Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 76–92

УДК 517.5

Г. М. Власик

Інститут математики НАН України, Київ;
annawlasik@gmail.com

Колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q

We find the exact order estimates of the Kolmogorov widths of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between the parameters p and q and certain limitations on the rate of decrease of the function ψ.

Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q за певних обмежень на швидкість спадання функції ψ.

1. Вступ

У роботі досліджуються колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ 2π–періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q і при певних обмеженнях на швидкість спадання функції ψ. Більш детально про це буде йти мова нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай L_q — простір 2π–періодичних і сумовних у степені q, $1 \leq q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_x |f(x)| \ , \qquad\qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0$, $\tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx+\frac{\beta\pi}{2}\mathrm{sign}k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, с. 132]), назвемо (ψ, β)–похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|)=|k|^{-r},\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$ (див., наприклад, [1, с. 25]). Далі, у випадку $\beta=r$ замість позначення $W^r_{p,r}$ будемо використовувати W^r_p.

Позначимо через Ψ множину функцій ψ, що задовольняють наступні умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C>0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)}\leq C,\quad \forall\tau\in\mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції: $\frac{1}{\tau^r}$, $r>0$; $\frac{\ln^{\gamma}(\tau+1)}{\tau^r}$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $r>0$ та ін.

Надалі, для величин A і B запис $A\asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1A\leq B\leq C_2A$. Якщо тільки $B\leq C_2A$ ($B\geq C_1A$), то пишемо $B\ll A$ ($B\gg A$). Всі константи $C_i,\ i=1,2,...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, у якій вимірюється похибка наближення.

Тепер перейдемо до означення апроксимативної характеристики, яка буде досліджуватися.

У 1936 р. А. М. Колмогоров [3] для центрально–симетричної множини F у банаховому просторі X розглянув величину

$$d_m(F,X)=\inf_{L_m\in Lin_m(X)}\sup_{f\in F}\inf_{u\in L_m}\|f-u\|_X,$$

де інфімум шукається по всіх лінійних підпросторах L_m простору X, розмірності не більшої, ніж m. Згодом ця величина отримала назву колмогоровського поперечника множини F у просторі X.

Перші точні за порядком оцінки колмогоровського поперечника класів W^r_p у просторі L_q при $p=q=2$ було отримано А. М. Колмогоровим [3]. Згодом для $p=1$, $q=2$ і $p=q=\infty$ порядки $d_m(W^r_p,L_q)$ знайдено С. Б. Стєчкіним [4], а при $p=q=\infty$

точне значення відповідної величини встановлено В. М. Тихомировим [5]. Пізніше порядки колмогоровських поперечників $d_m(W^r_p, L_q)$ встановлювалися для наступних співвідношень між параметрами p і q: $1 \le p = q < \infty$ — С. Б. Бабаджановим і В. М. Тихомировим [6]; $1 \le q \le p \le \infty$ — Ю. І. Маковозом [7]; $1 = p < q \le 2$ — М. З. Соломяком і В. М. Тихомировим [8]; $1 \le p \le q \le 2$ — Р. С. Ісмагіловим [9, 10]; $p = 1$, $q > 2$ — Є. Д. Глускіним [11].

Узагальнюючи методи дискретизації в оцінках поперечників (див. роботи [4, 10, 12]), В. Є. Майоров показав [13], що в деяких ситуаціях для отримання порядкових оцінок поперечників функціональних класів достатньо оцінити поперечники скінченновимірних множин $d_m(B^n_p, l^n_q)$, де $B^n_p = \{x : \|x\|_{l^n_p} \le 1\}$ — одинична куля в n–вимірному банаховому просторі з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty.$$

Згодом Б. С. Кашин [14, 15], використовуючи знайдені ним оцінки для поперечників $d_m(B^n_2, l^n_\infty)$ в поєднанні з методом дискретизації, завершив встановлення порядків поперечників $d_m(W^r_p, L_q)$, $2 < p < q < \infty$, $p \le 2 < q < \infty$, у випадку, коли клас W^r_p вкладений у простір неперервних функцій, тобто при $rp > 1$. Серед тих значень параметрів r, p, q, при яких величина $d_m(W^r_p, L_q)$ має сенс, її порядки залишалися невідомими тільки для малих r, точніше для таких r, p, q, що

$$(r, p, q) \in \Omega, \quad \Omega = \{(r, p, q) : 0 < rp \le 1,\ 1 \le p < q < \infty,\ q > 2\}.$$

У роботі [16] показано, що при $\frac{1}{2} < r < 1$ і $2 < q < \frac{1}{1-r}$ справедлива оцінка

$$d_m(W^r_1, L_q) \asymp m^{-\frac{q}{2}(r-1+\frac{1}{q})}.$$

Із цього результату видно, що поведінка колмогоровського поперечника $d_m(W^r_1, L_q)$ при $\frac{1}{2} < r < 1$ суттєво відрізняється від випадку $r > 1$, оскільки [14]

$$d_m(W_1^r, L_q) \asymp m^{-r+\frac{1}{2}}, \quad r > 1, \quad 2 < q < \infty.$$

Іншими словами, у випадку $\frac{1}{2} < r < 1$ і $2 < q < \frac{1}{1-r}$ Б. С. Кашиним було виявлено ефект малої гладкості.

Пізніше у роботах [17, 18] були встановлені точні за порядком оцінки величин $d_m(W_p^r, L_q)$ при $(r, p, q) \in \Omega$, тобто для малих гладкостей r, а також двосторонні оцінки для критичних показників гладкості, які відрізняються логарифмічним множником.

Таким чином, метою нашої роботи є встановлення точних за порядком оцінок величини

$$d_m(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q) = \inf_{L_m \subset L_q} \sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \inf_{\varphi \in L_m} \|f - \varphi\|_q$$

для деяких параметрів p і q та при певних обмеженнях на поведінку послідовностей $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, які характеризують гладкість функцій, що належать класу $L_{\beta,p}^{\psi}$. Точніше, розглядаються такі обмеження на поведінку послідовностей $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, які визначають функціональні класи $L_{\beta,p}^{\psi}$ малої гладкості.

Зазначимо, що колмогоровські поперечники $d_m(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q)$ за інших обмежень на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, (велика гладкість) та відповідні значення параметрів p і q досліджувались у роботах [19, 20].

2. Допоміжні твердження

У цьому пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які будуть нами використовуватися.

Нехай $s \in \mathbb{N}$ і

$$\rho(s) = \left\{k \in \mathbb{Z} : \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s\right\}.$$

Тоді для $f \in L_1$ покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Лема A [21]. *Нехай* $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $1 < q < \infty$ *справедливе співвідношення*

$$\|\delta_s(f^{\psi}_{\beta})\|_q \asymp \|\psi^{-1}(2^s)\delta_s(f)\|_q.$$

Нехай l^n_p означає простір всеможливих упорядкованих систем з n дійсних чисел, норма в якому означається таким чином:

$$\|x\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \,, \qquad\qquad p = \infty. \end{cases}$$

і $B^n_p = \{x : \|x\|_{l^n_p} \le 1\}$ — одинична куля в цьому просторі.

Наступне твердження є відомою теоремою Марцинкевича–Зігмунда (див., наприклад, [22, с. 46]), яка адаптована до наших позначень і в багатовимірному випадку наведена в роботі [23].

Теорема A. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $s \in \mathbb{N}$. *Тоді між простором тригонометричних поліномів вигляду*

$$\delta_s(f) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{ikx}$$

і простором $\mathbb{R}^{2^s}$ *можна встановити ізоморфізм шляхом співставлення поліному* $\delta_s(f)$ *чисел*

$$\delta_s f^j = \left\{ f_n\left(\frac{2\pi j}{2^s}\right)\right\} \in \mathbb{R}^{2^s}, \quad f_n(t) = \sum_{sign\ k=sign\ n} c_k e^{ikt},$$

$$n = \pm 1, \quad j = 1, ..., 2^{s-1},$$

і при цьому буде справедливе порядкове співвідношення

$$\|\delta_s(f)\|_p \asymp \left(2^{-s}\sum_{j=1}^{2^s} |\delta_s f^j|^p\right)^{1/p}.$$

Лема Б. *Нехай X — банаховий простір, $W, W_1, ..., W_l, ...$ — підмножини простору X і $N_l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді якщо*

$$\sum_l N_l \leq N \quad i \quad W \subset \bigcup_l W_l,$$

то

$$d_N(W, X) \leq \sum_l d_{N_l}(W_l, X).$$

Дана лема випливає безпосередньо із означення колмогоровського поперечника. Її формулювання наводиться в роботах В. Є. Майорова [24], В. М. Тихомирова [25], і потім вона неодноразово використовувалася в роботах багатьох авторів.

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$T(n) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in \rho(n)} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Лема В [21]. *Нехай $t \in T(n)$, $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$. Тоді для $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 < p < q < \infty$ справедливе співвідношення*

$$\|t\|_q \leq C_3(p, q) 2^{n(1/p - 1/q)} \psi(2^s) \|t_\beta^\psi\|_p,$$

де $C_3(p, q)$ — константа, залежна від p і q.

Лема Г [14]. *Нехай $m < n$ і $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$. Тоді*

$$d_m(B_p^n, l_q^n) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} min\{1, n^{2\alpha/q} m^{-\alpha}\}, 2 \leq p < q < \infty, \\ max\left\{ n^{1/q - 1/p}, min\{1, n^{1/q} m^{-1/2}\} \sqrt{1 - \frac{m}{n}} \right\}, 1 \leq p < 2 \leq q < \infty. \end{cases}$$

Лема Д [21]. *Нехай $1 < p, q < \infty$ і $b = (1/p - 1/q)_+$. Тоді*

$$L_{\beta,p}^\psi \subset C_4(p, q) L_{\beta,q}^{\tilde{\psi}},$$

де $\tilde{\psi}(k) = \psi(k)k^b$, $c_+ = max\{c, 0\}$ *і* $C_4(p, q)$ *— константа, залежна від* p *і* q.

Наступне твердження є відомою теоремою Літтлвуда – Пелі (див., наприклад, [22, с. 349]), яка адаптована до наших позначень.

Теорема Б. *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_5(q), C_6(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_5(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_6(q)\|f\|_q.$$

3. Основний результат

Нехай $1 < p < q < \infty$. Тоді через $\Psi_{\varepsilon,p,q}$ позначимо множину функцій $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, які задовольняють умови

1) $\psi(\tau) \in \Psi$;

2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$ не зростають.

Справедливе твердження.

Теорема 1. *Нехай функції* $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, *задовольняють умови:*

а) при $2 \le p < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що* $\psi(\tau)\tau^{[(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})]-\varepsilon_1}$ *не спадають;*

б) при $1 < p \le 2 < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon_2 > 0$ *таке, що* $\psi(\tau)\tau^{1/p-\varepsilon_2}$ *не спадають.*

Тоді для будь–якого $\beta \in \mathbb{R}$

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{1}$$

Доведення. Доведення будемо проводити методом дискретизації, тобто зведемо задачу про колмогоровський поперечник функціонального класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ до оцінок поперечників відповідних дискретних множин.

Спочатку отримаємо оцінку зверху для випадку а). За заданим m виберемо n так, щоб $2^n \asymp m^{q/2}$, і для $l \in \mathbb{N}$ покладемо

$$m_l = \begin{cases} m2^{-(n-l)\gamma}, & l \le n, \\ 0, & l > n, \end{cases}$$

де $\gamma > 0$ — деяке число, яке буде вказано нижче. Очевидно, що

$$\sum_{l=1}^{n} m_l \le C_7 m.$$

Далі, для $l \in \mathbb{N}$ покладемо

$$T(l) = \{t : t(x) = \delta_l(f, x)\}.$$

Тоді в силу леми А та теореми А $\forall\ f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(l)$ маємо

$$1 \ge \|f^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp \|\psi^{-1}(2^l)\delta_l(f)\|_p = \psi^{-1}(2^l)\|\delta_l(f)\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^l)\left(2^{-l}\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p} \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^l)2^{-l/p}\left(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Таким чином, згідно з (2) для $f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(l)$ справедливе співвідношення

$$\left(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p} \le C_8(p)\psi(2^l)2^{l/p},$$

де $C_8(p)$ — константа, залежна від p.

Далі, в силу леми А, для $g \in L_q \cap T(l)$ справедлива оцінка

$$\|g\|_q = \|\delta_l(g)\|_q \asymp \left(2^{-l}\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l g^j|^q\right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-l/q}\biggl(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l g^j|^q\biggr)^{1/q}. \tag{3}$$

Тепер, скориставшись лемою Б, можемо записати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)\ll\sum_l d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(l),L_q\cap T(l))=$$

$$=\sum_{l\le n} d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(l),L_q\cap T(l))+$$

$$+\sum_{l>n} d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(l),L_q\cap T(l))=I_1+I_2. \tag{4}$$

Оцінимо отримані доданки. Для I_2 в силу вибору чисел m_l маємо

$$I_2=\sum_{l>n}\|\delta_l(f)\|_q. \tag{5}$$

Враховуючи, що $f\in L^{\psi}_{\beta,p}$, і використовуючи лему В, можемо записати

$$\|\delta_l(f)\|_q\ll\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}\|\delta_l(f^{\psi}_{\beta})\|_p\ll$$

$$\ll\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}\|f^{\psi}_{\beta}\|_p\le\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (5), отримаємо

$$I_2\ll\sum_{l>n}\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}.$$

Оскільки за умовою теореми $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon_1}$ не зростає, то оцінка величини I_2 продовжується наступним чином:

$$I_2\ll\sum_{l>n}\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}=\sum_{l>n}\psi(2^l)2^{l(1/p-1/q+\varepsilon_1)}2^{-l\varepsilon_1}\le$$

$$\le\psi(2^n)2^{n(1/p-1/q+\varepsilon_1)}\sum_{l>n}2^{-l\varepsilon_1}\ll$$

$$\ll \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q+\varepsilon_1)}2^{-n\varepsilon_1} = \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)}. \qquad (7)$$

Оцінимо тепер I_1. В силу зазначеного вище ізоморфізму між простором поліномів $T(l)$ і скінченновимірним простором $\mathbb{R}^{2^l}$, згідно з оцінками (2) і (3), можемо записати

$$I_1 \ll \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)} d_{m_l}(B_p^{2^l}, l_q^{2^l}). \qquad (8)$$

Далі, скориставшись лемою Г, будемо мати

$$d_{m_l}(B_p^{2^l}, l_q^{2^l}) \ll 2^{2l\alpha/q} m_l^{-\alpha},$$

де $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$.

Тепер, враховуючи вибір чисел m_l, згідно з (8) одержимо

$$I_1 \ll \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}2^{2l\alpha/q} m_l^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q+2\alpha/q)} m_l^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q+2\alpha/q)} m^{-\alpha}2^{(n-l)\gamma\alpha} =$$

$$= \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q-\gamma\alpha+2\alpha/q)} m^{-\alpha}2^{n\gamma\alpha}.$$

Оскільки за умовою теореми $\psi(\tau)\tau^{\alpha-\varepsilon_2}$ не спадає, то при певному виборі γ послідовність $\psi(2^l)2^{l(\alpha-\gamma\alpha)}$ теж не спадає і тому

$$I_1 \ll \sum_{l\le n} \psi(2^l)2^{l(\alpha-\gamma\alpha)} m^{-\alpha}2^{n\gamma\alpha} \asymp$$

$$\asymp \psi(2^n)2^{n(\alpha-\gamma\alpha)} m^{-\alpha}2^{n\gamma\alpha} = \psi(2^n)2^{n\alpha} m^{-\alpha}.$$

Далі, враховуючи, що $2^n \asymp m^{q/2}$, для I_1 можемо записати

$$I_1 \ll \psi(2^n)2^{n\alpha} m^{-\alpha} \asymp \psi(2^n)2^{n\alpha}2^{-2n\alpha/q} =$$

$$= \psi(2^n)2^{n(\alpha-2\alpha/q)} = \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)}. \tag{9}$$

Таким чином, підставляючи (7) і (9) в (4), приходимо до шуканої оцінки зверху у випадку а):

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll$$

$$\ll \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} + \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Тепер отримаємо оцінку зверху у випадку б).

В силу леми Д при $1 < p \le 2$ має місце вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2}$, де $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau)\tau^{1/p-1/2}$, і відповідно

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll d_m(L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2}, L_q) \ll$$

$$\ll \tilde{\psi}([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} = \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки зверху в обох випадках одержані.

Переходячи до встановлення відповідних оцінок знизу, розглянемо спочатку випадок б). За заданим m виберемо n так, щоб $2^n \asymp m^{q/2}$. Безпосередньо із означення колмогоровського поперечника можемо записати:

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ge d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n), L_q), \tag{10}$$

де $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n)$ — множина функцій із множини $L^{\psi}_{\beta,p}$, які є поліномами із $T(n)$.

Далі, нехай P_n — оператор ортогонального проектування на $T(n)$. В силу теореми Б справедлива оцінка

$$\|P_n f\|_q \le C_9(q)\|f\|_q, \;\; 1 < q < \infty,$$

і тому $\forall\ f \in L_q$, $t \in T(n)$ маємо

$$\|t - f\|_q \geq C_{10}(q)\|P_n(t - f)\|_q = C_{10}(q)\|t - P_n f\|_q. \tag{11}$$

Таким чином згідно з (10) і (11)

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \geq d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n), L_q) \gg$$

$$\gg d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n), L_q \cap T(n)). \tag{12}$$

Далі розглянемо поліном

$$t(x) = \delta_n(f, x) \in L^{\psi}_{\beta,p}.$$

З одного боку, в силу леми A і теореми A можемо записати

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp \psi^{-1}(2^n)\|\delta_n(f)\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^n)2^{-n/p}\left(\sum_{j=1}^{2^n} |\delta_l f^j|^p\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Тому, згідно з (13), робимо висновок, що одиничній кулі із $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n)$ можемо співставити кулю радіуса $C_{11}(p)\psi^{-1}(2^n)2^{-n/p}$, $C_{11}(p) > 0$, із простору $l^{2^n}_p$.

З іншого боку,

$$\|f\|_q \asymp \|\delta_n(f)\|_q \asymp 2^{-n/q}\left(\sum_{j=1}^{2^n} |\delta_l f^j|^q\right)^{1/q}. \tag{14}$$

Із (14) робимо висновок, що для норм функцій із $L_q \cap T(n)$ і норм відповідних елементів із $l^{2^n}_q$ справедливе співвідношення

$$\|\cdot\|_q \asymp 2^{-n/q}\|\cdot\|_{l^{2^n}_q}.$$

Таким чином, співставляючи оцінки (10) — (14), можемо записати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(n), L_q \cap T(n)) \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)}d_m(B_p^{2^n}, l_q^{2^n}). \qquad (15)$$

Далі, використовуючи лему Г і враховуючи, що $2^n \asymp m^{q/2}$, з (15) будемо мати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу у випадку а) отримаємо, використовуючи вкладення

$$L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2} \subset C_{12}(p)L^{\psi}_{\beta,p}, \quad p \le 2,$$

де $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau)\tau^{1/p-1/2}$, в силу якого

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ge C_{13}(p)d_m(L^{\tilde{\psi}}_{\beta,p}, L_q) \ge$$

$$\ge \tilde{\psi}(2^n)2^{n(1/2-1/q)},$$

звідки

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему, доведено.

Прокоментуємо одержаний результат.

Якщо $\psi(\tau) = \tau^{-r}$, то з доведеної теореми одержуємо наступне твердження [17].

Теорема B. *Якщо* $1/p - 1/q < r < (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(1 - \frac{2}{q})$ *при* $2 \le p < < q < \infty$ *або* $1/p - 1/q < r < 1/p$ *при* $1 < p \le 2 < q < \infty$, *то*

$$d_m(W^r_{p,\beta}, L_q) \asymp m^{\frac{q}{2}(-r+1/p-1/q)}.$$

Зауваження 1. *При виконанні умов теореми* 1 *підпростір тригонометричних поліномів вигляду* $T(m)$ *не реалізує порядок колмогоровського поперечника* $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ [26].

Зауваження 2. *Одержане співвідношення* (1) *доповнює точні за порядком оцінки величин* $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ *при* $2 \le p < q < \infty$ *і* $1 < p \le 2 < q < \infty$, *які були одержані в роботі* [20] *за інших умов на послідовність* $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$. *Для зручності порівнянь наведемо відповідний результат.*

Теорема Г. *Нехай* $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді якщо*

а) при $1 < p \le 2 < p < \infty$ *існує* $\varepsilon_3 > 0$ *таке, що* $\psi(\tau)\tau^{\frac{1}{p}+\varepsilon_3}$ *не зростає, то*

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}};$$

б) при $2 \le p < p < \infty$ *існує* $\varepsilon_4 > 0$ *таке, що* $\psi(\tau)\tau^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})+\varepsilon_4}$ *не зростає, то*

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m).$$

Таким чином, співставивши (1) з результатами теореми Г, бачимо, що оцінки величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ відрізняються за порядком.

Література

[1] Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин–т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.

[3] Kolmogoroff A. Über die beste annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of Math. — 1936. — Vol. 37, no. 1. — P. 107 – 111.

[4] Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов любыми полиномами // Успехи мат. наук. — 1954. — **9**, №1. — С. 133 – 134.

[5] Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, №3. — С. 81 – 120.

[6] Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М. О поперечниках одного класса в пространствах L^p // Изв. АН Узб. ССР. Сер. физ.–мат. — 1967. — **2**. — С. 24 – 30.

[7] Маковоз Ю. И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Мат. сб. — 1972. — **87**, №1. — С. 136 – 142.

[8] Соломяк М. З., Тихомиров В. М. О геометрических характеристиках вложения классов W_p в C // Изв. вузов. Сер. мат. — 1967. — №10. — С. 76 – 82.

[9] Исмагилов Р. С. Об n–мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функ. анализ и его приложения. — 1968. — **2**, №2. — С. 32 – 39.

[10] Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161 – 178.

[11] Глускин Е. Д. Об оценках норм некоторых p–абсолютно суммирующих операторов // Функ. анализ. — 1978. — **12**, №2. — С. 23 – 31.

[12] Глускин Е. Д. Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. — 1974. — **219**, №3. — С. 527 – 530.

[13] Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи мат. наук. — 1975. — **30**, №6. — С. 179 – 180.

[14] Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — **41**, №2. — С. 334 – 351.

[15] Кашин Б. С. Общие ортонормированные системы и некоторые вопросы теории приближений (автореф. докт. дис.) // Мат. заметки. — 1979. — **26**, №2. — С. 292 – 315.

[16] Кашин Б. С. О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вест. МГУ. Сер. мат. — 1981. — №5. — С. 50 – 54.

[17] Куланин Е. Д. Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости // Вест. МГУ. Сер. мат. — 1983. — №2. — С. 24 – 30.

[18] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — **54**, №2. — С. 418 – 430.

[19] Степанец А. И., Кушпель А. К. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций — Киев, 1984. — 41 с. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 84.15).

[20] Кушпель А. К. Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q — Киев, 1987. — 54 с. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 87.44).

[21] Романюк А. С. Оценки наилучших приближений и поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ периодических функций многих переменных. — Киев, 1988. — С. 29 – 59. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 88.14).

[22] Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. II. — 538 с.

[23] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}^{\bar\alpha}_p$ и $\widetilde{H}^{\bar\alpha}_p$ в пространстве $\widetilde{L}_p$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — **49**, №5. — С. 916 – 934.

[24] Майоров В. Е. О наилучшем приближении классов $W^r_1(\mathbb{I}^s)$ в пространстве $L_\infty(\mathbb{I}^s)$ // Мат. заметки. — 1976. — **19**, №5. — С. 699 – 706.

[25] Тихомиров В. М. А. Н. Колмогоров и теория приближений // Успехи мат. наук. — 1989. — **44**, №1. — С. 83 – 122.

[26] Степанец А. И., Кушпель А. К. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_q // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №5. — С. 483 – 492.