Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 79-91

УДК 517.5
**М. А. Веремій** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)
**П. В. Задерей** (Київський національний університет технологій та дизайну, Київ)

## ПРО НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА КЛАСАХ $C^{\overline{\psi}}C$

*We consider the exact top limits of deviations Valle Poussin sums on classes of $\overline{\psi}$-differentiable functions where the sequence $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ is a quasiconvex. These estimates are expressed in terms of best approximation $\overline{\psi}$ - derivatives functions in terms of O.I. Stepanets'.*

*Розглядаються точні верхні межі відхилень сум Валле Пуссена на класах $\overline{\psi}$-диференційовних функцій, причому послідовності $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ є квазіопуклими. Отримані оцінки таких відхилень виражені через найкраще наближення $\overline{\psi}$-похідних функцій в сенсі О. І. Степанця.*

Позначимо через $L-$ простір $2\pi$-періодичних інтегрованих за Лебегом функцій $f(\cdot)$ з нормою

$$\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx,$$

а через $C-$ простір, який складається з неперервних $2\pi$-періодичних функцій $f(\cdot)$ з нормою

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|\,.$$

Нехай $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S\,[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx \ + b_k\,(f)\sin kx\ ) = \ = \frac{a_0}{2}\ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,(f;x), \tag{1}$$

де $a_{0,}\ \ a_k(f), b_k(f),\ k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(\cdot)$. Позначимо через $S_n(f;x)-$ частинні суми порядку $n$ ряду (1).

Кожній функції $f \in L$(див. [1, с. 74]) з рядом Фур'є (1) поставимо у відповідність послідовність поліномів $V_{n,p}(f;x)$ вигляду

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} S_k(f;x) =$$

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\left(a_k(f)\cos kx\ + b_k(f)\sin kx\ \right), \tag{2}$$

де $\lambda_{k,p}^{(n)}$ мають вигляд

$$\lambda_{k,p}^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0,\ 1,\ \ldots, n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p+1}, & k = n-p+1, \ldots, n, \quad 1 \le p \le n. \\ 0, & k \ge n+1, \end{cases} \tag{3}$$

Ці поліноми $V_{n,p}(f;x)$ називають сумами Валле Пуссена.

Нехай далі

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n \in T_n} \left\| f(x) - t_n(x) \right\|_X \tag{4}$$

– найкраще наближення функції $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами $t_n(\cdot) \in T_n$, де $T_n-$ множина тригонометричних поліномів порядку $n$, а $X$ означає або простір $L$, або $C$.

Валле Пуссен в 1919 році в своїй роботі [2] отримав оцінку в рівномірній метриці відхилення $2\pi$-періодичних неперервних функцій від сум (2):

$$\left\| f(x) - V_{n,p}(f;x) \right\|_C \le 2\frac{n+1}{p+1}E_{n-p}(f)_C,$$

яку уточнив С.М. Нікольський [3] в 1940 році. Він показав, що

$$\left\| f(x) - V_{n,p}(f;x) \right\|_C \le \left( M + \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n}{p+1}\ \right) E_{n-p}(f)_C.$$

Тут та далі через $M$ будемо позначати деякі абсолютні сталі, можливо неоднакові в різних формулах.

В 1951 році О. П. Тіман [4] на класі $W_{\infty}^{r} = \left\{ f \in W^{r} : \operatorname{ess\,sup}_{t} |f^{r}(t)| \leq 1, r \in N \right\}$ розв'язав задачу про відшукання асимптотичних рівностей величини

$$\mathcal{E}\left(W_{\infty}^{r}; V_{n,p}\right)_{C} = \sup_{f \in W_{\infty}^{r}} \|f - V_{n,p}(f;x)\|_{C} = \sup_{f \in W_{\infty}^{r}} \|\rho_{n,p}\left(f;x;V_{n,p}\right)\|_{C} =$$

$$= \frac{4}{\pi^{2}} \frac{1}{n^{r}} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^{r}}\right), r > 0, \lim_{n \to \infty} \frac{p}{n} = 0.$$

Така ж задача для сум Валле Пуссена на більш загальних класах функцій для сум Валле Пуссена розглядалась О. В. Єфімовим [5] та С. О. Теляковським [6].

В. Дамен [7] та С. Б. Стечкин [8] незалежно в 1978 році встановили точні в розумінні порядку оцінки величини $\mathcal{E}\left(C_{\varepsilon}; V_{n,p}\right)_{C}$, де $C_{\varepsilon} = \{f \in C : E_{n}(f) \leq \varepsilon_{n}, \varepsilon_{n} \downarrow 0\}$ . Зокрема С. Б. Стечкин показав, що

$$\sup_{f \in C_{\varepsilon}} \|f - V_{n,p}\|_{C} \asymp \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n-p+k}}{p+k+1}.$$

О. І. Степанцем [9] було введено поняття $\overline{\psi}$-похідних і визначено класи $C^{\overline{\psi}}C^{0}$, наступним чином.

Нехай $f \in L$, а її ряд Фур'є має вигляд (1), $\overline{\psi} = (\psi_{1}, \psi_{2})$ – пара довільних числових послідовностей $\psi_{1}(k)$ та $\psi_{2}(k)$, для яких виконується умова

$$\overline{\psi}^{2}(k) = \psi_{1}^{2}(k) + \psi_{2}^{2}(k) \neq 0, \forall k \in N.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\psi_{1}(k)}{\overline{\psi}^{2}(k)} A_{k}(f;x) + \frac{\psi_{2}(k)}{\overline{\psi}^{2}(k)} \tilde{A}_{k}(f;x) \right),$$

де $\tilde{A}_{k}(f;x) = a_{k}(f) \sin kx - b_{k}(f) \cos kx$ , є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то $\varphi$ називають $\overline{\psi}$-похідною функції $f$ і позначимо $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Так, при $\psi_{1}(k) = \psi(k) \cos \beta \frac{\pi}{2}$, $\psi_{2}(k) = \psi(k) \sin \beta \frac{\pi}{2}$, пишуть $C^{\overline{\psi}} = C_{\beta}^{\psi}$.

Нехай $C^{\overline{\psi}}$ – множина всіх неперервних функцій $f$, у яких існують $\overline{\psi}$-похідні.

Якщо $f \in C^{\overline{\psi}}$ і при цьому $f^{\overline{\psi}} \in \mathfrak{N}$, то такий клас позначають $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Зокрема при $\mathfrak{N} = C$ і $\mathfrak{N} = C_\varepsilon$ будемо позначати такі класи відповідно $C^{\overline{\psi}}C$ та $C^{\overline{\psi}}C_\varepsilon$.

Наслідуючи О. І. Степанця [9], введемо наступні позначення:

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t) : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t) \geq 0, \forall t_1, t_2 \in [1,\infty), \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\right\}$$

$\mathfrak{M}_0$ – підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють умову

$$0 \leq \mu\left(\psi;t\right) := \frac{t}{\eta\left(t\right)-t} \leq K < \infty,\ \eta\left(t\right) = \eta\left(\psi;t\right) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi\left(t\right)\right);$$

$\mathfrak{M}'$ – підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}dt \leq K < \infty;$$

$\mathfrak{F}$ – множина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ для яких $\eta'\left(\psi;t\right) \leq K$;
$\mathcal{L}$ – множина пар $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таких, що ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\psi_1(k)\cos kx \ + \psi_2\left(k\right)\sin kx\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi\left(x\right)$.

На підмножинах класів $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ при різних обмеженнях на $\psi$ та $\beta$ відхилення сум Валле Пуссена досліджувались в роботах В. І. Рукасова [10, 11], О. О. Новікова [11], А. С. Сердюка [12,13,14], Є. Ю. Овсія [14], А. П. Мусієнка[12,15]. Більш детальний огляд результатів можна знайти в [1].

В 2002 році В. І. Рукасов, О. О. Новіков, С. О. Чайченко [17] отримали наступну асимптотичну рівність при $\psi_i \in \mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{M}'$, $i = \overline{1,2},\ \theta \in [0,1)$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n} = \theta\right)$)

$$\sup_{f\in C^{\overline{\psi}}_\infty} \left\|\rho_{n,p}\left(f;x\right)\right\|_C = \frac{2}{\pi}\ \int_{n+1}^\infty \frac{|\psi_2(v)|}{v}dv +$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}\,(n+1)\ln\frac{n+1}{p+1}+O\,(1)\,\overline{\psi}\,(n+1)\,,$$

де $\overline{\psi}\,(n)=\sqrt{\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)}$, а $O\,(1)$ – величина, рівномірно обмежена по $n$ і $p$.

Також слід відмітити роботу Мусієнка А. П. [15], в якій знайдена нерівність типу Лебега на множинах $C^{\psi}_{\beta}C$. Він показав, що якщо $\psi\in\mathfrak{F}$, $\beta\in R$ і $p\in[0;n-\eta^{-1}(\psi;n)]$, тоді для будь-якої функціїї $f\in C^{\psi}_{\beta}C$ справедлива рівність

$$\|\rho_{n,p}\,(f;x)\,\|_C\le\left(\frac{4}{\pi^2}\ln^{+}\frac{\eta(\psi;n)-n}{p+1}+O(1)\right)\psi(n)E_{n-p}(f^{\psi}_{\beta})_C,$$

де $\ln^{+}t=max\{\ln t;0\}$, а $O(1)$ – величина рівномірно обмежена по $n,p,\beta$ і $f\in C^{\psi}_{\beta}C$.

Далі будуть встановлені оцінки відхилень сум Валле Пуссена на класах $C^{\overline{\psi}}C$. Причому замість опуклості послідовностей $\psi_i$, $i=\overline{1,2}$ ми будемо накладати умову квазіопуклості.

Послідовність $\psi(k),k\in N$ називається квазіопуклою, якщо для неї виконуються наступні умови

$$\lim_{k\to\infty}\psi\,(k)=0, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\triangle^2\psi(k-1)\right|<\infty, \tag{6}$$

де $\triangle^2\psi\,(k-1)=\psi\,(k-1)-2\psi\,(k)+\psi\,(k+1)$.

Справедливе наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай для послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ виконуються умови* (5) *та* (6) *і для $\psi_2(k)$ виконується умова $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}<\infty$, Тоді для будь-якої функції $f\in C^{\overline{\psi}}C$ при $n\in N$ і $p\in[0;\frac{n-1}{2})$ виконується нерівність*

$$\|\rho_{n,p}\,(f;x)\|_C\le$$

$$\le\left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=p+1}^{n-p}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2\,(n-p+k)+\psi_2^2\,(n-p+k)}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+O(1)\,R(\psi_1,\psi_2)\Bigg)E_{n-p}\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C. \quad (7)$$

*Крім того, справедлива рівність*

$$\sup_{f\in C^{\overline{\psi}}C_\varepsilon}\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C =$$

$$=\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=p+1}^{n-p}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n-p+k)+\psi_2^2(n-p+k)}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+O(1)\,R(\psi_1,\psi_2)\Bigg)\varepsilon_{n-p}\ , \quad (8)$$

*де*

$$R_{n,p}(\psi_1,\psi_2)=\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\left|\left(\triangle^2\psi_1(n-p+k-1)\right)\right|+$$

$$+\left|\triangle^2\left(\psi_2(n-p+k-1)\right)\right|\Big). \quad (9)$$

**Доведення.** Як відомо (див. [9], с. 77), з умов (5) і (6) випливає, що $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$. Тому для $f^{\overline{\psi}}\in C_0$ у кожній точці $x$ виконується рівність (див. [1], с. 79)

$$\rho_{n,p}(f;x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\lambda_{k,p}^{(n)}\right)(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt\ )\,dt, \quad (10)$$

де $\lambda_{k,p}^{(n)}$ визначається формулою (3). Враховуючи співвідношення (3), покладемо

$$\gamma_{i,n,p}(k)=\begin{cases}0, & k=0,1,\ldots,n-p\\ \frac{k-n+p}{p+1}\psi_i(k)\,, & k=n-p+1,\ldots,n\,,\ 1\le p\le n,\ i=1,2.\\ \psi_i(k)\,, & k\ge n+1\end{cases} \quad (11)$$

Тоді рівність (10) набуде вигляду

$$\rho_{n,p}\left(f;x;\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}\left(x-t\right)\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\left(\gamma_{1,p}\left(k\right)\cos kt\ +\gamma_{2,p}\left(k\right)\sin kt\ \right)dt. \qquad (12)$$

Використовуючи (11), отримаємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}t_{n-p}\left(\tau\right)\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\left(\gamma_{1,p}\left(k\right)\cos k\tau\ +\gamma_{2,p}\left(k\right)\sin k\tau\ \right)d\tau=0,$$

де $t_{n-p}\left(\cdot\right)$ – тригонометричний поліном порядку $n-p$.

Нехай $t^{*}_{n-p}(\cdot)$ – поліном найкращого рівномірного наближення функції $f^{\overline{\psi}}$ порядку $n-p$, тоді позначимо $\Delta^{*}\left(\cdot\right)=f^{\overline{\psi}}\left(\cdot\right)-t^{*}_{n-p}(\cdot)$. Звідси рівність (12) набуде вигляду

$$\rho_{n,p}\left(f;x\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta^{*}\left(x-t\right)\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\left(\gamma_{1,p}\left(k\right)\cos kt\ +\gamma_{1,p}\left(k\right)\sin kt\ \right)dt.$$

Тоді

$$\left\|\rho_{n,p}\left(f;x\right)\right\|_{C}\leq$$

$$\leq E_{n-p}\left(f^{\overline{\psi}}\right)_{C}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\left(\gamma_{1,p}\left(k\right)\cos kt\ +\gamma_{2,p}\left(k\right)\sin kt\ \right)\right|dt. \qquad (13)$$

Застосуємо до інтеграла в правій частині нерівності (13) асимптотичну рівність С. О. Теляковського [18, c. 86]. Отримаємо наступне співвідношення

$$\left\|\rho_{n,p}\left(f;x;V_{n,p}\right)\right\|_{C}\leq E_{n-p}\left(f^{\overline{\psi}}\right)_{C}\left(\frac{4}{\pi^{2}}\sum_{k=1}^{n-p}\frac{\xi_{k}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{\left|\gamma_{2,p}\left(k\right)\right|}{k}+\right.$$

$$O(1)\Bigg(\sum_{k=1}^{n-p-1}\frac{k(n-p-k)}{n-p}\left(|\triangle^2\gamma_{1,n,p}(k-1)|+|\triangle^2\gamma_{2,n,p}(k-1)|\right)+$$

$$+|\gamma_{1,n,p}(0)|+|\gamma_{1,n,p}(n-p)|+|\gamma_{2,n,p}(n-p)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\triangle^2\gamma_{1,n,p}\left(n-p+k-1\right)\right|+\left|\triangle^2\gamma_{2,n,p}\left(n-p+k-1\right)\right|\right)\Bigg)\Bigg), \tag{14}$$

де

$$\xi_k=\xi\Bigg(\gamma_{1,n,p}(k),\Bigg(\left(\gamma_{1,n,p}\left(n-p-k\right)-\gamma_{1,n,p}(n-p+k)\right)^2+$$

$$+\left(\gamma_{2,n,p}\left(n-p-k\right)-\gamma_{2,,n,p}(n-p+k)\right)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg),$$

$$\xi\left(t,u\right)=\begin{cases}\frac{\pi|t|}{2}, & |u|\le|t|\\ |t|\arcsin\left(\frac{|t|}{|u|}\right)+\sqrt{u^2-t^2}, & |t|<|u|\end{cases}. \tag{15}$$

З (15) випливає, що $\xi\left(0,u\right)=|u|$.

Оскільки в першій сумі правої частини нерівності (14) $k=\overline{1,n-p}$ , то згідно з (15) $\gamma_{2,n,p}\left(k\right)=0$ , $\gamma_{1,n,p}\left(n-p-k\right)=0$, $\gamma_{1,n,p}\left(n-p-k\right)=0$. Тому функція $\xi_k$ набуде вигляду

$$\xi_k=\xi\left(0,\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2\left(n-p+k\right)+\gamma_{2,n,p}^2\left(n-p+k\right)}\right)=$$

$$=\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2\left(n-p+k\right)+\gamma_{2,n,p}^2\left(n-p+k\right)}. \tag{16}$$

Враховуючи (16) та (11), співвідношення (14) буде мати вигляд

$$\left\|\rho_{n,p}\left(f;x\right)\right\|_C\le$$

$$\le E_{n-p}\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-p}\frac{\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2\left(n-p+k\right)+\gamma_{2,n,p}^2\left(n-p+k\right)}}{k}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{|\gamma_{1,n,p}(k)|}{k}+O(1)\,R(\gamma_{1,n,p},\gamma_{2,n,p})\Bigg)=$$

$$=E_{n-p}\left(f^{\overline{\psi}}\right)_{C}\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2(n-p+k)+\gamma_{2,n,p}^2(n-p+k)}}{k}+$$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=p+1}^{n-p}\frac{\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2(n-p+k)+\gamma_{2,n,p}^2(n-p+k)}}{k}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{|\gamma_{2,n,p}(k)|}{k}+O(1)\,R(\gamma_{1,n,p},\gamma_{1,n,p})\Bigg). \qquad (17)$$

Використовуючи позначення (11), оцінимо деякі суми з (17). В першій сумі правої частини нерівності (17) $k=\overline{1,p}$, тому, враховуючи (11), $\gamma_{i,n,p}(n-p+k)=\frac{n-p+k-n+p}{p+1}\psi_i(n-p+k)=\frac{k}{p+1}\psi_i(n-p+k)$, де $i=1,2$. Отже,

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{\sqrt{\gamma_{1,n,p}^2(n-p+k)+\gamma_{2,n,p}^2(n-p+k)}}{k}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2(p+1)}\sum_{k=1}^{p}\sqrt{\psi_1^2(n-p+k)+\psi_2^2(n-p+k)}\le$$

$$\le\frac{4}{\pi^2(p+1)}\sum_{k=1}^{p}\left(|\psi_1(n-p+k)|+|\psi_2(n-p+k)|\right)\le$$

$$\le M\max_{n-p\le i\le n}\left(|\psi_1(i)|+|\psi_2(i)|\right)\le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\triangle^2\psi_2(n-p+k-1)\right|+\left|\triangle^2\psi_2(n-p+k-1)\right|\right);$$

Також справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\triangle^2\gamma_{1,n,p}(n-p+k-1)\right|+\left|\triangle^2\gamma_{2,n,p}(n-p+k-1)\right|\right)\le$$

$$\leq M\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left|\triangle^{2}\psi_{2}\left(n-p+k-1\right)\right|+\left|\triangle^{2}\psi_{2}\left(n-p+k-1\right)\right|\right).$$

Далі, за умови, що $p<\frac{n-1}{2}$, і враховуючи (11) при $k\geq 2(n-p)+1$ справедлива рівність $\gamma_{2,n,p}(k)=\psi_{2}\left(k\right)$, тому

$$\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{\left|\gamma_{2,n,p}\left(k\right)\right|}{k}=\sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{2}\left(k\right)\right|}{k}$$

Тоді, враховуючи вище сказане, з (17) при $p<\frac{n-1}{2}$ одержимо (7).

Далі покладемо

$$F_{n-p}\left(\overline{\psi};x\right)=\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\left(\gamma_{1,n,p}(k)\cos kt\ +\gamma_{2,n,p}(k)\sin kt\ \right)$$

Побудуємо функцію $\Phi_{n-p}\left(\cdot\right)\in C^{\overline{\psi}}C_{\varepsilon}^{0}$, для якої виконується рівність (8). Для цього покладемо

$$g_{n-p}\left(-x\right)=\mathrm{sign}\ F_{n-p}\left(\overline{\psi};x\right),\quad \left|x\right|\leq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1}.$$

В околах точок розриву функції $g_{n-p}\left(-x\right)$ замінимо її лінійною. Одержану функцію позначимо через $\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right),\ \left|x\right|\leq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1}$. При $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1}\leq\left|x\right|\leq\pi$ означимо функцію $\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right)$ так, щоб $g_{n-p}\left(-x\right)$ стала неперервною на $[-\pi;\pi]$, і крім того $\tilde{g}_{n-p}\left(-\pi\right)=\tilde{g}_{n-p}\left(\pi\right),\quad \left|\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right)\right|\leq 1$. Крім того, вимагатимемо, щоб існувало на $[-\pi;\pi]$ не менше $2\left(n-p\right)$ точок $c_i$, в яких $\left|\tilde{g}_{n-p}\left(-c_i\right)\right|=1$, в цих точках функція $\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right)$ почергово змінює знак, і щоб при цьому виконувалась рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right)dx=0.$$

Позначимо $\widetilde{\varphi}_{n-p}\left(-x\right)=\varepsilon_{n-p}\tilde{g}_{n-p}\left(-x\right)$. Оскільки $\overline{\psi}\in\mathcal{L}$, то має місце представлення

$$\Phi_{n-p}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{\varphi}_{n-p}\left(t-x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt\right)dt,$$

де $\Phi_{n-p}(x)$ називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $\widetilde{\varphi}_{n-p}(-x)$ , тобто $(\Phi_{n-p}(x))^{\overline{\psi}} = \widetilde{\varphi}_{n-p}(-x)$.

Тоді за критерієм Чебишева найкраще рівномірне наближення функції $\widetilde{\varphi}_{n-p}(-x)$ буде здійснювати поліном тотожно рівний нулю.

Оскільки

$$E_{n-p}(\widetilde{\varphi}_{n-p})_C = \varepsilon_{n-p} E_{n-p}(\tilde{g}_{n-p}(-x))_C = \varepsilon_{n-p},$$

то $\widetilde{\varphi}_{n-p} \in C_\varepsilon^0$ і

$$\sup_{f \in C^{\overline{\psi}} C_\varepsilon^0} \|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \geq \|\rho_{n,p}(\Phi_{n-p};x)\|_C \geq |\rho_{n,p}(\Phi_{n-p};0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}_{n-p}(-u) F_{n-p}(\overline{\psi};u)\, du \right| \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon_{n-p}}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2(n-p)+1}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1}} \left|F_{n-p}(\overline{\psi};u)\right| du - \frac{\varepsilon_{n-p}}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1} \leq |u| \leq \pi} \left|F_{n-p}(\overline{\psi};u)\right|\, du. \tag{18}$$

Виходячи з того, що (див. (14))

$$\sup_{f \in C^{\overline{\psi}} C_\varepsilon^0} \|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \leq \frac{\varepsilon_{n-p}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_{n-p}(\overline{\psi};u)\right| du, \tag{19}$$

на підставі нерівностей (18) і (19) робимо висновок, що

$$\sup_{f \in C^{\overline{\psi}} C_\varepsilon^0} \|\rho_{n,p}(f;x)\|_C = \frac{\varepsilon_{n-p}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_{n-p}(\overline{\psi};u)\right| du +$$

$$+ O(1) \left( \varepsilon_{n-p} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1} \leq |u| \leq \pi} \left|F_{n-p}(\overline{\psi};u)\right|\, du \right). \tag{20}$$

З (20) і оцінки

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(n-p)+1}\le|u|\le\pi} \left|F_{n-p}\left(\overline{\psi};u\right)\right| du \le$$

$$\le K\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\left|\triangle^2\gamma_i\left(n-p+k-1\right)\right| + \left|\triangle^2\gamma_i\left(n-p+k-1\right)\right|\right)$$

випливає співвідношення (8). Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Підставивши $p=0$ в (7), отримаємо нерівність типу Лебега для частинних сум Фур'є $S_n\left(f;x\right)$, отриману Н. М. Задерей та П. В. Задереєм в [19].

$$\left\|\rho_{n,0}\left(f;x;S_n\right)\right\|_C \le$$

$$\le E_n\left(f^{\overline{\psi}}\right)_C\left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2\left(n+k\right)+\psi_2^2\left(n+k\right)}}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+\right.$$

$$\left.+O\left(1\right)\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\left|\triangle^2\psi_2\left(n+k-1\right)\right| + \left|\triangle^2\psi_2\left(n+k-1\right)\right|\right)\right)$$


1. *Степанець А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту мат. НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.
2. *De la Vallee Poussin Ch. J.* Lecons sur I'approximation des fonctions d'une variable reelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. – 150 p.
3. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – Т. **4,** № 6. – С. 509-520.
4. *Тиман А. Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – Т. **17,** № 2. – С. 99-134.
5. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – Т. **23,** № 5. – С. 737-770.
6. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифферинцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. – 1961. – Т. **62.** – С. 61-97.
7. *Дамен В. О.* наилучшем приближении и суммах Валле Пуссена // Мат. заметки, 1978. – Т. **23,** № 5, – С. 671-683.

8. *Stechkin S. B.* On the approximation of periodic function by de la Vallee Poussin sums // Anal. math. – 1978. – Vol. **4.** – P. 61-74.

9. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України. — 2002. — **40.** — Ч.1. — 427 с.

10. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.**39,** № 4. – С. 478-483.

11. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Праці Ін-ту математики НАН України, – 1998. – **20.** – С. 228-241.

12. *Сердюк А. С., Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Ваалле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона // Терія наближень та суміжні питання: Збірник праць інституту математики НАН України. – 2010. – Т. **7,** № 1. – С. 298-316.

13. *Сердюк А. С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральных метриках // Укр. мат. журн. – 2010. – **62,** № 12. – С. 1672-1686.

14. *Сердюк А. С., Овсій Є. Ю.* Наближення на класах ціхих функцій сумамми Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць. Ін-ту мат. НАН України. –2008. – **5,** № 1. – С. 334-351.

15. *Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах $(\psi, \beta)$-диференційовних неперервних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, – 2011. – **8,** № 1. – С. 128-151.

16. *Степанец А. И.* Аппроксимативные свойства метода Валле Пуссена // Укр. мат. журн. - 2002. — **54,** № 8. — С. 1100-1125.

17. *Рукасов В. И. Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ методами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. праць – Київ: Інститут математики НАН України, 2000. – Вип. 31. – С. 396-406.

18. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109.** – С. 65-97.

19. *Задерей П. В., Задерей Н. М.* Про нерівність Лебега на класах $\overline{\psi}$-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65,** № 6. — С. 844-849.