Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 8-28

УДК 517.524

Т. М. Антонова (Національний уріверситет "Львівська політехніка", Львів)
О. М. Сусь (Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН україни імені Підстригача, Львів)

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

The necessary conditions of convergence for two-dimensional continued fractions which elements belong to some angular sets of right half-plane have been established.

Встановлено необхідні умови збіжності двовимірних неперервних дробів, елементи яких належать кутовим множинам правої півплощини.

Двовимірні неперервні дроби (ДНД) є одним із методів раціональної апроксимації функцій від двох змінних. Аналітична теорія ДНД розвинута в працях Х. Кучмінської [1], Д. Боднара [2], J. A. Murphy, M. R. O'Donohoe [3], A. Cuyt, B. Verdonk [4], W. Siemaszko [5], О. Сусь [6], Т. Антонової [7]. Відомо, що при вивченні властивостей ДНД використовують різні типи наближень. Їх розглянуто в роботі [8].

У даній роботі об'єктом дослідження є ДНД вигляду

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{j,0}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{0,j}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_{k,k}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_{j+k,k}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_{k,j+k}}}, \tag{1}$$

де всі частинні знаменники $b_{k,j},\ k,\ j=0,\,1,\,\ldots,\,k+j\neq 0,$ – комплексні числа, які належать множині

$$G_\beta=\left\{z\in\mathbb{C}:\ z\neq 0,\ |\arg z|\leq\beta<\frac{\pi}{2}\right\}, \tag{2}$$

та його наближення

.

$$f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n} \frac{1}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n} \frac{1}{b_{0,j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{1}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-k} \frac{1}{b_{j+k,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-k} \frac{1}{b_{k,j+k}}}, \quad (3)$$

$$n = 1,\, 2,\, \ldots,$$

$$\hat{f}_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n-1}]} \frac{1}{b_{0,j}} + \quad (4)$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[\sqrt{n+1}]-1} \frac{1}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k}]-k} \frac{1}{b_{j+k,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k-1}]-k} \frac{1}{b_{k,j+k}}}, n = 1,\, 2,\, \ldots .$$

Наближення вигляду (3) називаються звичайними n-ми наближеннями ДНД (1), а скінченні ДНД вигляду (4) — n-ми фігурними наближеннями ДНД (1). Властивості таких наближень розглядаються у роботі [8] . Зокрема,

$$\hat{f}_{n^2+2n} = f_n,$$

тобто послідовність $\{f_n\}$ є підпослідовністю послідовності $\{\hat{f}_n\}$.

За аналогією з неперервними дробами [9], ДНД (1), всі частинні знаменники якого належать кутовій множині правої півплощини вигляду (2), називаємо правильними ДНД типу Ван Флека.

Однією з важливих задач аналітичної теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень, зокрема і ДНД, є дослідження їх збіжності. Деякі достатні умови збіжності для правильних ДНД типу Ван Флека встановлено в роботах [10]–[12]. Що стосується необхідних умов збіжності, то в роботі [13] встановлено аналог теореми Штерна-Штольца для ДНД вигляду (1) з комплексними елементами.

У даній роботі встановимо необхідні умови збіжності та фігурної збіжності для правильних ДНД типу Ван Флека, діючи за схемою, запропонованою Д.Боднаром при доведенні теорем про необхідні умови збіжності гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами [2, т. 3.2, т. 3.3], та використаною Т.Антоновою [14] при дослідженні необхідних умов збіжності одного класу гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами.

Означення 1. *ДНД (1) називається збіжним (фігурно збіжним), якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *(фігурних підхідних дробів* $\hat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n$*).*

Означення 2. *ДНД (1) називається розбіжним (фігурно розбіжним), якщо не існує границі послідовності його наближень або* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$ *(* $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n = \infty$*).*

Вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = b_{j,j}, \quad Q_k^{(p+1)} = b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p+1} \frac{1}{b_{j+k,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{p+1} \frac{1}{b_{k,j+k}} + \frac{1}{Q_{k+1}^{(p)}},$$

$$j, k = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 0,\, 1,\, \ldots,$$

називаються двовимірними залишками звичайних наближень (3), а вирази

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)} = b_{k+j,k} + \frac{1}{Q_{k+j,k}^{(p)}}, \quad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = b_{k,k+j} + \frac{1}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}},$$

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = b_{k+j,k}, \quad Q_{k,k+j}^{(0)} = b_{k,k+j}, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots, \quad k, p = 0,\, 1,\, \ldots,$$

— їх одновимірними залишками.

Двовимірні залишки фігурних наближень вигляду (4) означимо у такий спосіб:

$$\hat{Q}_j^{(0)} = b_{j,j}, \quad \hat{Q}_j^{(1)} = b_{j,j} + \frac{1}{b_{j+1,j}} \quad \hat{Q}_j^{(2)} = b_{j,j} + \frac{1}{b_{j+1,j}} + \frac{1}{b_{j,j+1}},$$

$$\hat{Q}_k^{(p)} = b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{p-1}]} \frac{1}{b_{k,j+k}} + \frac{1}{\hat{Q}_{k+1}^{\alpha(p)}},$$

$$k, j = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 3,\, 4,\, \ldots,$$

де

$$\alpha(p) = \begin{cases} l^2 - 1, & \text{якщо } l^2 + 2l \le p \le l^2 + 2l + 2, \\ p - 3 - 2l, & \text{якщо } l^2 + 2l + 3 \le p \le l^2 + 4l + 2, \end{cases}$$

l — ціле додатне число.

Для дослідження властивостей послідовностей звичайних та фігурних наближень ДНД (1) використовуються формули різниці двох наближень, зокрема, для звичайних наближень така формула має вигляд

$$f_n - f_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \left(\varphi_{k,1}^{(n-k)} - \varphi_{k,1}^{(m-k)} + \varphi_{k,2}^{(n-k)} - \varphi_{k,2}^{(m-k)}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{k} Q_j^{(n-j)} Q_j^{(m-j)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{\prod\limits_{j=1}^{m} Q_j^{m-j} \prod\limits_{j=1}^{m+1} Q_j^{n-j}}, \quad n > m, \tag{5}$$

де

$$\varphi_{i,1}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{i+j,i}} = \frac{1}{Q_{i+1,i}^{(p-1)}}, \quad \varphi_{i,2}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{i,i+j}} = \frac{1}{Q_{i,i+1}^{(p-1)}}, \tag{6}$$

$$\varphi_{i,1}^{(0)} = \varphi_{i,2}^{(0)} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots .$$

Формула різниці $\hat{f}_{s+1} - \hat{f}_s,\ s =\geq 3$, розглянута у роботі [8]:
для $s = k^2 + 4k + 2,\ k = 1, 2, \ldots,$

$$\hat{f}_{s+1} - \hat{f}_s = (-1)^k \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k+1} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(s+1))} \prod\limits_{j=1}^{k} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(s))}}, \tag{7}$$

для $s = k^2 + 2k + 2r,\ k = 1, 2, \ldots,\ 0 \le r \le k,$

$$\hat{f}_{s+1} - \hat{f}_s = (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(s+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(s))}} \left(\varphi_{r,1}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,1}^{(k-r)}\right), \tag{8}$$

для $s = k^2 + 2k + 2r + 1,\ k = 1, 2, \ldots,\ 0 \le r \le k,$

$$\hat{f}_{s+1} - \hat{f}_s = (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(s+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(s))}} \left(\varphi_{r,2}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,2}^{(k-r)} \right), \tag{9}$$

де

$$\alpha_0(p) = p, \quad \alpha_k(p) = \alpha(\alpha_{k-1}(p)), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Введемо позначення

$$\Phi_i^{(0)} = b_{i,i}, \quad \Phi_i^{(p)} = b_{i,i} + \varphi_{i,1}^{(p)} + \varphi_{i,2}^{(p)} = b_{i,i} + \frac{1}{Q_{i+1,i}^{(p-1)}} + \frac{1}{Q_{i,i+1}^{(p-1)}}, \tag{10}$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{\Phi}_i^{(0)} = b_{i,i},\ \hat{\Phi}_i^{(1)} = b_{i,i} + \frac{1}{Q_{i+1,i}^{(0)}}, \quad \hat{\Phi}_i^{(p)} = b_{i,i} + \frac{1}{Q_{i+1,i}^{([\sqrt{p}]-1)}} + \frac{1}{Q_{i,i+1}^{([\sqrt{p-1}]-1)}}, \tag{11}$$

$$i = 0, 1, \ldots, \quad p = 2, 3, \ldots .$$

$$\beta_{p,j} = \arg b_{p,j},\ \beta_{j,p} = \arg b_{j,p},\ \beta_i^{(p)} = \arg \Phi_i^{(p)},\ \hat{\beta}_i^{(p)} = \arg \hat{\Phi}_i^{(p)}, \tag{12}$$

$$i = 1, 2, \ldots,\ p = 0, 1, \ldots .$$

Тоді двовимірні залишки звичайних та фігурних наближень ДНД (1) подамо у вигляді

$$Q_i^{(0)} = \Phi_i^{(0)}, \quad Q_i^{(p)} = \Phi_i^{(p)} + \frac{1}{Q_{i+1}^{(p-1)}}, \quad i, p = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$\hat{Q}_i^{(r)} = \hat{\Phi}_i^{(r)}, \quad \hat{Q}_i^{(p)} = \hat{\Phi}_i^{(p)} + \frac{1}{\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}}, \tag{14}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \quad r = 0, 1, 2, \quad p = 3, 4, \ldots,$$

а їх дійсні частини — у вигляді

$$\Re Q_i^{(0)} = \Re \Phi_i^{(0)}, \quad \Re Q_i^{(p)} = \Re \Phi_i^{(p)} + \frac{\cos \arg Q_{i+1}^{(p-1)}}{\left| Q_{i+1}^{(p-1)} \right|}, \quad i, p = 1, 2, \ldots,$$

$$\Re\hat{Q}_i^{(r)} = \Re\hat{\Phi}_i^{(r)}, \quad \Re\hat{Q}_i^{(p)} = \Re\hat{\Phi}_i^{(p)} + \frac{\cos\arg\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}}{\left|\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}\right|},$$
$$i = 1,\, 2,\, \ldots, \quad r = 0,\, 1,\, 2, \quad p = 3,\, 4,\, \ldots.$$

Зауважимо, що з умови $b_{i,j} \in G_\beta$ $i,\, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, i+j \neq 0$, випливає, що $\dfrac{1}{b_{i,j}} \in G_\beta,\ \ b_{i,i} + \dfrac{1}{b_{i+1,j}} \in G_\beta,\ \ldots$. Тому

$$\hat{\Phi}_i^{(p)} \in G_\beta, \quad \hat{Q}_i^{(p)} \in G_\beta, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 0,\, 1,\, \ldots.$$

Враховуючи позначення (11), (12), формули (14), отримаємо:

$$|b_{i,i}|\cos\beta_{i,i} \le \Re\hat{\Phi}_i^{(p)} \le \left|\hat{\Phi}_i^{(p)}\right| \le |b_{i,i}| + \frac{1}{|b_{i+1,i}|\cos\beta} + \frac{1}{|b_{i+1,i}|\cos\beta}, \tag{15}$$
$$i = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 0,\, 1,\, \ldots,$$

$$\Re\hat{\Phi}_i^{(p)} + \frac{\cos\beta}{\left|\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}\right|} \le \Re\hat{Q}_i^{(p)} \le \left|\hat{Q}_i^{(p)}\right| \le \left|\hat{\Phi}_i^{(p)}\right| + \frac{1}{\Re\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}}, \tag{16}$$
$$i = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 3,\, 4,\, \ldots.$$

З означення (14) двовимірних залишків ДНД (1) і оцінок (15), (16) випливає, що

$$|b_{i,i}|\cos\beta_{i,i} \le \left|\hat{Q}_i^{(p)}\right| \le$$
$$\le |b_{i,i}| + \frac{1}{|b_{i+1,i+1}|\cos\beta_{i,i}} + \frac{1}{|b_{i+1,i}|\cos\beta} + \frac{1}{|b_{i,i+1}|\cos\beta}, \tag{17}$$
$$i = 1,\, 2,\, \ldots, \quad p = 0,\, 1,\, \ldots.$$

Теорема 1. *ДНД (1), всі частинні знаменники якого належать області (2), фігурно розбігається, якщо виконується хоча б одна з умов:*

(A)

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=2}^{2m+1} \hat{d}_{j-1,0}\left(\hat{d}_{j,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{2m-2[j/2]} \frac{\hat{c}_{j,r}}{\hat{d}_{j,r}}\right) < \infty, \tag{18}$$

де $\displaystyle\mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{0}\frac{\hat{c}_{j,r}}{\hat{d}_{j,r}}=0,$

$$\hat{d}_{p,2l-1}=|b_{p+2l-1,p+2l-1}|\cos\beta_{p+2l-1,p+2l-1},$$
$$\hat{c}_{p,2l-1}=1,\quad l,p=1,\,2,\,\ldots, \tag{19}$$
$$\hat{d}_{p,2l}=|b_{p+2l,p+2l}|+\frac{1}{|b_{p+2l+1,p+2l}|\cos\beta}+\frac{1}{|b_{p+2l,p+2l+1}|\cos\beta},$$
$$\hat{c}_{p,2l}=\cos\beta,\quad p=1,\,2,\,\ldots,\quad l=0,\,1,\,\ldots; \tag{20}$$

(B) *збігається хоча б один з рядів*

$$\sum_{j=1}^{\infty}|b_{i+j,i}|,\quad \sum_{j=1}^{\infty}|b_{i,i+j}|,\quad i=0,\,1,\,\ldots\,.$$

Доведення. (A) Якщо у формулі (7) покласти $k=2m$, отримаємо

$$\left|\hat{f}_{k^2+4k+3}-\hat{f}_{k^2+4k+2}\right|=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|\hat{Q}_j^{(\alpha_j(k^2+4k+3))}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\hat{Q}_j^{(\alpha_j(k^2+4k+2))}\right|}=$$

$$=\frac{1}{\left|\hat{Q}_1^{(\alpha_1(k^2+4k+3))}\right|}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))}\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right|}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j+1}(k^2+4k+3))}\hat{Q}_{2j+1}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+3))}\right|}.$$

Оцінимо вирази

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))}\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right|},\quad \frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j+1}(k^2+4k+3))}\hat{Q}_{2j+1}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+3))}\right|}.$$

Враховуючи формулу (14) для фігурних двовимірних залишків, маємо

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))}\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right|}=$$

$$= \frac{1}{\left|\hat{\Phi}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))} + \dfrac{1}{\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}}\right| \left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right|} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\left|\hat{\Phi}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))}\right| \left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right| + 1}.$$

Встановимо оцінку зверху для $\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right|$, де $p = k^2 + 4k + 2$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Спочатку зауважимо, що

$$\left|\hat{Q}_{2m}^{(\alpha_{2m}(p))}\right| = \left|\hat{Q}_{2m}^{(2)}\right| = \left|\hat{\Phi}_{2m}^{(2)}\right| \leq |b_{2m,2m}| + \frac{1}{|b_{2m+1,2m}|} + \frac{1}{|b_{2m,2m+1}|}.$$

Далі, використовуючи нерівності (16), одержимо для $j < m$:

$$\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| \leq \left|\hat{\Phi}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| + \frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j+1}^{(\alpha_{2j+1}(p))}\right|} \leq$$

$$\leq \left|\hat{\Phi}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| + \frac{1}{\Re\hat{\Phi}_{2j+1}^{(\alpha_{2j+1}(p))} + \dfrac{\cos\beta}{\left|\hat{Q}_{2j+2}^{(\alpha_{2j+2}(p))}\right|}} \leq \left|\hat{\Phi}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| +$$

$$+ \frac{1}{\Re\hat{\Phi}_{2j+1}^{(\alpha_{2j+1}(p))} + \dfrac{\cos\beta}{\left|\hat{\Phi}_{2j+2}^{(\alpha_{2j+2}(p))}\right| + \dfrac{1}{\Re\hat{\Phi}_{2j+3}^{(\alpha_{2j+3}(p))} + \dfrac{\cos\beta}{\left|\hat{Q}_{2j+4}^{(\alpha_{2j+4}(p))}\right|}}}} \leq \cdots \leq$$

$$\leq \left|\hat{\Phi}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{2m-2j} \frac{\hat{P}_{2j,r}}{\hat{R}_{2j,r}},$$

де

$$\hat{P}_{2j,2l-1} = 1, \quad \hat{R}_{2j,2l-1} = \Re\hat{\Phi}_{2j+2l-1}^{(\alpha_{2j+2l-1}(p))}, \quad 1 \leq l \leq m - j,$$

$$\hat{P}_{2j,2l} = \cos\beta, \quad \hat{R}_{2j,2l} = \left|\hat{\Phi}_{2j+2l}^{(\alpha_{2j+2l}(k^2+4k+2))}\right|, \quad 1 \leq l \leq m - j.$$

Беручи до уваги ще й нерівності (15), робимо висновв, що

$$\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(p))}\right| \le \hat{d}_{2j,0} + \underset{r=1}{\overset{2m-2j}{\mathrm{D}}} \frac{\hat{c}_{2j,r}}{\hat{d}_{2j,r}},$$

де коефіцієнти неперервного дробу визначаються за формулами (19), (20) і

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j-1}^{(\alpha_{2j-1}(k^2+4k+2))}\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+2))}\right|} \ge \frac{1}{\hat{M}_{2j}^{(2m-2j)}+1}, \ 1 \le j \le m, \quad (21)$$

Діючи аналогічно, покажемо, що

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}_{2j}^{(\alpha_{2j}(k^2+4k+3))}\hat{Q}_{2j+1}^{(\alpha_{2j+1}(k^2+4k+3))}\right|} \ge \frac{1}{\hat{M}_{2j+1}^{(2m-2j)}+1}, \quad 1 \le j \le m. \quad (22)$$

У нерівностях (21), (22) $\hat{M}_{2j}^{(2m-2j)}$, $\hat{M}_{2j+1}^{(2m-2j)}$ — вирази вигляду

$$\hat{M}_{2j}^{(2m-2j)} = \hat{d}_{2j-1,0}\left(\hat{d}_{2j,0} + \underset{r=1}{\overset{2m-2j}{\mathrm{D}}} \frac{\hat{c}_{2j,r}}{\hat{d}_{2j,r}}\right),$$

$$\hat{M}_{2j+1}^{(2m-2j)} = \hat{d}_{2j,0}\left(\hat{d}_{2j+1,0} + \underset{r=1}{\overset{2m-2j}{\mathrm{D}}} \frac{\hat{c}_{2j+1,r}}{\hat{d}_{2j+1,r}}\right),$$

елементи $\hat{d}_{p,0}$, $\hat{c}_{p,l}$, $\hat{d}_{p,l}$, $p,l = 1,2,\ldots,$ визначаються за формулами (19), (20).

Крім того, враховуючи оцінку (17), одержимо

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}_{1}^{(\alpha_1(k^2+4k+3))}\right|} \ge$$

$$\ge \frac{1}{|b_{1,1}| + \dfrac{1}{|b_{2,1}|\cos\beta} + \dfrac{1}{|b_{1,2}|\cos\beta} + \dfrac{1}{|b_{2,2}|\cos\beta_{2,2}}} = C.$$

Таким чином,

$$\left|\hat{f}_{k^2+4k+3} - \hat{f}_{k^2+4k+2}\right| \ge$$

$$\geq C\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+\hat{M}_{2j}^{(2m-2j)}}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1+\hat{M}_{2j+1}^{(2m-2j)}}=C\prod_{j=2}^{2m+1}\frac{1}{1+\hat{M}_{j}^{(2m-2[j/2])}},$$

звідки з урахуванням умови (18) випливає фігурна розбіжність ДНД (1).

(В) Припустимо, що для деякого значення $i=r$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{i+j,i}|$ збігається. Це означає, що дріб $\varphi_{r,1}^{(\infty)}$ розбігається (за теоремою Штерна–Штольца [15, т. 4.19]), причому

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_{r,1}^{(2l-1)}<\infty,\quad \lim_{l\to\infty}\varphi_{r,1}^{(2l)}<\infty,\quad \lim_{l\to\infty}\varphi_{r,1}^{(2l-1)}\neq\lim_{l\to\infty}\varphi_{r,1}^{(2l)}. \qquad (23)$$

Використовуючи формулу (8) і оцінку (17), розглянемо різницю

$$\left|\hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r+1}-\hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r}\right|=$$

$$=\frac{\left|\varphi_{r,1}^{(p+1)}-\varphi_{r,1}^{(p)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{r}\left|\hat{Q}_j^{(\alpha_j((p+r)^2+2(p+r)+2r+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j((p+r)^2+2(p+r)+2r))}\right|}\geq$$

$$\geq\frac{\left|\varphi_{r,1}^{(p+1)}-\varphi_{r,1}^{(p)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{r}\left(|b_{j,j}|+\dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|\cos\beta}+\dfrac{1}{|b_{j+1,j}|\cos\beta}+\dfrac{1}{|b_{j,j+1}|\cos\beta}\right)^2}.$$

Спрямовуючи $p\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{p\to\infty}\left|\hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r+1}-\hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r}\right|\geq$$

$$\geq\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\left|\varphi_{r,1}^{(p+1)}-\varphi_{r,1}^{(p)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{r}\left(|b_{j,j}|+\dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|\cos\beta}+\dfrac{1}{|b_{j+1,j}|\cos\beta}+\dfrac{1}{|b_{j,j+1}|\cos\beta}\right)^2},$$

отже, ДНД (1) фігурно розбігається.

Якщо для деякого значення $i = r$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_{i,i+j}|$ збігається, то діючи аналогічно з урахуванням формули (9), доходимо висновку, що

$$\lim_{p\to\infty}\left|\hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r+2} - \hat{f}_{(p+r)^2+2(p+r)+2r+1}\right| \geq$$

$$\geq \frac{\lim\limits_{p\to\infty}\left|\varphi_{r,2}^{(p+1)} - \varphi_{r,2}^{(p)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{r}\left(|b_{j,j}| + \dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|\cos\beta} + \dfrac{1}{|b_{j+1,j}|\cos\beta} + \dfrac{1}{|b_{j,j+1}|\cos\beta}\right)^2}.$$

Теорема доведена.

Припустимо тепер, що для елементів ДНД (1) справджуються наступні умови

$$|\beta_{0,1}| \geq |\beta_{0,2}| \geq \ldots, \quad |\beta_{1,0}| \geq |\beta_{2,0}| \geq \ldots,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{0,j}| < \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{j,0}| < \frac{\pi}{4}, \tag{24}$$

$$b_{k,k} \in G_k,\ b_{j+k,j} \in G_{k+j},\ b_{j,k+j} \in G_{k+j},\ j = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

де

$$G_k = \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ |\arg z| \leq \theta_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

$\theta_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — такі невід'ємні сталі, що

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \geq \theta_k \geq \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k < \frac{\pi}{4}. \tag{27}$$

Тоді

$$\Phi_k^{(p)} \in G_k, \quad Q_k^{(p)} \in G_k, \quad Q_{k+j,k}^{(p)} \in G_{k+j}, \quad Q_{k,k+j}^{(p)} \in G_{k+j}, \tag{28}$$

$$j, k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

$$\begin{gathered} Q_{0,k}^{(p)} \in G_{0,k} = \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ |\arg z| \leq \beta_{0,k}\}, \\ Q_{k,0}^{(p)} \in G_{k,0} = \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ |\arg z| \leq \beta_{k,0}\}, \\ k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{29}$$

і

$$|b_{i,i}|\cos\beta_{i,i} \le \Re\Phi_i^{(p)} + \frac{\cos\theta_{i+1}}{\left|Q_{i+1}^{(p-1)}\right|} \le \Re Q_i^{(p)} \le \left|Q_i^{(p)}\right| \le \tag{30}$$

$$\le \left|\Phi_i^{(p)}\right| + \frac{1}{\Re Q_{i+1}^{(p-1)}}, \quad i, p = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

Надалі використовуватимемо такі позначення:

$$\psi_{k+j,k}^{(p)} = \arg Q_{k+j,k}^{(p)}, \quad \psi_{k,k+j,}^{(p)} = \arg Q_{k,k+j}^{(p)}, \quad \psi_j^{(p)} = \arg Q_j^{(p)}, \tag{31}$$
$$j = 1,\, 2,\, \ldots, \quad k,\, p = 0,\, 1,\, \ldots,$$

$$\Psi_{k,1}^{(p)} = \sum_{j=1}^{p} \psi_{k+j,k}^{(p-j)}, \quad \Psi_{k,2}^{(p)} = \sum_{j=1}^{p} \psi_{k,k+j}^{(p-j)}, \quad \Psi_i^{(p)} = \sum_{j=1}^{i} \psi_j^{(p-j)}, \tag{32}$$
$$k = 0,\, 1,\, \ldots, \quad i,\, p = 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

Зауважимо, що

$$\left|Q_{i+j,j}^{(p)}\right| = \left|Q_{i+j,j}^{(p)} \exp\left(-\beta_{i+j,j}\right)\right| \ge \Re\left(Q_{i+j,j}^{(p)} \exp\left(-\beta_{i+j,j}\right)\right) =$$
$$= |b_{i+j,j}| + \frac{\cos\left(\beta_{i+j,j} + \psi_{i+j+1,j}^{(p-1)}\right)}{\left|Q_{i+j+1,j}^{(p-1)}\right|} \ge |b_{i+j,j}| + \frac{\cos\left(2\theta_{i+j}\right)}{\left|Q_{i+j+1,j}^{(p-1)}\right|},$$
$$\left|Q_{j,i+j}^{(p)}\right| \ge \Re\left(Q_{j,i+j}^{(p)} \exp\left(-\beta_{j,i+j}\right)\right) \ge |b_{j,i+j}| + \frac{\cos\left(2\theta_{i+j}\right)}{\left|Q_{j,i+j+1}^{(p-1)}\right|},$$
$$i,\, p = 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,$$

тому

$$\left|\Phi_j^{(p)}\right| \le |b_{j,j}| + \frac{1}{|b_{j+1,j}|} + \frac{1}{|b_{j,j+1}|},\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\ p = 0,\, 1,\, \ldots\,. \tag{33}$$

Крім того,

$$\left|Q_j^{(p)}\right| \ge \Re\left(Q_j^{(p)} \exp\left(-\beta_{j,j}\right)\right) = |b_{j,j}| + \Re\frac{\exp\left(-\beta_{j,j} - \psi_{j+1,j}^{(p-1)}\right)}{\left|Q_{j+1,j}^{(p-1)}\right|} +$$

$$+\Re\frac{\exp\left(-\beta_{j,j}-\psi^{(p-1)}_{j,j+1}\right)}{\left|Q^{(p-1)}_{j,j+1}\right|}+\Re\frac{\exp\left(-\beta_{j,j}-\psi^{(p-1)}_{j+1,j+1}\right)}{\left|Q^{(p-1)}_{j+1,j+1}\right|}=|b_{j,j}|+$$

$$+\frac{\cos\left(\beta_{j,j}+\psi^{(p-1)}_{j+1,j}\right)}{\left|Q^{(p-1)}_{j+1,j}\right|}+\frac{\cos\left(\beta_{j,j}+\psi^{(p-1)}_{j,j+1}\right)}{\left|Q^{(p-1)}_{j,j+1}\right|}+\frac{\cos\left(\beta_{j,j}+\psi^{(p-1)}_{j+1,j+1}\right)}{\left|Q^{(p-1)}_{j+1}\right|}\geq$$

$$\geq|b_{j,j}|+\frac{\cos(2\theta_j)}{\left|Q^{(p-1)}_{j+1,j}\right|}+\frac{\cos(2\theta_j)}{\left|Q^{(p-1)}_{j,j+1}\right|}+\frac{\cos(2\theta_j)}{\left|Q^{(p-1)}_{j+1}\right|},\quad j,\, p=1,\,2,\,\ldots,$$

отже,

$$|b_{i,i}|\leq\left|Q^{(p)}_i\right|\leq|b_{i,i}|+\frac{1}{|b_{i+1,i+1}|}+\frac{1}{|b_{i+1,i}|}+\frac{1}{|b_{i,i+1}|},\tag{34}$$

$$i=1,\,2,\,\ldots,\quad p=0,\,1,\,\ldots.$$

Теорема 2. *ДНД (1), елементи якого задовольняють умови (24)–(27), розбігається, якщо виконується хоча б одна з умов*

(A)

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=2}^{2m+1}d_{j-1,0}\left(d_{j,0}+\mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{2m-2[j/2]}\frac{c_{j,r}}{d_{j,r}}\right)<\infty,\tag{35}$$

де

$$d_{p,2l-1}=|b_{p+2l-1,p+2l-1}|\cos\beta_{p+2l-1,p+2l-1},$$
$$c_{p,2l-1}=1,\quad l,p=1,\,2,\,\ldots,\tag{36}$$

$$d_{p,2l}=|b_{p+2l,p+2l}|+\frac{1}{|b_{p+2l+1,p+2l}|}+\frac{1}{|b_{p+2lp+2l+1}|},\qquad c_{p,2l}=\cos\theta_{p+2l},\quad p=1,\,2,\,\ldots,\ l=0,\,1,\,\ldots.\tag{37}$$

(B) *збігається хоча б один з рядів*

$$\sum_{j=1}^{\infty}|b_{i+j,i}|,\quad\sum_{j=1}^{\infty}|b_{i,i+j}|,\quad i=0,\,1,\,\ldots$$

.

Доведення. Використовуючи формулу (5) різниці двох звичайних наближень, позначення (6), (10), (31)–(32), співвідношення (13), (28)–(30), одержимо

$$\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)=\Re\left(\varphi_{0,1}^{(2m+1)}-\varphi_{0,1}^{(2m)}+\varphi_{0,2}^{(2m+1)}-\varphi_{0,2}^{(2m)}\right)+$$

$$+\Re\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^k\left(\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,1}^{(2m-k)}+\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right)}{\exp\left(i\Psi_k^{(2m+1)}+i\Psi_k^{(2m)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|\left|Q_j^{(2m-j)}\right|}+$$

$$+\Re\frac{1}{\exp\left(i\Psi_{2m+1}^{(2m+1)}+i\Psi_{2m}^{(2m)}\right)\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}=$$

$$=\frac{\cos\left(\Psi_{0,1}^{(2m+1)}+\Psi_{0,1}^{(2m)}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_{j,0}^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_{j,0}^{(2m+1-j)}\right|}+\frac{\cos\left(\Psi_{0,2}^{(2m+1)}+\Psi_{0,2}^{(2m)}\right))}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_{0,j}^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_{0,j}^{(2m+1-j)}\right|}+$$

$$+\frac{\cos\left(\Psi_{2m+1}^{(2m+1)}+\Psi_{2m}^{(2m)}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}+\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}Q_j^{(2m-j)}\right|}\times$$

$$\times\left(\frac{\cos\left(\Psi_{k,1}^{(2m+1)}+\Psi_{k,1}^{(2m)}+\Psi_k^{(2m+1)}+\Psi_k^{(2m)}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m+1-k}\left|Q_{k+j,k}^{(2m+1-k-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m-k}\left|Q_{k+j,k}^{(2m-k-j)}\right|}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\left(\Psi_{k,2}^{(2m+1)}+\Psi_{k,2}^{(2m)}+\Psi_k^{(2m+1)}+\Psi_k^{(2m)}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m+1-k}\left|Q_{k,k+j}^{(2m+1-k-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m-k}\left|Q_{k,k+j}^{(2m-k-j)}\right|}\right).$$

Використовуючи позначення (31), (32), умови (24)–(27), зауважимо, що

$$\Psi_{0,1}^{(2m+1)}+\Psi_{0,1}^{(2m)}\leq\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{j,0}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{j,0}<\frac{\pi}{2},$$

$$\Psi_{0,2}^{(2m+1)}+\Psi_{0,2}^{(2m)}\leq\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{0,j}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{0,j}<\frac{\pi}{2},$$

$$\Psi_{k,1}^{(2m+1)}+\Psi_{k,1}^{(2m)}+\Psi_{k}^{(2m+1)}+\Psi_{k}^{(2m)}\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{2m+1-k}\theta_{k+j}+\sum_{j=1}^{2m-k}\theta_{k+j}+2\sum_{j=1}^{k}\theta_j\leq\sum_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum_{j=1}^{2m}\theta_j<\frac{\pi}{2},$$

$$\Psi_{k,2}^{(2m+1)}+\Psi_{k,2}^{(2m)}+\Psi_{k}^{(2m+1)}+\Psi_{k}^{(2m)}\leq\sum_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum_{j=1}^{2m}\theta_j,$$

$$\Psi_{2m+1}^{(2m+1)}+\Psi_{2m}^{(2m)}\leq\sum_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum_{j=1}^{2m}\theta_j,$$

тому

$$\Re\left(\varphi_{0,1}^{(2m+1)}-\varphi_{0,1}^{(2m)}\right)\geq\frac{\cos\left(\sum\limits_{j=1}^{2m+1}\beta_{j,0}+\sum\limits_{j=1}^{2m}\beta_{j,0}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_{j,0}^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_{j,0}^{(2m+1-j)}\right|}=$$

$$=\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{j,0}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{j,0}\right)\left|\varphi_{0,1}^{(2m+1)}-\varphi_{0,1}^{(2m)}\right|,$$

$$\Re\left(\varphi_{0,2}^{(2m+1)}-\varphi_{0,2}^{(2m)}\right)\geq\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{0,j}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{0,j}\right)\left|\varphi_{0,2}^{(2m+1)}-\varphi_{0,2}^{(2m)}\right|,$$

$$\Re\frac{(-1)^k\left(\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,1}^{(2m-k)}\right)}{\exp\left(i\Psi_k^{(2m+1)}+i\Psi_k^{(2m)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|\left|Q_j^{(2m-j)}\right|}\geq$$

$$\geq\frac{\cos\left(\sum\limits_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum\limits_{j=1}^{2m}\theta_j\right)\left|\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,1}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}Q_j^{(2m-j)}\right|}>0,\quad 1\leq k\leq 2m,$$

$$\Re\frac{(-1)^k\left(\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right)}{\exp\left(i\Psi_k^{(2m+1)}+i\Psi_k^{(2m)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|\left|Q_j^{(2m-j)}\right|}\geq$$

$$\geq\frac{\cos\left(\sum\limits_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum\limits_{j=1}^{2m}\theta_j\right)\left|\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}Q_j^{(2m-j)}\right|}>0,\quad 1\leq k\leq 2m,$$

$$\Re\frac{1}{\exp\left(i\Psi_{2m+1}^{(2m+1)}+i\Psi_{2m}^{(2m)}\right)\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum_{j=1}^{2m}\theta_j\right).$$

Отже,

$$\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{j,0}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{j,0}\right)\left|\varphi_{0,1}^{(2m+1)}-\varphi_{0,1}^{(2m)}\right|+$$

$$+\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\beta_{0,j}+\sum_{j=1}^{2m}\beta_{0,j}\right)\left|\varphi_{0,2}^{(2m+1)}-\varphi_{0,2}^{(2m)}\right|+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{2m}\frac{\left|\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,1}^{(2m-k)}\right|+\left|\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left|Q_j^{(2m+1-j)}Q_j^{(2m-j)}\right|}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}\right)\cos\left(\sum_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum_{j=1}^{2m}\theta_j\right). \quad (38)$$

Далі застосовуємо методику доведення теореми 1, використовуючи нерівності (38) і оцінки (30), (33), (34).

(A) З нерівності (38) маємо, що

$$\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\frac{\cos\left(\sum\limits_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum\limits_{j=1}^{2m}\theta_j\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|Q_j^{(2m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2m+1}\left|Q_j^{(2m+1-j)}\right|}=$$

$$\frac{1}{\left|Q_1^{(2m)}\right|}\frac{\cos\left(\sum\limits_{j=1}^{2m+1}\theta_j+\sum\limits_{j=1}^{2m}\theta_j\right)}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left|Q_{2j-1}^{(2m+1-2j)}Q_{2j}^{(2m-2j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{m}\left|Q_{2j}^{(2m+1-2j)}Q_{2j+1}^{(2m-2j)}\right|}.$$

З формули (13) випливає, що для $\dfrac{1}{\left|Q_{2j-1}^{(2m-2j+1)}Q_{2j}^{(2m-2j)}\right|}$ справджується нерівність

$$\frac{1}{\left|Q_{2j-1}^{(2m-2j+1)}Q_{2j}^{(2m-2j)}\right|}\geq\frac{1}{\left|\Phi_{2j-1}^{(2m-2j+1)}\right|\left|Q_{2j}^{(2m-2j))}\right|+1},$$

а для $\dfrac{1}{\left|Q_{2j-1}^{(2m-2j+1)}Q_{2j}^{(2m-2j)}\right|}$ — нерівність

$$\frac{1}{\left|Q_{2j}^{(2m-2j+1)}Q_{2j+1}^{(2m-2j)}\right|} \geq \frac{1}{\left|\Phi_{2j}^{(2m-2j+1)}\right|\left|Q_{2j+1}^{(2m-2j))}\right|+1}.$$

Враховуючи рівності $\left|Q_{2m}^{(0))}\right| = \left|\Phi_{2m}^{(0))}\right|$, $\left|Q_{2m+1}^{(0))}\right| = \left|\Phi_{2m+1}^{(0))}\right|$ і нерівність (30), отримаємо:

$$\left|Q_{2j}^{(2m-2j)}\right| \leq \left|\Phi_{2j}^{(2m-2j)}\right| + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=1}^{2m} \frac{P_{2j,r}}{R_{2j,r}},$$

$$\left|Q_{2j+1}^{(2m-2j)}\right| \leq \left|\Phi_{2j+1}^{(2m-2j)}\right| + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=1}^{2m} \frac{P_{2j+1,r}}{R_{2j+1,r}},$$

де

$$P_{2j,2l-1} = P_{2j+1,2l-1} = 1,\ P_{2j,2l} = \cos\theta_{2j+2l},\ P_{2j+1,2l} = \cos\theta_{2j+2l+1},$$

$$R_{2j,2l-1} = \Re\Phi_{2j+2l-1}^{(2m-2j-2l+1)}, \quad R_{2j+1,2l-1} = \Re\Phi_{2j+2l}^{(2m-2j-2l+1)},$$

$$R_{2j,2l} = \left|\Phi_{2j+2l}^{(2m-2j-2l))}\right|, \quad R_{2j+1,2l} = \left|\Phi_{2j+2l+1}^{(2m-2j-2l))}\right|, \quad 1 \leq l \leq m-j.$$

Використовуючи для оцінки частинних знаменників неперервних дробів нерівності (30), (33), доходимо висновку, що

$$\frac{1}{\left|\Phi_{2j-1}^{(2m-2j+1))}\right|\left|Q_{2j}^{(2m-2j))}\right|+1} \geq \frac{1}{M_{2j}^{(2m-2j)}+1}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$\frac{1}{\left|\Phi_{2j}^{(2m+1-2j)}\right|\left|Q_{2j+1}^{(2m-2j)}\right|+1} \geq \frac{1}{M_{2j+1}^{(2m-2j)}+1}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

де

$$M_{2j}^{(2m-2j)} = d_{2j-1,0}\left(d_{2j,0} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=1}^{2m-2j} \frac{c_{2j,r}}{d_{2j,r}}\right),$$

$$M_{2j+1}^{(2m-2j)} = d_{2j,0}\left(d_{2j+1,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{2m-2j} \frac{\hat{c}_{2j+1,r}}{\hat{d}_{2j+1,r}}\right),$$

елементи $d_{p,0}$, $c_{p,l}$, $d_{p,l}$, $p, l = 1, 2, \ldots,$ визначаються згідно з формулами (36), (37).

Таким чином,

$$|f_{2m+1} - f_{2m}| \geq C \prod_{j=2}^{2m+1} \frac{1}{1 + M_j^{(2m-2[j/2])}},$$

де

$$C = \frac{1}{|b_{1,1}| + \dfrac{1}{|b_{2,1}|} + \dfrac{1}{|b_{1,2}|} + \dfrac{1}{|b_{2,2}|}},$$

звідки з урахуванням умови (35) випливає фігурна розбіжність ДНД (1).

(B) З нерівностей (38), (34) випливає, що

$$\Re\left(f_{2m+1} - f_{2m}\right) > \cos\left(2\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j,0}\right)\left|\varphi_{0,1}^{(2m+1)} - \varphi_{0,1}^{(2m)}\right|, \qquad (39)$$

$$\Re\left(f_{2m+1} - f_{2m}\right) > \cos\left(2\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{0,j}\right)\left|\varphi_{0,2}^{(2m+1)} - \varphi_{0,2}^{(2m)}\right|, \qquad (40)$$

$$\Re\left(f_{2m+1} - f_{2m}\right) > \frac{\cos\left(2\sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j\right)\left|\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)} - \varphi_{k,1}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(|b_{j,j}| + \dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|} + \dfrac{1}{|b_{j+1,j}|} + \dfrac{1}{|b_{j,j+1}|}\right)^2}, \qquad (41)$$

$$\Re\left(f_{2m+1} - f_{2m}\right) > \frac{\cos\left(2\sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j\right)\left|\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)} - \varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(|b_{j,j}| + \dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|} + \dfrac{1}{|b_{j+1,j}|} + \dfrac{1}{|b_{j,j+1}|}\right)^2}. \qquad (42)$$

Якщо ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{j,0}|$ збігається, то, з урахуванням нерівностей (23), (39), отримаємо

$$\lim_{m\to\infty}\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\cos\left(2\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{j,0}\right)\lim_{m\to\infty}\left|\varphi_{0,1}^{(2m+1)}-\varphi_{0,1}^{(2m)}\right|>0.$$

З нерівностей (23), (40) і збіжності ряду $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{0,j}|$ випливає, що

$$\lim_{m\to\infty}\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\cos\left(2\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{0,j}\right)\lim_{m\to\infty}\left|\varphi_{0,2}^{(2m+1)}-\varphi_{0,2}^{(2m)}\right|>0.$$

У випадку збіжності ряду $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{i+j,i}|$, $i>0$, використовуємо нерівності (23), (41):

$$\lim_{m\to\infty}\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\frac{\cos\left(2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\theta_j\right)\lim\limits_{m\to\infty}\left|\varphi_{k,1}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,1}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(|b_{j,j}|+\dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|}+\dfrac{1}{|b_{j+1,j}|}+\dfrac{1}{|b_{j,j+1}|}\right)^2},$$

збіжності ряду $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{i,i+j}|$, $i>0$ — нерівності (23), (42):

$$\lim_{m\to\infty}\Re\left(f_{2m+1}-f_{2m}\right)\geq\frac{\cos\left(2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\theta_j\right)\lim\limits_{m\to\infty}\left|\varphi_{k,2}^{(2m+1-k)}-\varphi_{k,2}^{(2m-k)}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(|b_{j,j}|+\dfrac{1}{|b_{j+1,j+1}|}+\dfrac{1}{|b_{j,j+1}|}+\dfrac{1}{|b_{j,j+1}|}\right)^2},$$

чим завершуємо доведення.

Зауважимо, що необхідні умови збіжності для наближень вигляду (4) встановлено вперше, а для наближень вигляду (3) узгоджуються з отриманими раніше результатами [10, с. 22], [13].

1. *Кучмінська Х.* Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. — Київ: Наук. думка, 1986. — 176 с.
3. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions// J. Comput. Appl. Math. — 1978. — №4. — P. 181 – 190.
4. *Cuyt A., Verdonk B.* Different techniques for the construction of multivariate rational interpolants and Pade approximants. —Antwerpen: Universiteit Antwerpen. — 1988. – 158 p.
5. *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double power series // J. Comput. Appl. Math. — 1980. —**6**, № 2. — P. 121 – 125.
6. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Львів, 1996. —123 с.
7. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2009. — № 660. — С. 49 – 55.
8. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Формула різниці для одного з фігурних наближень двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2012. —**55**, № 1. — С. 7 – 18.
9. *Gragg W. B., Warner D. D.* Two constructive results in continued fractions // SIAM J.Numer. Anal. 1983. —**20**, № 3. — P. 1187 — 1197.
10. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.- мех. поля. — 1999. —**42**, № 4. — С. 55 — 61.
11. *Сусь О. М.* Про один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для двовимірних неперервних дробів // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2007. —Вип. 5. — С. 71 – 76.
12. *Сусь О. М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2008. — Вип. 6. — С. 115 — 123.
13. *Сусь О. М.* Аналог теореми Штерна–Штольца для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — **45**, № 4. — С. 119 – 123.
14. *Антонова Т. М.* Необхідні умови збіжності одного класу гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. — 1999. — N 364. — С. 173 – 176.
15. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 414 с.