Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 132–139

УДК 517.518:519.652

Обернені похідні 2–го типу многочлена та раціональної функції

М. М. Пагіря

Мукачівський державний університет, Мукачево;
pahirya@gmail.com

New properties of reciprocal derivatives of the 2nd type are studied. It is proved that the reciprocal derivative of the 2nd type of the $(2n)$–th order of the polynomials $p_n(z)$ is equal to zero, and that the reciprocal derivative of the 2nd type of the $(2n-1)$–th order of the rational function $p_m(z)/q_n(z), m < n$, is equal to zero as well.

Изучаются новые свойства обратных производных 2-го типа. Доказано, что обратная производная 2-го типа $(2n)$–го порядка многочлена $p_n(z)$ равна нулю и обратная производная 2-го типа $(2n-1)$–го порядка рациональной функции $p_m(z)/q_n(z), m < n$, также равна нулю.

Вступ

Наближення функцій однієї дійсної або комплексної змінної на деякому компакті належить до задач, які мають не тільки теоретичне, а і практичне значення, оскільки інтерполяційні агрегати та розвинення функцій широко використовуються при розв'язуванні багатьох задач обчислювальної математики. Поряд із наближеннями функцій многочленами або узагальненими многочленами [1] та апроксимаціями Паде [2] в якості апарату наближення використовують ланцюгові дроби [3–5]. Розвинення функцій у ланцюговий дріб можна отримати із диференціального рівняння Ріккаті [6], із представлення відношення гіпергеометричного ряду правильним ланцюговим C–дробом, із розвинення функції в степеневий ряд через відношення визначників Ганкеля, або за допомогою формули Тіле [7], яка ґрунтується на обернених похідних Тіле. В роботі [8] введені в розгляд обернені похідні 2–го типу та аналог формули Тіле розвинення функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб. В даній роботі доведені два твердження, які стосуються обернених похідних 2–го типу многочлена та раціональної функції. Ці твердження аналогічні відповідним твердженням для обернених похідних Тіле [9].

1. Означення та основні відомості

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, яка містить круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_*| < R\}$. Тоді в довільній точці $z \in K$ існує розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд [10]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n \ , \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}. \tag{1}$$

Визначником Ганкеля $H_k^{(n)}(z_*)$ порядку k, який пов'язаний із степеневим рядом (1) (навіть коли (1) формальний степеневий ряд [11]), називається визначник вигляду

$$H_0^{(n)}(z_*) = 1, \ H_k^{(n)}(z_*) = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \cdots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \cdots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix},$$

де $k = 1, 2, \ldots$, $c_n = 0$, коли $n < 0$.

Функція $f(z)$ в області $\mathcal{Z}$ може бути розвинута в квазі–обернений ланцюговий дріб в околі точки z_* наступним чином [12]

$$f(z) = \left(\frac{1}{f(z_*)} + \frac{z - z_*}{{}^{\{1\}}f(z_*)} + \frac{z - z_*}{2/\left({}^{\{1\}}f(z_*)\right)'} + \frac{z - z_*}{3/\left({}^{\{2\}}f(z_*)\right)'} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{z - z_*}{n/\left({}^{\{n-1\}}f(z_*)\right)'} + \cdots \right)^{-1},$$

де ${}^{\{n\}}f(z_*)$ — значення оберненої похідної 2–го типу функції $f(z)$ в точці z_*. Обернені похідні 2–го типу обчислюються за допомогою рекурентного співвідношення

$$ {}^{\{k\}}f(z) = \frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z)\right)'} + {}^{\{k-2\}}f(z), \quad k = 2, 3, \dots $$

при початкових значеннях ${}^{\{0\}}f(z) = 1/f(z)$, ${}^{\{1\}}f(z) = -f^2(z)/f'(z)$.

В [12] встановлені деякі властивості обернених похідних 2–го типу.

Теорема 1.1. *Нехай* $f(z_*) \neq 0$ *в* $z_* \in \mathcal{Z}$. *Тоді* ${}^{\{1\}}f(z_*) = \infty$, *якщо* $f'(z_*) = 0$, *і* ${}^{\{1\}}f(z_*) = 0$, *якщо* $f'(z_*) = \infty$.

Теорема 1.2. *Нехай для кожного* $z \in \mathcal{Z}$ *функції* $u = f(z)$ *та* $v = g(z)$ *мають скінчені обернені похідні 2–го типу. Тоді існують обернені похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами*

$$ {}^{\{1\}}(u \pm v) = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u^2 \cdot {}^{\{1\}}v \pm v^2 \cdot {}^{\{1\}}u}, \qquad {}^{\{1\}}(u \cdot v) = \frac{uv \cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u \cdot {}^{\{1\}}v + v \cdot {}^{\{1\}}u}, $$

$$ {}^{\{1\}}(u/v) = \frac{(u/v) \cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u \cdot {}^{\{1\}}v - v \cdot {}^{\{1\}}u}. $$

Теорема 1.3. *Нехай функція* $w = f(z)$ *для кожного* $z \in \mathcal{Z}$ *має обернені похідні 2–го типу до* n*–го порядку включно,* $C = const$, $C \neq 0$, *тоді виконуються співвідношення*

$$ {}^{\{2m\}}(Cw) = \frac{1}{C} \cdot {}^{\{2m\}}w, \qquad {}^{\{2m+1\}}(Cw) = C \cdot {}^{\{2m+1\}}w, \qquad m = 0, 1, \dots $$

Теорема 1.4. *Обернені похідні 2–го типу функції* $f(z)$ *в точці* $z_* \in \mathcal{Z}$ *визначаються через звичайні похідні функції в цій точці як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$ {}^{\{2n\}}f(z_*) = H_n^{(2)}(z_*)/H_{n+1}^{(0)}(z_*), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{2a} $$

$$ {}^{\{2n+1\}}f(z_*) = H_{n+2}^{(-1)}(z_*)/H_{n+1}^{(1)}(z_*), \qquad n = 0, 1, \dots \tag{2b} $$

Формули (2) є аналогом співвідношень Ньорлунда для обернених похідних Тіле [13].

В роботі [12] отримані розвинення в квазі–обернений ланцюговий дріб функцій $e^z, (c+z)^\alpha, \ln(c+z), c, \alpha \in \mathbb{C}$. При доведенні тверджень даної роботи будемо спиратися на наступні теореми.

Теорема 1.5 ([12]). ***(A)*** *Якщо* $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$, $c = const$, *то функція* $(c+z)^{\alpha}$ *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$^{\{2n\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{n}(m-\alpha)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha}, \tag{3}$$

$$^{\{2n+1\}}(c+z)^{\alpha} = \frac{(n+1)\prod\limits_{m=2}^{n+1}(m+\alpha)}{\prod\limits_{m=0}^{n}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}, \qquad n = 0, 1, \dots \tag{4}$$

(B) *Якщо* $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$, *то функція* $(c+z)^n$ *має обернені похідні 2–го типу до* $(2n)$*–го порядку включно, які визначаються за формулами (3) та (4), крім того*

$$^{\{2n\}}(c+z)^{n} = 0. \tag{5}$$

(C) *Якщо* $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$, *то функція* $(c+z)^{-n}$ *має обернені похідні 2–го типу до* $(2n-1)$*–го порядку включно, які визначаються за формулами (3) та (4), крім того* $^{\{2n-1\}}(c+z)^{-n} = 0$.

Теорема 1.6 ([9]). *Для функції*

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(z-\alpha)^i}, \qquad a_i, \alpha \in \mathbb{C},$$

для довільного значення $z_* \in \mathbb{C}\backslash\{\alpha\}$ *ранг нескінченої матриці Ганкеля*

$$H^{(0)}(z_*) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & \dots \\ c_3 & c_2 & c_4 & \dots & c_{n+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} & \dots \\ c_n & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad c_k = \frac{g^{(k)}(z_*)}{k!}$$

$(k = 0, 1, \dots)$ *дорівнює* n.

Наслідок 1.1 ([9]). *Довільний визначник $(n+m+1)$–го порядку вигляду*

$$\tilde{H}^{(0)}_{n+1} = \begin{vmatrix} c_{k_0} & c_{k_1} & \dots & c_{k_n} & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ c_{k_0+1} & c_{k_1+1} & \dots & c_{k_n+1} & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_0+n} & c_{k_1+n} & \dots & c_{k_n+n} & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{m+n} \end{vmatrix} = 0,$$

при довільних $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ та $m \in \mathbb{N}$, де $b_1, b_2, \dots, b_{n+m} \in \mathbb{C}$.

2. Обернена похідна 2–го типу многочлена

Теорема 2.7. *Обернена похідна 2–го типу $2n$–го порядку многочлена $p_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, n = 1, 2, \dots,$ тотожно рівна нулю.*

Доведення. Коли $n = 1$, то твердження теореми випливає з (5). Якщо вибрати деяке $z_* \in \mathbb{C}$, то в загальному випадку при $n = 2, 3, \dots,$ з (2a) маємо, що ${}^{\{2n\}}p_n(z_*) = H^{(2)}_n(z_*)/H^{(0)}_{n+1}(z_*)$. Оскільки у випадку многочлена n–го порядку $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{2n} = 0$, то останній стовпчик ганкелевого визначника $H^{(2)}_n(z_*)$ буде складатися лише із нулів, а отже $H^{(2)}_n(z_*) \equiv 0$. В той же час останній стовпчик ганкелевого визначника $H^{(0)}_n(z_*)$ буде містити один не нульовий елемент $c_n = a_n n!$, а отже цей визначник нулю не рівний. Звідси маємо, що ${}^{\{2n\}}p_n(z_*) \equiv 0$ для довільного значення $z_* \in \mathbb{C}$. □

3. Обернена похідна 2–го типу раціональної функції

Теорема 3.8. *Нехай функція $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ задана на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, де $p_m(z)$ та $q_n(z)$ — многочлени відповідно степенів m та $n, m < n$, многочлен $q_n(z)$ не має коренів в $\mathcal{Z}$. Обернена похідна 2–го типу $(2n-1)$–го порядку функції $R_{m,n}(z)$ тотожно дорівнює нулеві для всіх $z_* \in \mathcal{Z}$.*

Доведення. а) У випадку, коли $R_{0,n}(z) = A/(z-\alpha)^n$, то згідно з теоремою 1.3 та теоремою 1.5 маємо, що ${}^{\{2n-1\}}R_{0,n}(z) \equiv 0$.

б) Якщо $R_{m,n}(z)=p_m(z)/(z-\alpha)^n$, то функція може бути подана у вигляді суми простих дробів наступним чином

$$R_{m,n}(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(z-\alpha)^i}.$$

Згідно з (2b) ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*)=H_{n+1}^{(-1)}(z_*)/H_n^{(1)}(z_*)$. Елементи ганкелевих визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(1)}(z_*)$ складаються із елементів, які визначаються наступним чином

$$c_k=\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i-1}{k}\frac{(-1)^k a_i}{(z_*-\alpha)^{k+i}},\qquad k=0,1,\ldots$$

Згідно з теоремою 1.6 визначник $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)=0$. Водночас $H_n^{(0)}(z_*)\neq 0$. А тоді ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*)\equiv 0$ для довільного $z_*\in\mathcal{Z}$.
в) В загальному випадку довільну раціональну функцію $R_{m,n}(z)$ можна розвинути у суму простих дробів, тобто подати у вигляді

$$R_{m,n}(z)=\sum_{s=1}^{r}\sum_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z-\alpha_s)^{i_s}},\qquad l_1+l_2+\cdots+l_r=n.$$

Елементи визначників $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ та $H_n^{(0)}(z_*)$ в (2b) будуть рівні

$$c_k=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,z^k}(R_{m,n}(z))\Big|_{z=z_*}=\sum_{s=1}^{r}\sum_{i_s=1}^{l_s}\binom{k+i_s-1}{k}\frac{(-1)^k a_{i_s}^{(s)}}{(z_*-\alpha_s)^{k+i_s}},$$

де $k=0,1,\ldots,2n$.

Визначник Ганкеля $\mathcal{H}=H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ в цьому випадку буде мати вигляд

$$\mathcal{H}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n(i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n}} \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{a_{i_s}^{(s)}}{(z_*-\alpha_s)^{i_s}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{n+1}(i_s)_{n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(n+1)!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^n(i_s)_n a_{i_s}^{(s)}}{n!(z_*-\alpha_s)^{i_s+n}} & \cdots & \sum\limits_{s=1}^{r}\sum\limits_{i_s=1}^{l_s}\frac{(-1)^{2n+1}(i_s)_{2n+1} a_{i_s}^{(s)}}{(2n+1)!(z_*-\alpha_s)^{i_s+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $(i_s)_n$— символ Похгаммера.

Оскільки кожний стовпчик визначника $\mathcal{H}$ містить n доданків, то такий визначник буде рівний сумі n визначників, які відрізняються лише елементами першого стовпчика. Кожен із отриманих визначників можна розвинути у суму n визначників, які будуть відрізнятися лише елементами другого стовпчика. В результаті будемо мати n визначників. Продовжуючи подібні розвинення за третім, четвертим, і т.д., $(n+2)$–м стовпчиком, врешті–решт отримаємо n^{n+2} визначників, які будуть містити лише по одному доданку із суми кожного стовпця визначника $\mathcal{H}$.

Виберемо один із таких визначників

$$\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \binom{j_n+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_n}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_n+n}} \\ \frac{b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0}} & \cdots & \binom{j_n+n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1} b_{j_n}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_n+n+1}} \\ \binom{j_0}{1}\frac{-b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0+1}} & \cdots & \binom{j_n+n+1}{n+2}\frac{(-1)^{n+2} b_{j_n}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_n+n+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{j_0+n-1}{n}\frac{(-1)^n b_{j_0}^{(0)}}{(z-\beta_0)^{j_0+n}} & \cdots & \binom{j_n+2n}{2n+1}\frac{(-1)^{2n+1} b_{j_n}^{(n)}}{(z-\beta_n)^{j_n+2n+1}} \end{vmatrix},$$

де $\beta_t \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}, t = 0, 1, 2, \ldots, n$, а j_t приймає деяке із можливих своїх значень, які відповідні β_t, тобто, якщо $\beta_t = \alpha_s$, то $1 \le j_t \le l_s, b_{j_t}^{(t)} = a_{j_t}^{(s)}$.

Оскільки визначник $\tilde{\mathcal{H}}_{n+1}^{(-1)}$ містить $(n+2)$–а стовпці, а знаменник $q_n(z)$ має r різних коренів, $1 \le r \le n$, то принаймні два β_t будуть приймати однакові значення.

В кожному такому визначнику містять стовпці, які відповідають одному і тому кореню α_s, і кількість таких стовпців більша за кратність кореня l_s. Ці стовпці будуть лінійно залежними, а тоді згідно із наслідком 1.1 кожен такий визначник буде рівний нулю.

Визначник $H_{n+1}^{(-1)}(z_*)$ рівний нулю як сума визначників того ж порядку, кожен з яких рівний нулю. Тоді з (2b) випливає, що для довільного $z_* \in \mathcal{Z}$ виконується ${}^{\{2n-1\}}R_{m,n}(z_*) \equiv 0$. $\square$

[1] *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень. У 2 ч. — К.: Вища шк., 1995. — Ч. 1. — 367 с.

[2] *Бейкер Дж., Грейвс–Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

[3] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

[4] *Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008. — XVI+431 p.

[5] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992.— 606 p.

[6] *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М: ГИТТЛ, 1956. — 203 с.

[7] *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung.— Leipzig: Commis. von B. G. Teubner, 1909.— XII+175 s.

[8] *Пагіря М. М.* Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — **18**. — С. 99–105.

[9] *Пагіря М. М.* Дві властивості обернених похідних Тіле // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. – **12**, 4. — С. 226–234.

[10] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, ГИФМЛ, 1968. — 648 с.

[11] *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. — New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. — XV+682 p.

[12] *Пагіря М. М.* Розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — **25**, 2. — С. 131–144.

[13] *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Berlin: Springer, 1924. — IX+551 s.