідно з означенням функції φ_n можемо записати

$$\varphi_n(0) = 2^n. \tag{12}$$

Тоді, використовуючи лему А та рівність (12), отримуємо

$$I \geq 2^n - B(m2^{n+1})^{1/2}. \tag{13}$$

Виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувались співвідношення $2^n > 2B(m2^{n+1})^{1/2}$ і $m \asymp 2^n$. Тоді, використовуючи оцінки (11) – (13), маємо

$$I = \sup_y \|\varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y)\|_\infty \gg 2^n.$$

Відповідно, знайдеться такий y^*, що

$$\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg 2^n. \tag{14}$$

Для завершення доведення оцінки знизу величин $d_m^B(L_{\beta,p}^\psi, L_\infty)$ розглянемо функцію

$$g(x) = C_3\psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\varphi_n(x), \quad C_3 > 0.$$

Використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [6, с. 27]),

$$\|\mathcal{K}_{2^n-1}\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, 1 \leq p \leq \infty, \tag{15}$$

згідно з теоремою Г, легко переконатися, що $g \in L_{\beta,p}^\psi, 1 < p < \infty$:

$$\|g_\beta^\psi\|_p \ll \psi^{-1}(2^n)\|g\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}\psi^{-1}(2^n)\psi(2^n)\|\varphi_n\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/p)} = 1.$$

Звідси слідує, що при певному виборі сталої $C_3 > 0$ функція $g \in L_{\beta,p}^\psi$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (14), на підставі (10), будемо мати

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty) \gg \|g(x-y^*) - Ag(x-y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg$$
$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}2^n = \psi(2^n)2^{n(1/p)} \asymp \psi(m)m^{1/p}. \qquad (16)$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов (5) або (6) і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що $\psi(\tau)\tau^{1+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді*

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty) \asymp d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty) \asymp \psi(m)m. \qquad (17)$$

Доведення. Оцінки зверху в (17) випливають із теореми Б та нерівностей (3) і (4):

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty) \le d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty) \ll \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_\infty \asymp \psi(m)m.$$

Для встановлення оцінки знизу величин $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty)$ розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_4\psi(2^n)\varphi_n(x),\ C_4 > 0,$$

де n пов'язано з m як і в попередній теоремі, тобто $2^n \asymp m$. Покажемо, що при певному виборі сталої C_4 функція g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\| \ll 1$. Із цією метою скористаємося твердженням А. Зауважимо, що умова (7) виконується, оскільки існує таке число $\alpha > 1$, що послідовність $\eta(m) = \psi(m)m^\alpha$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\eta(m)k^\alpha}{m^\alpha\eta(k)k} \le \frac{1}{m^\alpha}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k^\alpha}{k} \le 1.$$

Отже, на підставі твердження А і співвідношення (15) одержимо, що

$$\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\|g_1\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\psi(2^n) = 1,$$

звідки слідує, що g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Таким чином, скориставшись оцінкою (14), згідно з (10), будемо мати

$$d_m^B(L^{\psi}_{\beta,1}, L_\infty) \gg \|g_1(x-y^*) - Ag_1(x-y^*)\|_\infty \gg$$
$$\gg \psi(2^n)\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg$$
$$\gg \psi(2^n)2^n \asymp \psi(m)m.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$d_m^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m). \tag{18}$$

Доведення. Оцінку зверху в (18) одержимо з оцінок наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ сумами Фур'є у метриці простору L_q. Оскільки $L^{\psi}_{\beta,\infty} \subset L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, і $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$, то оцінку зверху величини $d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ достатньо довести для випадку $1 < q = p < \infty$. Для цього скористаємося теоремою B та нерівностями (3) і (4):

$$d_m^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \le d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Переходячи в (18) до оцінок знизу, зауважимо, що при цьому достатньо отримати необхідну оцінку знизу для величини $d_m^B(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L_1)$. При цьому, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що оператори G належать множині $\mathcal{L}_m(B)_2$.

Отже, нехай $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для довільного k виконується рівність

$$Ge^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x), \tag{19}$$

де $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій. Зазначимо, що для довільного k

$$\sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \le B^2, \tag{20}$$

а для довільного l

$$\sum_{k} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \le 1. \tag{21}$$

Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \{k : 2^{s-1} \le |k| < 2^s\}$$

і нехай n таке, що

$$|\rho(n-1)| < 4B^2 m \le |\rho(n)|,$$

де $|\rho(l)|$ — кількість елементів множини $\rho(l) \subset \mathbb{Z}$.

Розглянемо наближення функцій e^{ikx}, $k \in \rho(n)$, операторами $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$. Позначимо

$$\alpha_k = (Ge^{ikx}, e^{ikx}).$$

Тоді згідно з (19) можемо записати

$$\alpha_k = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \hat{\psi}_l(k).$$

Тому, скориставшись (20), отримаємо

$$|\alpha_k|^2 \le \sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \le B^2 \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2.$$

Далі, враховуючи співвідношення (21), будемо мати

$$\sum_{k \in \rho(n)} |\alpha_k|^2 \le B^2 \sum_{k \in \rho(n)} \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2 = B^2 \sum_{l=1}^{m} \sum_{k \in \rho(n)} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \le$$

$$\le B^2 \sum_{l=1}^{m} 1 = B^2 m.$$

Звідси робимо висновок, що знайдеться таке число $k_0 \in \rho(n)$, що $\alpha_{k_0} \le \frac{1}{2}$. У такому випадку, оскільки $(e^{ik_0x}, e^{ik_0x}) = 1$, можемо записати

$$\frac{1}{2} \le |1 - \alpha_{k_0}| = |(e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}, e^{ik_0x})| \le \|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1, \qquad (22)$$

де $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Нарешті, враховуючи те, що для операторів $A \in \mathcal{L}_m(B)_2$ та $G \in \mathcal{L}_m(B)_1$ і тригонометричних поліномів $t \in T_N$ виконується нерівність

$$\|t - At\|_1 \leq 3\|t - Gt\|_1,$$

згідно з (22) будемо мати

$$\|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1 \geq \frac{1}{6}. \tag{23}$$

Тепер розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_5\psi(2^n)e^{ik_0x},\ C_5 > 0. \tag{24}$$

Легко переконатися, що $g_2 \in L^{\psi}_{\beta,\infty}$. Дійсно, оскільки

$$\|(g_2)^{\psi}_{\beta}\|_{\infty} = \psi(2^n)\psi^{-1}(k_0)\|e^{ik_0x}\|_{\infty} \ll 1,$$

то звідси випливає, що з певною сталою C_5 функція g_2 належить класу $L^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Далі, скориставшись оцінкою (23), можемо записати

$$\|g_2(\cdot) - Gg_2(\cdot)\|_1 = \psi(2^n)\|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1 \gg \psi(2^n).$$

Таким чином,

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L_1) \geq d^B_m(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L_1) \gg \psi(2^n) \asymp \psi(m),$$

а, отже, і

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \geq d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m).$$

Теорему 3 доведено.

Зауваження 1. У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0$, відповідні твердження до теорем 1 – 3 встановлено у роботі [6, с. 51].

Зауваження 2. Питання про порядки величин $d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_p)$ і $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_p)$, де $p \in \{1, \infty\}$, залишаються відкритими.

Зауваження 3. Теореми 1 – 3 доповнюють результати роботи [20].

Зауваження 4. Порядкові оцінки ортопроекційних поперечників при деяких співвідношеннях між параметрами p та q реалізуються відповідними порядковими оцінками наближенння функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ сумами Фур'є у метриці простору L_q.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40.** — Т.I. — 427 с.; Т.II. — 468 с.
3. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3 – 113.
5. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик класоов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.
6. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 272 p.
7. *Андрианов А. В., Темляков В. Н.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. МИРАН. — 1997. — **219**. — С. 32 – 43.
8. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных // Мат. заметки. — 1988. — **43**, №2. — С. 197 – 211.
9. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №9. — С. 1224 – 1231.
10. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №10. — С. 1402 – 1408.
11. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №10. — С. 1348 – 1366.
12. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін–ту мат. НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.
13. *Федуник О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту мат. НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.

14. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінни // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.

15. *Дерев'янко Н. В.* Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2012. — **9**, №2. — С. 146 – 156.

16. *Дерев'янко Н. В.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту мат. НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 95 – 109.

17. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ,β)-диференційовних функцій. // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1186 – 1197.

18. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 4. — С. 483 – 492.

19. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ,β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т мат. АН УССР. — 1987. — С. 92 – 105.

20. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 65 – 77.

-