УДК 517.54

В. І. Бодра, П. В. Задерей (Київський національний університет технологій та дизайну, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\overline{\psi}$–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ФУР'Є

We consider deviations of Fourier sums on the spaces $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ and estimates of these deviations are expressed by the best approximation $\overline{\psi}$-derivative functions of two variables in the understanding of A. I. Stepanets are obtained. The sequence $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $i=1,2$, $j=1,2$, are quasiconvex functions.

Розглядається відхилення сум Фур'є на просторах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, причому отримані оцінки таких відхилень виражені через найкращі наближення $\overline{\psi}$-похідних функцій двох змінних в розумінні О. І. Степанця. Послідовності $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $i=1,2$, $j=1,2$, – квазіопуклі функції.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних за Лебегом функцій f з нормою $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, а C — підпростір L, що складається з неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{t} |f|$.

Нехай

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{1}$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$ за тригонометричною системою; $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k=1,2,\ldots,$ — її коефіцієнти Фур'є. Позначимо через $S_n(f;x)$ частинну суму ряду Фур'є (1) порядку n і покладемо

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x).$$

Нехай далі T_n — множина усіх тригонометричних поліномів t_n вигляду $t_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big)$, α_k, β_k — довільні дійсні числа, а

$$E_n(f)_C := \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_C \tag{2}$$

— найкраще наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів в метриці простору C.

А. Лебег показав [1], що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le (L_n+1)E_n(f)_C, \tag{3}$$

де L_n — норма оператора S_n, що діє з простору C в C.

Як відомо, (див., наприклад, [6, с. 30]) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$: $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + r_n$, де $|r_n| < 1,8$. Тому співвідношення (3) можна записати у вигляді

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln n + R_n\right)E_n(f)_C, |R_n| < 2,8. \tag{4}$$

Зауважимо, що нерівність (4) є асимптотично точною на всьому просторі C, але вона перестає бути точною на деяких підмножинах C.

К.І. Осколков [5] довів, що для довільної $f \in C$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le K\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{n+k}(f)_C}{k+1}, \tag{5}$$

де $K>0$ — деяка стала і показав, що якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k = 0,1,2,\ldots,$ — монотонно спадна до нуля послідовність невід'ємних чисел (надалі будемо писати $\varepsilon \in P_0$) і $C_\varepsilon = \{f \in C : E_k(f)_C \le \varepsilon_k, k = 0,1,2,\ldots\}$, то існують додатні сталі K_1 і K_2, що

$$K_1\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \le \sup_{f\in C_\varepsilon}\|\rho_n(f;x)\|_C \le K_2\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \tag{6}$$

О.І. Степанець (див. [6, с. 149]) ввів поняття $\bar\psi$-похідних і визначив класи $C^{\bar\psi}$ наступним чином.

Нехай $f \in L$ і ряд (1) — її ряд Фур'є, $\bar\psi = (\psi_1,\psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k = 0,1,2,\ldots$ $\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k)+\psi_2^2(k) \ne 0$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)}A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)}\widetilde{A}_k(f;x)\right),$$

де $A_k(f;x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$, $\widetilde{A}_k(f;x) = = a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$, тобто $\varphi(x) = f^{\overline{\psi}}(x)$.

Через $C^{\bar{\psi}}$ позначається множина всіх неперервних функцій f, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні. Покладемо

$$C^{\bar{\psi}}C = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C\},$$

$$C^{\bar{\psi}}C_{\varepsilon} = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C_{\varepsilon}\},$$

$$C^0 = \{f \in C : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0\}.$$

Далі через $\mathfrak{M}$ позначимо множину опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; $\eta(t) = \eta(\psi,t) = = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$, $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$; $\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $0 < \mu(\psi,t) \leq K < \infty$, $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\int\limits_1^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t}dt < \infty$; $F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \eta'(\psi,t) \leq K\}$.

О.І. Степанцем встановлено такий аналог нерівності Лебега (4) (див. [6], с. 216): Якщо $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для довільної $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ та довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_{n-1}(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \tag{7}$$

де O(1) — величина рівномірно обмежена по n та по f.

Там же (див. [6, с. 218, 242–244]) показано, що $\forall\varepsilon \in P_0$ існує функція $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_{\varepsilon}$ така, що

$$\|\rho_{n-1}(f_*;x)\|_C =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)\varepsilon_{n-1}.$$

Задерей П.В. та Задерей Н.М. в роботі [3] встановили нерівність Лебега для квазіопуклих послідовностей ψ_i, i=1,2. В цій роботі показано, що якщо виконуються умови:

$$\lim_{k\to\infty}\psi_1(k)=\lim_{k\to\infty}\psi_2(k)=0, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}<\infty, \sum_{k=1}^{\infty}k\Big(|\Delta^2\psi_1(k-1)|+|\Delta^2\psi_2(k-1)|\Big)<\infty, \tag{9}$$

де $\Delta^2\psi_i(k-1)=\psi_i(k-1)-2\psi_i(k)+\psi_i(k+1)$, $i=1,2$, тоді для будь-якої функції $f\in C^{\overline{\psi}}C^0$ при $n\in N$ виконується нерівність

$$||\rho_n(f;x)||_C\le$$

$$\le\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+O(1)\sum_{k=1}^{\infty}k(|\Delta^2\psi_1(n+k-1)|+|\Delta^2\psi_2(n+k-1)|)\Bigg)E_n(f^{\overline{\psi}})_C. \tag{10}$$

Метою даної роботи є встановлення нерівності типу Лебега (10) для функцій двох змінних.

Нехай $f(x)=f(x_1,x_2)$ — 2π–періодична функція по кожній змінній, сумовна на T^2 ($f\in L(T^2)$),

$$T^2=\{x=(x_1,x_2):-\pi\le x_i\le\pi, i=1,2\},$$

$$S[f]=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{-q(k_1,k_2)}A_{k_1,k_2}(f;x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-q(k)}A_k(f;x) \tag{11}$$

— ряд Фур'є функції $f\in L(T^2)$, де $q(k)=q(k_1,k_2)$ — кількість нулів серед координат точки $k=(k_1,k_2)$, а

$$A_{k_1,k_2}(f;x_1,x_2)=A_k(f;x)=\sum_{\gamma\in P}a_k(f;\gamma)\prod_{i=1}^{2}\cos\Big(k_ix_i-\gamma_i\frac{\pi}{2}\Big), \tag{12}$$

P — множина точок $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in R^2$, координати яких γ_i, $i = 1, 2$, приймають значення 0, або 1;

$$a_k(f;\gamma) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{T^2} f(t) \prod_{i=1}^{2} \cos\left(k_i t_i - \gamma_i \frac{\pi}{2}\right) dt \tag{13}$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f \in L(T^2)$.

Нехай далі $M = \{1, 2\}$ і $\mu \subseteq M$, $\mu \neq \emptyset$, $|\mu|$ — кількість елементів множини μ ($|M| = 2$). Якщо $f \in L(T^2)$, то покладемо

$$S[f]_\mu = \sum_{k_\mu=0}^{\infty} 2^{-q(k_\mu)} \frac{1}{\pi^{|\mu|}} \int\limits_{T^{|\mu|}} f(t_\mu; x_{c\mu}) \prod_{i \in \mu} \cos k_i(t_i - x_i) dt_i. \tag{14}$$

Зокрема, якщо $\mu = \{1\}$, то, розкладаючи функцію $f(x_1, x_2)$ в ряд Фур'є по змінній x_1, одержимо

$$S[f]_{\{1\}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{-1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t_1; x_2) \cos k_1(t_1 - x_1) dt_1, \tag{15}$$

аналогічно при $\mu = \{2\}$

$$S[f]_{\{2\}} = \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1; t_2) \cos k_2(t_2 - x_2) dt_2. \tag{16}$$

Ряди (15) та (16) називають частинними рядами Фур'є відповідно по змінних x_1 та x_2. У випадку, коли $\mu = M$ $S[f]_\mu = S[f]$.

Нехай далі $\overline{\psi}_i(k_i) := (\psi_i^{(1)}(k_i), \psi_i^{(2)}(k_i),)$, $i = 1, 2$, – пари довільних систем чисел $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2$, $k_i = 0, 1, 2, ...$; $\psi_i^{(1)}(0) = 1$, $\psi_i^{(2)}(0) = 0$, $i = 1, 2$.

Нехай дано функцію $f \in L(T^2)$ з рядом Фур'є (11) і множини $\mu \subseteq M$, послідовності

$$\overline{\psi}_i^2(k_i) := (\psi_i^{(1)}(k_i))^2 + (\psi_i^{(2)}(k_i))^2 \neq 0, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k_\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{|\mu|}}\int\limits_{T^{|\mu|}} f(t_\mu+x_{c\mu})\prod_{i\in\mu}\frac{1}{\overline{\psi}_i^2(k_i)}\Bigg(\psi_i^{(1)}(k_i)\cos k_i(t_i-x_i)+$$

$$+\psi_i^{(2)}(k_i)\sin k_i(t_i-x_i)\Bigg)dt_\mu \tag{17}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L(T^2)$ по змінних x_i, $i\in\mu$, то цю функцію назвемо $\overline{\psi}_\mu$-похідною функції $f(x)$ і позначимо через $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)$.

При $\mu=\{1\}$ $f^{\overline{\psi}_1}(x)$ – $\overline{\psi}_1$-похідна функції $f(x)$ по змінній x_1, при $\mu=\{2\}$ $f^{\overline{\psi}_2}(x)$ – $\overline{\psi}_2$-похідна функції $f(x)$ по змінній x_2, а при $\mu=\{1,2\}$ $f^{\overline{\psi}_{1,2}}(x)=f^{\overline{\psi}}(x)$ – $\overline{\psi}$-похідна функції $f(x)$ по змінних x_1 і x_2.

Множину функцій $f\in L(T^2)$ таких, що для $\forall\mu\subseteq M$ існують похідні $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)$, позначимо $L^{\overline{\psi}}$. Якщо $f\in L^{\overline{\psi}}$ і для будь-якого $\mu\subseteq M$, $f^{\overline{\psi}_\mu}\in\mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина з $L(T^2)$, то множину таких функцій позначимо через $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Підмножину неперервних функцій з $L^{\overline{\psi}}$ і $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначимо відповідно $C^{\overline{\psi}}$ і $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Нехай $C^{\overline{\psi}}_\infty$ – множина функцій $f(x)=f(x_1,x_2)$ 2π-періодичних по кожній змінній і які мають $\overline{\psi}_1$-похідну по змінній x_1, $\overline{\psi}_2$-похідну по змінній x_2 і $\overline{\psi}$-похідну по змінних x_1,x_2, причому майже скрізь $|f^{\overline{\psi}_1}(x)|\le 1$, $|f^{\overline{\psi}_2}(x)|\le 1$, $|f^{\overline{\psi}}(x)|\le 1$.

Введемо наступні позначення

$$S_{n_1,n_2}(f;x_1,x_2)=S_n(f;x)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}2^{-q(k_1,k_2)}A_{k_1,k_2}(f;x_1,x_2)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}2^{-q(k)}A_k(f;x)=\sum_{k=0}^{n}2^{-q(k)}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}f(t)\prod_{i=1}^{2}\cos k_i(t_i-x_i)dt \tag{18}$$

— прямокутна частинна сума ряду Фур'є (11),

$$\rho_n(f;x)=\rho_{n_1,n_2}(f;x_1,x_2)=$$

$$= f(x) - S_n(f;x) = f(x_1,x_2) - S_{n_1,n_2}(f;x_1,x_2) \tag{19}$$

— відхилення функції від її частинної суми ряду Фур'є.

Нехай $\mathcal{T}_{\mu,n_\mu}$ — множина функцій $t_{\mu,n_\mu}(x)$ таких, що при $\mu=\{1\}$ $\mathcal{T}_{\{1\},n_1}=\mathcal{T}_{n_1}=$

$$=\left\{t_{n_1}(x_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{n_1}(a_{k_1}(x_2;0)\cos k_1x_1+a_{k_1}(x_2;1)\sin k_1x_1)\right\}$$

— тригонометричний поліном по змінній x_1, коефіцієнти якого залежать від змінної x_2; при $\mu=\{2\}$ $\mathcal{T}_{\{2\},n_2}=\mathcal{T}_{n_2}=$

$$=\left\{t_{n_2}(x_1,x_2)=\sum_{k_2=0}^{n_2}(a_{k_2}(x_1;0)\cos k_2x_2+a_{k_2}(x_1;1)\sin k_2x_2)\right\}$$

— тригонометричний поліном по змінній x_2, коефіцієнти якого залежать від змінної x_1. А при $\mu=\{1,2\}$

$$\mathcal{T}_{\{1,2\},n}=\mathcal{T}_{n_1,n_2}=\left\{t_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=\right.$$

$$=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}(a_{k_1,k_2}(0;0)\cos k_1x_1\cos k_2x_2+$$

$$+a_{k_1,k_2}(1;0)\sin k_1x_1\cos k_2x_2+$$

$$\left.+a_{k_1,k_2}(0;1)\cos k_1x_1\sin k_2x_2+a_{k_1,k_2}(1;1)\sin k_1x_1\sin k_2x_2\right\}$$

— тригонометричний поліном за двома змінними. Нехай далі

$$E_{\mu,n_\mu}(\varphi)_C=\inf_{t_{\mu,n_\mu}\in\mathcal{T}_{\mu,n_\mu}}||\varphi(x)-t_{\mu,n_\mu}(x)||_C$$

— найкраще наближення функції $\varphi\in C$ функціями $t_{\mu,n_\mu}\in\mathcal{T}_{\mu,n_\mu}$.

В даній роботі встановлено аналог нерівності Лебега (10) для класів $\overline{\psi}$-диференційовних функцій двох змінних, де $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $i=1,2$, $j=1,2$, — квазіопуклі функції.

Теорема. *Нехай* $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_i^{(j)}(k) = 0$,

$$\sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{|\psi_i^{(2)}(k_i)|}{k_i} < \infty, \quad i = 1,2,$$

$$\sum_{k_i=1}^{\infty} k_i(|\Delta^2\psi_i^{(1)}(k_i+n_i-1)| + |\Delta^2\psi_i^{(2)}(k_i+n_i-1)|) < \infty,$$

де $\Delta^2\psi_i^{(j)}(k_i-1) = \psi_i^{(j)}(k_i-1) - 2\psi_i^{(j)}(k_i) + \psi_i^{(j)}(k_i+1)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$.

Тоді для $\forall f \in C^{\overline{\psi}}C^0$, $\forall n = (n_1, n_2)$, $n_i \in N$, $i = 1,2$,

$$\Big|\Big|\rho_n(f;x)\Big|\Big|_C \le E_{1,2;n}(f^{\overline{\psi}})\mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1})\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2}) +$$

$$+E_{1;n_1}(f^{\overline{\psi}_1})\mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1}) + E_{2;n_2}(f^{\overline{\psi}_2})\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2}) +$$

$$+O(1)\Bigg[E_{1;n_1}(f^{\overline{\psi}_1})R_{n_1} + E_{2;n_2}(f^{\overline{\psi}_2})R_{n_2} +$$

$$+E_{1,2;n}(f^{\overline{\psi}})\Big(R_{n_1}\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2}) + \mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1})R_{n_2} + R_{n_1}R_{n_2}\Big)\Bigg], \tag{20}$$

де

$$\mathcal{E}_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i}) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k_i=1}^{n_i}\frac{1}{k_i}\sqrt{(\psi_i^{(1)}(n_i+k_i))^2 + (\psi_i^{(2)}(n_i+k_i))^2} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k_i=2n_i+1}^{\infty}\frac{|\psi_i^{(2)}(k_i)|}{k_i},$$

$$|R_{n_i}| \le K_i \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i(|\Delta^2\psi_i^{(1)}(k_i+n_i-1)| + |\Delta^2\psi_i^{(2)}(k_i+n_i-1)|).$$

При $\psi_i \in F$ і $\psi_i^{(1)}(k_i) = \psi_i(k_i)\cos\beta_i\frac{\pi}{2}$, $\psi_i^{(2)}(k_i) = = \psi_i(k_i)\sin\beta_i\frac{\pi}{2}$ аналог нерівності Лебега належить О.І. Степанцю та Н.Л. Пачулії [9], а при $\psi_i^{(1)}(k_i) \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_i^{(2)}(k_i) \in \mathfrak{M}_0'$, — Р.А. Ласурії [4].

Доведення. Добре відомо (див. [6], с. 178), що у випадку $m = 1$ для довільної функції $f(\cdot) \in L^{\overline{\psi}}$ майже в кожній точці x справедлива рівність

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)F_n(\overline{\psi};t)dt, \qquad (21)$$

де

$$F_n(\overline{\psi};t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{(1)}(k)\cos kt + \psi^{(2)}(k)\sin kt,$$

$\overline{\psi} = (\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \in \mathfrak{L}$, тобто ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi^{(1)}(k)\cos kx + \psi^{(2)}(k)\sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$.

Згідно (15)

$$S_{n_1}(f;x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} 2^{-q(k_1)}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1-t_1,x_2)\cos k_1t_1dt_1.$$

На основі рівності (21) для функції $f(x)$ як для функції однієї змінної будемо мати

$$S_{n_1}(f;x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_1}(x_1-t_1,x_2)F_{n_1}(\overline{\psi}_1;t_1)dt_1, \qquad (22)$$

де

$$F_{n_1}(\overline{\psi}_1;t_1) = F_{n_1}(t_1) = \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty}(\psi_1^{(1)}(k_1)\cos k_1t_1 + \psi_1^{(2)}(k_1)\sin k_1t_1),$$

$\overline{\psi}_1 \in \mathfrak{L}$, а $f^{\overline{\psi}_1}(x_1,x_2)$ — частинна $\overline{\psi}_1$–похідна за О.І. Степанцем функції $f(x_1,x_2)$.

Оскільки на основі (22)

$$S_n(f;x) = S_{n_2}(S_{n_1}(f;x)) = S_{n_1}(f;x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(S_{n_1}(f;x_1,x_2-t_2))^{\overline{\psi}_2}F_{n_2}(\overline{\psi}_2;t_2)dt_2, \overline{\psi}_2\in\mathfrak{L}, \tag{23}$$

і

$$S_{n_1}^{\overline{\psi}_2}(f;x_1,x_2-t_2)=f^{\overline{\psi}_2}(x_1;x_2-t_2)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}}(x-t)F_{n_1}(t_1)dt_1, \tag{24}$$

то

$$S_n(f;x)=S_{n_1}(f;x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_2}(x_1,x_2-t_2)F_{n_2}(\overline{\psi}_2;t_2)dt_2+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}f^{\overline{\psi}}(x-t)F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2)dt_1dt_2.$$

Підставляючи в останню рівність значення $S_{n_1}(f;x)$ з (22), будемо мати

$$S_n(f;x)=f(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_1}(x_1-t_1,x_2)F_{n_1}(t_1)dt_1-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_2}(x_1,x_2-t_2)F_{n_2}(t_2)dt_2+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}f^{\overline{\psi}}(x-t)F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2)dt_1dt_2. \tag{25}$$

Звідси

$$\rho_n(f;x)=f(x)-S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_1}(x_1-t_1,x_2)F_{n_1}(t_1)dt_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_2}(x_1,x_2-t_2)F_{n_2}(t_2)dt_2-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}f^{\overline{\psi}}(x-t)F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2)dt_1dt_2.$$

Очевидно, що $\rho_n(f;x)$ можна записати у вигляді

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f^{\overline{\psi}_1}(x_1-t_1,x_2) - t_{1,n_1}(x_1-t_1,x_2)\right]F_{n_1}(t_1)dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f^{\overline{\psi}_2}(x_1,x_2-t_2) - t_{2,n_2}(x_1,x_2-t_2)\right]F_{n_2}(t_2)dt_2 -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{T^2}\left[f^{\overline{\psi}}(x-t) - t_{\{1,2\}}(x-t)\right]F_{n_1}(t_1)F_{n_2}(t_2)dt_1dt_2,$$

де $t_{1,n_1}(x_1,x_2)$ — тригонометричний поліном порядку n_1 по змінній x_1, $t_{2,n_2}(x_1,x_2)$ — тригонометричний поліном порядку n_2 по змінній x_2, а $t_{\{1,2\},n}(x)$ — тригонометричний поліном порядку n_1 по змінній x_1 і порядку n_2 по змінній x_2.

Покладемо

$$E_{\mu,n_\mu}(f)_C = \inf_{t_{\mu,n_\mu}\in\mathcal{T}_{\mu,n_\mu}} ||f(x) - t_{\mu,n_\mu}(x)||_C =$$

$$= ||f(x) - t^*_{\mu,n_\mu}(x)||_C,$$

де t^* — поліном найкращого наближення, тоді будемо мати

$$||\rho_n(f;x)||_C \leq$$

$$\leq E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1})\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_{n_1}(t_1)|dt_1 + E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2})\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_{n_2}(t_2)|dt_2 +$$

$$+E_{\{1,2\}n}(f^{\overline{\psi}})\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_{n_1}(t_1)|dt_1\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_{n_2}(t_2)|dt_2. \qquad (26)$$

Запишемо асимптотичну рівність для інтегралу $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_{n_i}(t_i)|dt_i$. Для цього використаємо один результат С.О. Теляковського ([10], формула (3.76)).

Теорема [10]. *Нехай коефіцієнти ряду*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

прямують до нуля і збігаються ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}$ *та*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(|\Delta^2a_{k-1}|+|\Delta^2b_{k-1}|). \tag{27}$$

Тоді справедлива оцінка

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k}{k}+2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}+$$

$$+O\left[|a_0|+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k(m-k)}{m}(|\Delta^2a_{k-1}|+|\Delta^2b_{k-1}|)+|a_m|+|b_m|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}k(|\Delta^2a_{m+k-1}|+|\Delta^2b_{m+k-1}|)\right], \tag{28}$$

де $\xi_k=\xi(b_k,\sqrt{(a_{m-k}-a_{m+k})^2+(b_{m-k}-b_{m+k})^2})$, *а функція* $\xi(t,u)$ *визначається рівністю*

$$\xi(t,u)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}|t|, & |u|\le|t|,\\ |t|\arcsin|\frac{t}{u}|+\sqrt{u^2-t^2}, & |t|<|u|.\end{cases}$$

Покладемо в формулі (28) $a_k=b_k=0$ при $k=1,2,...,n_i$, $i=1,2$, $a_k=\psi_i^{(1)}$, $b_k=\psi_i^{(2)}$, $k=n_i+1,n_i+2,...$, та $m=n_i$. Отримаємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}|F_{n_i}(t_i)|dt_i=$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{1}{k_i} \sqrt{(\psi_i^{(1)}(n_i+k_i))^2 + (\psi_i^{(2)}(n_i+k_i))^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k_i=2n_i+1}^{\infty} \frac{|\psi_i^{(2)}(k_i)|}{k_i} + O(1) \Bigg(\sum_{k_i=1}^{\infty} k_i (|\Delta^2 \psi_i^{(1)}(n_i+k_i-1)| +$$

$$+ |\Delta^2 \psi_i^{(2)}(n_i+k_i-1)|) \Bigg).$$

Тоді формулу (26) можна записати у вигляді

$$||\rho_n(f;x)||_C \leq E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1}) \times$$

$$\times \Bigg[\frac{4}{\pi^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{1}{k_1} \sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2 + (\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty} \frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1} + O(1) \Bigg(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 (|\Delta^2 \psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)| +$$

$$+ |\Delta^2 \psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|) \Bigg) \Bigg] + E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2}) \times$$

$$\times \Bigg[\frac{4}{\pi^2} \sum_{k_2=1}^{n_2} \frac{1}{k_2} \sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2 + (\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty} \frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2} + O(1) \Bigg(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 (|\Delta^2 \psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)| +$$

$$+ |\Delta^2 \psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|) \Bigg) \Bigg] + E_{\{1,2\}n}(f^{\overline{\psi}}) \times$$

$$\times \Bigg[\frac{4}{\pi^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{1}{k_1} \sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2 + (\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty} \frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1} + O(1) \Bigg(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 (|\Delta^2 \psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)| +$$

$$+|\Delta^2\psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|)\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\left[\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{1}{k_2}\sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2+(\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2}+O(1)\left(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2(|\Delta^2\psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)|+\right.$$

$$\left.\left.+|\Delta^2\psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|)\right)\right]=E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1})\times$$

$$\times\left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_1=1}^{n_1}\frac{1}{k_1}\sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2+(\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty}\frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1}\right)+E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2})\times$$

$$\times\left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{1}{k_2}\sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2+(\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2}\right)+E_{\{1,2\}n}(f^{\overline{\psi}})\times$$

$$\times\left(\frac{16}{\pi^4}\sum_{k_1=1}^{n_1}\frac{1}{k_1}\sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2+(\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2}\times\right.$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{1}{k_2}\sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2+(\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2}+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\sum_{k_1=1}^{n_1}\frac{1}{k_1}\sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2+(\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2}\times$$

$$\times\sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2}+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{1}{k_2}\sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2+(\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2}\times$$

$$\times\sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty}\frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty}\frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1}\sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2}\Bigg)+$$

$$+E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1})O(1)\Bigg(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1(|\Delta^2\psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)|+$$

$$+|\Delta^2\psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|)\Bigg)+E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2})\times$$

$$\times O(1)\Bigg(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2(|\Delta^2\psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)|+|\Delta^2\psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|)\Bigg)+$$

$$+E_{\{1,2\},n}(f^{\overline{\psi}})\times$$

$$\times O(1)\Bigg[\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_2=1}^{n_2}\frac{1}{k_2}\sqrt{(\psi_2^{(1)}(n_2+k_2))^2+(\psi_2^{(2)}(n_2+k_2))^2}\times$$

$$\times\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1(|\Delta^2\psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)|+|\Delta^2\psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k_2=2n_2+1}^{\infty}\frac{|\psi_2^{(2)}(k_2)|}{k_2}\times$$

$$\times\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1(|\Delta^2\psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)|+|\Delta^2\psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|)+$$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_1=1}^{n_1}\frac{1}{k_1}\sqrt{(\psi_1^{(1)}(n_1+k_1))^2+(\psi_1^{(2)}(n_1+k_1))^2}\times$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2(|\Delta^2\psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)|+|\Delta^2\psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k_1=2n_1+1}^{\infty}\frac{|\psi_1^{(2)}(k_1)|}{k_1}\times$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2(|\Delta^2\psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)|+|\Delta^2\psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|)+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1(|\Delta^2\psi_1^{(1)}(n_1+k_1-1)|+|\Delta^2\psi_1^{(2)}(n_1+k_1-1)|)\times$$

$$\left.\times\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2(|\Delta^2\psi_2^{(1)}(n_2+k_2-1)|+|\Delta^2\psi_2^{(2)}(n_2+k_2-1)|)\right]=$$

$$=E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1})\mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1})+E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2})\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2})+$$

$$+E_{\{1,2\}n}(f^{\overline{\psi}})\mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1})\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2})+$$

$$+O(1)\left[E_{1,n_1}(f^{\overline{\psi}_1})R_{n_1}+E_{2,n_2}(f^{\overline{\psi}_2})R_{n_2}+\right.$$

$$\left.+E_{\{1,2\}n}(f^{\overline{\psi}})\left(R_{n_1}\mathcal{E}_{n_2}(C_\infty^{\overline{\psi}_2})+\mathcal{E}_{n_1}(C_\infty^{\overline{\psi}_1})R_{n_2}+R_{n_1}R_{n_2}\right)\right],$$

де

$$\mathcal{E}_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i})=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_i=1}^{n_i}\frac{1}{k_i}\sqrt{(\psi_i^{(1)}(n_i+k_i))^2+(\psi_i^{(2)}(n_i+k_i))^2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k_i=2n_i+1}^{\infty}\frac{|\psi_i^{(2)}(k_i)|}{k_i},$$

$$|R_{n_i}|\le K_i\sum_{k_i=1}^{\infty}k_i(|\Delta^2\psi_i^{(1)}(k_i+n_i-1)|+|\Delta^2\psi_i^{(2)}(k_i+n_i-1)|).$$

Що й доводить співвідношення (20).

1. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonometrique approcheé des founctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France — 1910. — **38.** — P. 184–210

2. *Задерей П. В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций: Сб. научн. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. — С. 16–28.
3. *Задерей Н. М., Задерей П. В.* Про нерівність Лебега на класах $\overline{\psi}$–диференційовних функцій // Укр. мат. журнал. — 2013. — **65**, № 6. — С. 844–849.
4. *Ласурия Р. А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций (небольшая гладкость) // Укр. мат. журнал. — 2003. — **55**, № 7. — С. 911–918.
5. *Осколков К. И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. — 1975. — **18,** №4. — С. 515–526.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.
7. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. 2. — 467 с.
8. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журнал. — 1991. — **43**, № 4. — С. 545–555.
9. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций. – К., 1990. — С. 1–16. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.55).
10. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Приближение периодических функций: Тр. МИАН СССР, **109.** — 1971 — С. 65–97.