Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 47–75

УДК 517.95

О. М. Бугрій

Львівський національний університет ім. І.Франка, Львів;
ol_buhrii@i.ua

Нелокальна задача для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності

The nonlocal problem for nonlinear parabolic equations with variable exponents of the nonlinearities is considered. The existence and uniqueness theorems are proved.

Для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності розглянуто нелокальну задачу. Знайдено достатні умови існування та єдиності її розв'язку.

1. Вступ

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область класу $C^{0,1}$ (див. [1, с. 48]) з межею $\partial\Omega$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Sigma_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Розглянемо в циліндрі $Q_{0,T}$ таку задачу:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}\Big(a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + c(x,t)u + \\ + g(x,t)|u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \qquad (1)$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \int\limits_0^T \Re(t)u(x,t)\,dt + h(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де $a_1, \ldots, a_n, c, g, p, q, f, \Re, h$ – деякі функції, зокрема, p, q – (змінні) показники нелінійності рівняння.

Задачі для рівнянь типу (1) мають велике прикладне значення. Вони описують, зокрема, процеси поширення тепла в сильно неоднорідному середовищі. Огляд результатів, що стосуються мішаних задач з класичною початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

замість нелокальної умови (3) для рівнянь зі змінними показниками нелінійності можна знайти в [2 – 5].

Нелокальні задачі для різноманітних рівнянь з частинними похідними розглянуто в [6 – 10]. Задачі з нелокальними за часовою змінною умовами виникають при моделюванні різних процесів, коли неможливо визначити початковий стан динамічної системи, але відома залежність цього стану від майбутніх значень невідомої функції. Такі задачі є узагальненням задач з періодичними за t умовами. Нелокальні за часовою змінною умови виникають, наприклад, при прогнозуванні погоди [11], в задачі про переміщення частинок [12]. Аналогічно, як в [13], можна розглядати (1)-(3), як обернену задачу з невідомою функцією u_0 з класичної початкової умови (4) та умовою перевизначення (3). В праці [14], зокрема, показано як лінійний аналог (1)-(3) звести до еквівалентної мішаної задачі з класичною початковою умовою (4) для інтегро-диференціального рівняння з інтегралом типу $\int_0^T H(x,t,s)u(x,s)\,ds$ в рівнянні.

Задачі з нелокальною умовою типу (3) для лінійних рівнянь досліджено в [15 – 17], а для нелінійних рівнянь зі сталими показниками нелінійності – в [18 – 20]. Задачі з нелокальною умовою

$\int_0^T u(x,t)\ dt = h(x)$ для лінійних параболічних рівнянь вивчено в [21 – 23]. Нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності і нелокальною за часовою змінною умовою розглянуто, мабуть, вперше.

Структура роботи така. У другому пункті сформульовано основний результат – теореми існування і єдиності узагальненого розв'язку задачі (1)-(3). Третій містить допоміжні позначення і факти, які використано у четвертому пункті статті при доведенні основних теорем. Статтю завершує список літератури.

2. Формулювання основного результату

Спершу введемо деякі позначення. Нехай $||\cdot||_B \equiv ||\cdot;B||$ – норма банахового простору B, B^* – спряжений до B простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ – скалярний добуток між B^* та B.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $\mathcal{O} = \Omega$ або $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ – множина всіх вимірних за Лебегом функцій $v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ (див. [24, с. 120]), $C^m(\mathcal{O})$ та $C_0^\infty(\mathcal{O})$ визначено в [25, с. 9], $L^p(\mathcal{O})$ – простір Лебега (див. [25, с. 22, 24]), $W^{m,p}(\mathcal{O})$ та $W_0^{m,p}(\mathcal{O})$ – простори Соболєва (див. [25, с. 45]), $H^m(\mathcal{O}) := W^{m,2}(\mathcal{O})$, $H_0^m(\mathcal{O}) := W_0^{m,2}(\mathcal{O})$, $C([0,T];B)$ та $C^m([0,T];B)$ визначено в [1, с. 147], $L^p(0,T;B)$ – простір Лебега-Бохнера (див. [1, с. 154]), $W^{m,p}(0,T;B)$ – простір Соболєва-Бохнера (див. [26, с. 286]), $H^m(0,T;B) := W^{m,2}(0,T;B)$,

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\delta \in L^\infty(\mathcal{O}) \ \mid \ \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \delta(y) > 0\}.$$

Для кожної функції $u \in L^1(Q_{0,T}) = L^1(0,T;L^1(\Omega))$ маємо, що $u(\cdot,t) \in L^1(\Omega)$, $t \in (0,T)$. Для зручності писатимемо $u(t)$ замість $u(\cdot,t)$ та u замість $u(x,t)$. Для всіх $\delta \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ використовуватимемо позначення:

$$\begin{gathered}\delta_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \delta(y), \quad \delta^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \delta(y), \\ S_\delta(s) := \max\{s^{\delta_0},\, s^{\delta^0}\}, \quad s \geq 0,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\delta'(y) := \frac{\delta(y)}{\delta(y)-1}, \quad y \in \mathcal{O}, \tag{6}$$

(тоді $\frac{1}{\delta(y)} + \frac{1}{\delta'(y)} = 1$ та $\delta' \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ при $\delta_0 > 1$),

$$\varrho_\delta(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\delta(y)}\, dy, \quad v \in \mathcal{M}(\mathcal{O}). \tag{7}$$

Нехай $\delta \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ та $\delta_0 > 1$. Множину

$$L^{\delta(y)}(\mathcal{O}) := \{v \in \mathcal{M}(\mathcal{O}) \mid \varrho_\delta(v;\mathcal{O}) < +\infty\}$$

з нормою $||v; L^{\delta(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \mid \varrho_\delta(v/\lambda;\mathcal{O}) \le 1\}$ називатимемо *узагальненим простором Лебега.* Множину

$$W^{m,\delta(y)}(\mathcal{O}) := \{v \in L^{\delta(y)}(\mathcal{O}) \mid D^\alpha v \in L^{\delta(y)}(\mathcal{O}),\ |\alpha| \le m\}$$

з нормою

$$||v; W^{m,\delta(y)}(\mathcal{O})|| := \sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha v; L^{\delta(y)}(\mathcal{O})|| \tag{8}$$

називатимемо *узагальненим простором Соболєва.* Замикання $C_0^\infty(\mathcal{O})$ за нормою (8) теж називатимемо *узагальненим простором Соболєва* і позначатимемо $W_0^{m,\delta(y)}(\mathcal{O})$. Властивості узагальнених просторів Лебега і Соболєва вивчено, зокрема, у [2,27–30] та [31].

Нехай $C_+(\overline{\Omega}) := \{p \in C(\overline{\Omega}) \mid \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} p(x) > 1\}$;

$$\Xi(\Omega) := \Big\{p \in \mathcal{B}_+(\Omega) \mid p_0 > 1;\ p^0 < \frac{np_0}{n-p_0} \ \text{при}\ p_0 < n\Big\};$$

$\Upsilon(\Omega)$ – клас функцій $p \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, для яких $p_0 > 1$ та існують відкриті множини $\Omega_1, \ldots, \Omega_m \subset \Omega$ та сталі $s_1, s_1^*, \ldots, s_m, s_m^* \in \mathbb{R}_+$ такі, що:

1) $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$: Ω_j складається зі скінченої кількості $C^{0,1}$-областей;

2) $\operatorname{mes}\Big(\Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Omega_j\Big) = 0$;

3) $1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \ldots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m <$
$< s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty$;

4) $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$: $s_j \le p(x) \le s_j^*$ майже для всіх $x \in \Omega_j$;

5) $\forall\, k \in \{1, ..., m-1\}$: $s_k^* < \frac{ns_k}{n-s_k}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

(S): $p \in \Upsilon(\Omega) \cup \Xi(\Omega) \cup C_+(\overline{\Omega})$, $q \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $q_0 > 1$;

(A): $a_i \in \mathcal{M}(Q_{0,T})$, $0 < a_0 \le a_i(x,t) \le a^0 < +\infty$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, $i = \overline{1,n}$;

(C): $g \in \mathcal{B}_+(Q_{0,T})$, $c \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(U): $\Re \in L^\infty((0,T))$, $h \in L^2(\Omega)$;

(F): $f \in L^2(Q_{0,T})$.

Користуватимемося такими позначеннями:

$$V := W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega), \tag{9}$$

$$||v;V|| := \sum_{i=1}^{n} ||v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)|| + ||v; L^2(\Omega)|| + ||v; L^{q(x)}(\Omega)||, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U(Q_{0,T}) := \Big\{ u : (0,T) \to V \ \Big|\ & ||u; U(Q_{0,T})|| := \\ := \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; L^{p(x)}(Q_{0,T})|| &+ ||u; L^2(Q_{0,T})|| + \\ &+ ||u; L^{q(x)}(Q_{0,T})|| < +\infty \Big\}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$(z,w)_\Omega := \int\limits_\Omega z(x)w(x)\,dx, \quad z,w : \Omega \to \mathbb{R}; \tag{12}$$

$$\{u,v\}_Q := \int\limits_{Q_{0,T}} u(x,t)v(x,t)\,dxdt, \quad u,v : Q_{0,T} \to \mathbb{R}; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} (A(t)z,w)_\Omega := \sum_{i=1}^{n} (a_i(t)|z_{x_i}|^{p(x)-2} z_{x_i}, w_{x_i})_\Omega + (c(t)z,w)_\Omega + \\ + (g(t)|z|^{q(x)-2}z, w)_\Omega, \quad z,w \in V, \quad t \in (0,T); \end{aligned} \tag{14}$$

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T (A(t)u(t), v(t))_\Omega \, dt, \quad u, v \in U(Q_{0,T}); \tag{15}$$

$$\Re_2 := \int\limits_0^T |\Re(t)|^2 \, dt. \tag{16}$$

Означення 1. *Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ називатимемо узагальненим розв'язком нелокальної задачі* (1)-(3)*, якщо $u_t \in [U(Q_{0,T})]^*$, u задовольняє* (3) *і для всіх $v \in U(Q_{0,T})$ правильна рівність*

$$\langle u_t, v\rangle_{U(Q_{0,T})} + \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} = \{f, v\}_Q. \tag{17}$$

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* **(S)-(F)** *та $c_0 > \frac{\Re_2}{2}$, то нелокальна задача* (1)-(3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1*, і якщо $p_0 \le n$, то $p_0 > 1 + \frac{n-2}{n+2}$. Тоді якщо $\partial\Omega \subset C^{2r}$, де*

$$r \ge \frac{1}{2} \max\left\{2,\ 1 + \frac{n(p^0-2)}{2p^0},\ \frac{n(q^0-2)}{2q^0}\right\}, \qquad r \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

то нелокальна задача (1)-(3) *має узагальнений розв'язок u.*

3. Допоміжні позначення і твердження

Нехай $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярний добуток в гільбертовому просторі H, $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$; $(\cdot,\cdot) := (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$. Для просторів X та Y позначення $X \circlearrowleft Y$ означає неперервне вкладення, $X \overline{\circlearrowleft} Y$ – неперервне і щільне вкладення, а $X \overset{K}{\subset} Y$ – компактне вкладення. Нагадаємо деякі властивості узагальнених просторів Лебега і Соболєва.

Твердження 1 (Лема 1 [32, с. 168])**.** *Нехай* $\zeta \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $\zeta_0 > 1$. *Тоді для всіх* $v \in \mathcal{M}(Q_{0,T})$ *маємо таке (див. (5), (7)):*
i) $||v; L^{\zeta(x)}(Q_{0,T})|| \le S_{1/\zeta}(\varrho_\zeta(v; Q_{0,T}))$ *при* $\varrho_\zeta(v; Q_{0,T}) < +\infty$;
ii) $\varrho_\zeta(v; Q_{0,T}) \le S_\zeta(||v; L^{\zeta(x)}(Q_{0,T})||)$ *при* $||v; L^{\zeta(x)}(Q_{0,T})|| < +\infty$.

Твердження 2 (Лема 2 [33, с. 46], теорема 3.2 [30, с. 77])**.** *Нехай* $\zeta \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $\zeta_0 > 1$. *Тоді правильними є такі вкладення:*

$$L^{\zeta^0}(0,T; L^{\zeta(x)}(\Omega)) \,\bar{\circlearrowleft}\, L^{\zeta(x)}(Q_{0,T}) \,\bar{\circlearrowleft}\, L^{\zeta_0}(0,T; L^{\zeta(x)}(\Omega)). \tag{19}$$

Твердження 3. *Нехай* $p \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $p_0 > 1$. *Тоді*

1) (*теорема* 3.10 [28, с. 610], *теорема* 2.7 [29, с. 443]) *якщо* $p \in \Upsilon(\Omega) \cup C_+(\overline{\Omega})$, *то еквівалентною нормою в* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *є*

$$||v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)|| = \sum_{i=1}^{n} ||v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||; \tag{20}$$

2) (*лема* 5 [33, с. 48], *теорема* 3.1 [30, с. 76]) *якщо* $p \in \Upsilon(\Omega) \cup \Xi(\Omega)$ *та* $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in L^{p(x)}(\Omega)$, *то* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *і правильна узагальнена нерівність Пуанкаре*

$$||u; L^{p(x)}(\Omega)|| \le C_1 \Big(\sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)|| + ||u; L^1(\Omega)|| \Big), \tag{21}$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка не залежить від* u.

Нехай V – простір з (9), $U(Q_{0,T})$ – з (11). При виконанні умови **(S)** з твердження 3 випливає, що (10) є нормою в V, яка еквівалентна стандартній нормі перетину банахових просторів. Аналогічно як в теоремі 3.6 [30, с. 83] показуємо, що V та $U(Q_{0,T})$ є рефлексивними банаховими просторами. Зрозуміло, що $V \,\bar{\circlearrowleft}\, L^2(\Omega) \,\bar{\circlearrowleft}\, V^*$. Зокрема, з твердження 2 матимемо, що

$$L^{s_{\max}}(0,T; V) \,\bar{\circlearrowleft}\, U(Q_{0,T}) \,\bar{\circlearrowleft}\, L^{s_{\min}}(0,T; V), \tag{22}$$

$$U(Q_{0,T}) \,\bar{\circlearrowleft}\, L^2(Q_{0,T}) \,\bar{\circlearrowleft}\, [U(Q_{0,T})]^* \,\bar{\circlearrowleft}\, L^{s'_{\max}}(0,T; V^*), \tag{23}$$

де $s_{\min} := \min\{p_0, 2, q_0\}$, $s_{\max} := \max\{p^0, 2, q^0\}$, $\frac{1}{s_{\max}} + \frac{1}{s'_{\max}} = 1$. Звідси, зокрема, випливає, що елементи просторів $U(Q_{0,T})$ та $[U(Q_{0,T})]^*$ є розподілами з $D^*(0,T;V^*)$. Аналогічно як теорему 1 [33, с. 50] доводимо таку лему.

Лема 1. *Нехай виконується умова* **(S)**, $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ *– база* V. *Тоді множина* $\Psi = \left\{ \sum\limits_{\mu=1}^{m} \psi_\mu^m(t) w^\mu(x) \,\middle|\, m\in\mathbb{N},\ \psi_1^m, \ldots, \psi_m^m \in C^1([0,1]) \right\}$ *є всюди щільною в* $U(Q_{0,T})$.

Використовуватимемо такі факти.

Твердження 4 (Лема 4.4 [34, с. 457])**.** *Якщо виконується умова* **(S)**, $u, v \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_t, v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$, *то для всіх* $t_1, t_2 \in [0,T]$ *правильна формула*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle u_t(t), v(t)\rangle_V \, dt = \int\limits_{\Omega} u(x,t) v(x,t)\, dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle v_t(t), u(t)\rangle_V \, dt. \quad (24)$$

Твердження 5 (Теорема 1 [35, с. 119])**.** *Якщо* $s > 1$, *то формула*

$$\left(|u|^s\right)_t = s|u|^{s-2} u\, u_t \quad (25)$$

правильна при виконанні однієї з таких умов:
i) $u \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$, *і тоді* $|u|^s \in C^1(\overline{Q_{0,T}})$;
ii) $u \in W^{1,d}(Q_{0,T})$, *де* $d \geq s$, *і тоді* $|u|^s \in W^{1,\frac{d}{s}}(Q_{0,T})$.

Твердження 6 (Лема Вішика, див. лему 4.3 [36, с. 66] та [37, с. 60])**.** *Нехай* $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *– неперервна функція. Якщо існує* $\varrho > 0$ *таке, що* $(P(z), z)_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ $\forall\, z \in \mathbb{R}^m$: $|z| = \varrho$, *то існує таке* $z^m \in \mathbb{R}^m$, $|z| \leq \varrho$, *що* $P(z^m) = 0$.

Твердження 7 (Аналог леми Фату, див. [38, с. 173, 179])**.** *Якщо* B *– банахів простір,* $z^j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ *слабко, або* $*$*-слабко в* B, *то виконується нерівність* $||z||_B \leq \varliminf\limits_{j\to\infty} ||z^j||_B$.

Твердження 8 (Теорема Обена, див. [39] і [40, с. 393])**.** *Якщо $\alpha, \beta > 1$ – числа, $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ – банахові простори, $\mathcal{W} \overset{K}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$, то*

$$\{u \in L^{\alpha}(0,T;\mathcal{W}) \ | \ u_t \in L^{\beta}(0,T;\mathcal{B})\} \overset{K}{\subset} L^{\alpha}(0,T;\mathcal{L}) \cap C([0,T];\mathcal{B}).$$

Через $C_w([0,T];\mathcal{B})$ позначимо множину всіх слабко неперервних функцій $u : [0,T] \to \mathcal{B}$, тобто таких функцій, що

$$\lim_{[0,T]\ni t_m \to t \in [0,T]} \langle y, u(t_m)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle y, u(t)\rangle_{\mathcal{B}} \text{ для всіх } y \in \mathcal{B}^*.$$

Твердження 9 (Теорема Штрауса, див. теорему 2.1 [41, с. 544] та лему 8.1 [42, с. 307])**.** *Нехай $\mathcal{L}, \mathcal{B}$ – банахові простори, $\mathcal{L}$ – рефлексивний, $\mathcal{L} \overline{\circlearrowleft} \mathcal{B}$. Тоді*

$$L^{\infty}(0,T;\mathcal{L}) \cap C_w([0,T];\mathcal{B}) = C_w([0,T];\mathcal{L}).$$

Для простору V з (9) та $H := L^2(\Omega)$ з твердження 9 випливає така лема.

Лема 2 (Узагальнена теорема Штрауса)**.**

$$L^{\infty}(0,T;H) \cap C([0,T];V^*) = C([0,T];H).$$

Доведення. Нехай $u \in L^{\infty}(0,T;H) \cap C([0,T];V^*)$. Візьмемо довільні $t_0 \in [0,T]$ і $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$ такі, що $t_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} t_0$. Очевидно, що $C([0,T];V^*) \subset C_w([0,T];V^*)$. Тому з твердження 9 маємо, що $u \in C_w([0,T];H)$. Тоді одержимо таке: а) $u(t_0) \in H$, $u(t_m) \in H$, $m \in \mathbb{N}$; б) $u(t_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u(t_0)$ слабко в H. Крім того, $u(t_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u(t_0)$ сильно в просторі V^*, а тому $||u(t_m) - u(t_0)||_{V^*} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $\mathbb{R}$. Якщо $w \in V^*$ та $w \in H$, то (див. [27, с. 384] та [43, с. 291]) $|w|_H = ||w||_{V^*}$. Тому $|u(t_m) - u(t_0)|_H \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, $u \in C([0,T];H)$ і лему доведено. $\square$

Нехай $\mathcal{L}(X,Y)$ – простір обмежених лінійних операторів з X в Y ([43, с. 32]), $\Delta^0 v := v$, $\Delta^1 v := \Delta v$, $\Delta^r v := \Delta(\Delta^{r-1} v)$, де $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_r \equiv H^{2r}_{\Delta}(\Omega) := \{v \in H^{2r}(\Omega) \ | \ v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = \ldots =$$

$$= \Delta^{r-1} v|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \mathcal{W}_r^* := [\mathcal{W}_r]^*. \tag{26}$$

Твердження 10 (Лема 3 [44, с. 229]). *Якщо $\partial\Omega \subset C^{2r}$, $r \in \mathbb{N}$, то існує стала $C_2 > 0$ така, що для всіх $v \in \mathcal{W}_r$ виконується оцінка*

$$||v; H^{2r}(\Omega)|| \leq C_2 ||\Delta^r v; L^2(\Omega)||. \tag{27}$$

Розглядатимемо простір $\mathcal{W}_r$ зі скалярним добутком $(u,v)_{\mathcal{W}_r} = \int_\Omega \Delta^r u \, \Delta^r v \; dx$. З (27) випливає, що породжена цим скалярним добутком норма еквівалентна стандартній нормі $||\cdot; H^{2r}(\Omega)||$, індукованій в $\mathcal{W}_r$. Тому $\mathcal{W}_r$ є гільбертовим простором, причому

$$\mathcal{W}_r \circlearrowleft H^{2r}(\Omega), \qquad \mathcal{W}_r \overline{\circlearrowleft} L^2(\Omega) \overline{\circlearrowleft} \mathcal{W}_r^*. \tag{28}$$

Нехай $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – всі власні значення, а $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – відповідні їм власні функції задачі

$$-\Delta\, w = \lambda w \quad \text{в області} \quad \Omega, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{29}$$

Твердження 11 (Теорема 8 [44, с. 230]). *Якщо $\partial\Omega \subset C^{2r}$, де $r \in \mathbb{N}$, то множина $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ всіх власних функцій задачі* (29) *є базою простору $\mathcal{W}_r$.*

Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертовий простір, $\mathcal{V}$ – рефлексивний сепарабельний банахів простір,

$$\mathcal{V} \overline{\circlearrowleft} \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \overline{\circlearrowleft} \mathcal{V}^*. \tag{30}$$

Нехай $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормальна база простору $\mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$ – число, $\mathfrak{M}$ – лінійна оболонка елементів $\{w^1, \ldots, w^m\}$. Визначимо єдиний ортогональний проектор $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ так (див. [45, с. 527]):

$$P_m h := \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_{\mathcal{H}}\, w^j, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{31}$$

Відомо, що P_m – самоспряжений оператор, а з теореми 7.3.6 [45, с. 515] маємо неперервність P_m і оцінку

$$|P_m h|_{\mathcal{H}} \leq |h|_{\mathcal{H}}, \quad h \in \mathcal{H}. \tag{32}$$

Якщо $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, то розглянемо, взагалі кажучи, несамоспряжений оператор $\widehat{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, визначений так:

$$\widehat{P}_m v := P_m v \quad \text{для всіх} \quad v \in \mathcal{V} \tag{33}$$

($\widehat{P}_m$ – це звуження P_m на $\mathcal{V}$). Спряжений до $\widehat{P}_m$ оператор позначимо $\widehat{P}_m^*$. Тоді з [46, с. 865] матимемо, що $\widehat{P}_m^*(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{V}$.

Твердження 12 (Лема 3.9 [46, с. 865-866]). *Нехай $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база простору $\mathcal{H}$, яка належить до простору $\mathcal{V}$, $\psi_1^m, \dots, \psi_m^m \in \mathbb{R}$ – деякі числа, $F \in \mathcal{V}^*$. Тоді елемент $z^m = \sum\limits_{s=1}^{m} \psi_s^m w^s \in \mathcal{V}$ задовольняє систему співвідношень*

$$\begin{cases} \langle z^m, w^1\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^1\rangle_{\mathcal{V}}, \\ \quad \vdots \\ \langle z^m, w^m\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, w^m\rangle_{\mathcal{V}}, \end{cases} \tag{34}$$

тоді і тільки тоді, коли виконується така рівність в $\mathcal{V}^*$:

$$z^m = \widehat{P}_m^* F. \tag{35}$$

Далі вважатимемо, що в (30) $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = \mathcal{W}_r$. Крім того, нехай функції $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в (31) є такими, як в твердженні 11. Тоді $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$, $\widehat{P}_m \in \mathcal{L}(\mathcal{W}_r, \mathcal{W}_r)$ та (див. [46, с. 866])

$$||\widehat{P}_m v||_{\mathcal{W}_r} \le ||v||_{\mathcal{W}_r}, \quad v \in \mathcal{W}_r. \tag{36}$$

Якщо $f \in L^s(0,T;\mathcal{H})$, $s > 1$, то $P_m f(t) \in \mathcal{H}$ для $t \in [0,T]$, і з (32) випливає оцінка $\int_0^T |P_m f(t)|_{\mathcal{H}}^s \, dt \le \int_0^T |f(t)|_{\mathcal{H}}^s \, dt$, а тому

$$||P_m f;||_{L^s(0,T;L^2(\Omega))} \le ||f||_{L^s(0,T;L^2(\Omega))}, \quad f \in L^s(0,T;L^2(\Omega)). \tag{37}$$

Крім того, $\int_0^T ||\widehat{P}_m u(t)||_{\mathcal{W}_r}^s \, dt \le \int_0^T ||u(t)||_{\mathcal{W}_r}^s \, dt$ (див. (36)), тобто

$$||\widehat{P}_m u||_{L^s(0,T;\mathcal{W}_r)} \le ||u||_{L^s(0,T;\mathcal{W}_r)}, \quad u \in L^s(0,T;\mathcal{W}_r). \tag{38}$$

Тому (див. теорему 6 [47, с. 231]) для $s' = \frac{s}{s-1}$ матимемо, що

$$||\widehat{P}_m^* w||_{L^{s'}(0,T;\mathcal{W}_r^*)} \le ||w||_{L^{s'}(0,T;\mathcal{W}_r^*)}, \quad w \in L^{s'}(0,T;\mathcal{W}_r^*). \qquad (39)$$

При побудові гальоркінських наближень розв'язку нашої задачі нам треба буде показати розв'язність задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi'(t) + L(t,\varphi(t)) = M(t) \quad \text{при} \quad t \in (0,T), \quad \varphi(0) = \varphi^0. \qquad (40)$$

Тут $\varphi, M : (0,T) \to \mathbb{R}^m$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$, $L : Q \to \mathbb{R}^m$ (для спрощення вважатимемо, що $L(t,0) = 0$ для $t \in [0,T]$), $Q := (0,T) \times \mathbb{R}^m$.

Означення 2. *Функцію $\varphi \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R}^m)$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (40)*, якщо φ задовольняє систему рівнянь* (40_1) *майже для всіх $t \in (0,T)$ та φ задовольняє початкову умову* (40_2)*.*

Означення 3. *Казатимемо, що функція $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє умову Каратеодорі, якщо для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ функція $(0,T) \ni t \mapsto L(t,\xi) \in \mathbb{R}^m$ є вимірною і для майже всіх $t \in (0,T)$ функція $\mathbb{R}^m \ni \xi \mapsto L(t,\xi) \in \mathbb{R}^m$ є неперервною.*

Означення 4 ([48, с. 241])**.** *Казатимемо, що $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє L^p-умову Каратеодорі, якщо L задовольняє умову Каратеодорі та для всіх $R > 0$ існує таке $h_R \in L^p(0,T)$, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ ($|\xi| \le R$) і майже для всіх $t \in (0,T)$ виконується оцінка*

$$|L(t,\xi)| \le h_R(t). \qquad (41)$$

Твердження 13 (Теорема Каратеодорі-Ла-Салля, див. теорему 3.24 [46, с. 872])**.** *Нехай $p \ge 2$, функція $L : Q \to \mathbb{R}^m$ задовольняє L^p-умову Каратеодорі, $M \in L^p(0,T;\mathbb{R}^m)$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^m$. Тоді якщо існують невід'ємні функції $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ такі, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ і майже для всіх $t \in (0,T)$ виконується нерівність*

$$(L(t,\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} \ge -\alpha(t)|\xi|^2 - \beta(t), \qquad (42)$$

то задача (40) *має узагальнений розв'язок $\varphi \in W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^m)$.*

Лема 3. *Нехай $r \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $r_0 > 1$. Тоді правильні такі оцінки:*

1) *для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ та $x \in \Omega$*

$$\Big| |\eta_1|^{r(x)-2}\eta_1 - |\eta_2|^{r(x)-2}\eta_2 \Big| \le$$

$$\le C_3(r_0, r^0)\Big(|\eta_1| + |\eta_2|\Big)^{r(x)-1-\alpha(x)} |\eta_1 - \eta_2|^{\alpha(x)}, \tag{43}$$

де $0 \le \alpha(x) \le \min\{1, r(x)-1\}$,

$$C_3(r_0, r^0) := \max\{1,\, 2^{2-r_0},\, (r^0-1)2^{2-r_0}\};$$

2) *для всіх $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ та $x \in \Omega$*

$$\Big(|\xi_1|^{r(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{r(x)-2}\xi_2, \xi_1 - \xi_2\Big) \ge$$

$$\ge C_4(r_0, r^0)\Big(|\xi_1| + |\xi_2|\Big)^{r(x)-\beta(x)} |\xi_1 - \xi_2|^{\beta(x)}, \tag{44}$$

де $\max\{r(x), 2\} \le \beta(x) < \infty$,

$$C_4(r_0, r^0) := \min\{2^{2-r^0},\, (r_0-1)2^{2-r^0}\}.$$

Доведення. 1) З теореми 2.1 [49, с. 2] випливає, що в кожній точці $x \in \Omega$ виконується оцінка (43) зі сталою

$$\widetilde{C_3}(r(x)) = \max\{1,\, 2^{2-r(x)},\, (r(x)-1)2^{2-r(x)}\}.$$

З очевидної нерівності $\widetilde{C_3}(r(x)) \le C_3(r_0, r^0)$ для всіх $x \in \Omega$ і випливає (43).

2) З теореми 2.2 [49, с. 3] випливає, що в кожній точці $x \in \Omega$ виконується оцінка (44) зі сталою

$$\widetilde{C_4}(r(x)) = \min\{2^{2-r(x)},\, (r(x)-1)2^{2-r(x)}\}.$$

З очевидної нерівності $\widetilde{C_4}(r(x)) \ge C_4(r_0, r^0)$ для всіх $x \in \Omega$ і випливає (44). Лему доведено. □

Використовуватимемо таке твердження.

Твердження 14 (Лема 3.25 [46, с. 874]). *Нехай* $r \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $r_0 > 1$, $b \in L^\infty(Q_{0,T})$, $z \in L^{r(x)}(\Omega)$, $w(x,\xi) = \sum\limits_{l=1}^{m} \xi_l w^l(x)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $w^1, \ldots, w^m \in L^{r(x)}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. *Тоді функція*

$$I(t,\xi) := \int\limits_{\Omega} b(x,t)|w(x,\xi)|^{r(x)-2} w(x,\xi) z(x)\, dx, \tag{45}$$

$t \in (0,T)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, *задовольняє* L^∞*-умову Каратеодорі.*

Лема 4. *Нехай виконуються умови* **(A)** *та* **(C)**, *оператори* $\{A(t)\}_{t\in(0,T)}$ *взято з* (14), $\mathcal{A}$ *– з* (15). *Тоді* $A(t) : V \to V^*$ *та* $\mathcal{A} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$ *є обмеженими монотонними і семінеперервними операторами і для всіх* $z, w \in V$

$$(A(t)z, z)_\Omega \geq \int\limits_{\Omega} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |z_{x_i}|^{p(x)} + c_0|z|^2 + g_0|z|^{q(x)} \Big]\, dx, \tag{46}$$

$$(A(t)z - A(t)w, z - w)_\Omega \geq \int\limits_{\Omega} c_0|z-w|^2\, dx, \quad t \in (0,T). \tag{47}$$

Лему 4 доводимо аналогічно як теорему 3.4 [34, с. 454]. Використовуватимемо такі позначення:

$$h_2 := \int\limits_{\Omega} |h(x)|^2\, dt, \qquad f_2 := \int\limits_{Q_{0,T}} |f(x,t)|^2\, dt. \tag{48}$$

4. Обґрунтування основного результату

Спершу доведемо теорему єдиності.

Доведення теореми 1. Нехай u^1 і u^2 є узагальненими розв'язками нелокальної задачі (1)-(3), $u := u^1 - u^2$. Тоді з рівності (17), записаної для u^1 та u^2, отримаємо, що

$$I_1 + I_2 = 0, \tag{49}$$

де $I_1 = \langle u_t, u\rangle_{U(Q_{0,T})}$, $I_2 = \langle \mathcal{A}u^1 - \mathcal{A}u^2, u^1 - u^2\rangle_{U(Q_{0,T})}$. Використавши (24), (3), нерівність Коші-Буняковського і позначення (16), одержимо нерівність

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,T)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,0)|^2\, dx \geq$$
$$\geq -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_0^T \Re(t)u(x,t)\, dt\Big|^2\, dx \geq -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_0^T |\Re(t)|^2\, dt\Big) \times$$
$$\times \Big(\int\limits_0^T |u(x,t)|^2\, dt\Big)\, dx = -\frac{\Re_2}{2}\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^2\, dxdt.$$

З (47) випливає оцінка

$$I_2 \geq \int\limits_{Q_{0,T}} c_0|u|^2\, dxdt.$$

Тому з (49) отримаємо оцінку

$$\Big(c_0 - \frac{\Re_2}{2}\Big)\int\limits_{Q_{0,T}} |u|^2\, dxdt \leq 0. \tag{50}$$

Врахувавши умову $c_0 > \frac{\Re_2}{2}$, з (50) матимемо, що $u = 0$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Тому $u^1 = u^2$ і теорему 1 доведено. □

Тепер перейдемо до доведення існування розв'язку.

Доведення теореми 2. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна.

Крок 1. Нехай r взято з (18), $\mathcal{W}_r$ та $\mathcal{W}_r^*$ – з (26), $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – функції з твердження 11, які вважаємо ортонормованими в просторі $L^2(\Omega)$,

$$u^m(x,t) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^m(t) w^\mu(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{51}$$

де функції $\varphi_1^m, \ldots, \varphi_m^m$ задовольняють рівності

$$(u_t^m(t), w^\mu)_\Omega + (A(t)u^m(t), w^\mu)_\Omega = (f(t), w^\mu)_\Omega, \tag{52}$$

$t \in (0,T)$, $\mu = \overline{1,m}$,

$$u^m|_{t=0} = u_0^m. \tag{53}$$

Тут $u_0^m(x) := \sum\limits_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu^m w^\mu(x)$, $x \in \Omega$, числа $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m \in \mathbb{R}$ вибрано так, щоб виконувалася рівність

$$u^m(x,0) = \int\limits_0^T \Re(t) u^m(x,t)\, dt + h(x), \quad x \in \Omega. \tag{54}$$

Покажемо, що такі $\varphi_1^m, \ldots, \varphi_m^m$ та $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m$ існують.

Враховуючи ортонормованість функцій $\{w^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ в $L^2(\Omega)$, перепишемо рівності (52)-(53) у вигляді (40), де $\varphi := (\varphi_1^m, \ldots, \varphi_m^m)$, $\varphi^0 := (\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m)$, $L := (L_1, \ldots, L_m)$, $M := (M_1, \ldots, M_m)$,

$$L_\mu(t, \varphi(t)) := (A(t)u^m(t), w^\mu)_\Omega,$$

$$M_\mu(t) := (f(t), w^\mu)_\Omega, \quad t \in (0,T), \quad \mu = \overline{1,m}.$$

Покажемо, що виконуються умови теореми Каратеодорі-Ла-Салля (твердження 13). З тверджень типу твердження 14 випливає, що функція $L : (0,T) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задовольняє L^∞-умову Каратеодорі. Зрозуміло, що $M \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Крім того, з оцінок (46) та ортонормованості функцій $\{w^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ в $L^2(\Omega)$ отримаємо таке:

$$(L(t, \varphi(t)), \varphi(t))_{\mathbb{R}^m} = (A(t)u^m(t), u^m(t))_\Omega \geq$$

$$\geq c_0 \int\limits_{\Omega_t} |u^m|^2\, dx = c_0 \int\limits_{\Omega} \Big| \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^m(t) w^\mu(x) \Big|^2 dx = c_0 |\varphi^m(t)|^2.$$

Звідси випливає виконання оцінки (42) з $\alpha(t) \equiv 0$ та $\beta(t) \equiv 0$. Тому для кожного набору $\alpha^m := \varphi^0 = (\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m)$ з теореми Каратеодорі-Ла-Салля випливає існування узагальненого розв'язку $\varphi \in H^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ задачі (52)-(53) (тут $\varphi = \varphi(t;\alpha^m)$, $t \in (0,T)$, $\alpha^m \in \mathbb{R}^m$). Підставивши φ в (51), матимемо функцію $u^m = u^m(x,t;\alpha^m)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$, $\alpha^m \in \mathbb{R}^m$, яка задовольняє (52)-(53). Оскільки $\partial\Omega \in C^{2r}$, то з твердження 11 і вкладення (28) випливає, що $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}_r \subset H^{2r}(\Omega)$. Тому, з (51) отримаємо:

$$u^m \in H^1(0,T;H^{2r}(\Omega)) \subset H^1(Q_{0,T}). \tag{55}$$

Крок 2. Покажемо, що числа $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m$ можна вибрати так, щоб виконувалася рівність (54). Домноживши (54) на $w^\mu(x)$, де $\mu = \overline{1,m}$, зінтегрувавши за $x \in \Omega$, і використавши ортонормованість $\{w^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ в $L^2(\Omega)$, отримаємо таке:

$$\alpha_\mu^m = \int\limits_{Q_{0,T}} \Re(t) u^m(x,t;\alpha_1^m,\ldots,\alpha_m^m) w^\mu(x)\, dxdt + \\ + \int\limits_\Omega h(x) w^\mu(x)\, dx, \quad \mu = \overline{1,m}. \tag{56}$$

Ввівши позначення $P := (P_1, \ldots, P_m)$, де

$$P_\mu \alpha^m := \alpha_\mu^m - \{\Re\, w^\mu, u^m(x,t;\alpha_1^m,\ldots,\alpha_m^m)\}_Q - (h, w^\mu)_\Omega, \quad \mu = \overline{1,m},$$

одержимо, що α^m – розв'язок системи алгебричних рівнянь

$$P\alpha^m = 0. \tag{57}$$

Покажемо, що цей розв'язок існує. Використаємо лему Вішика (твердження 6). Спершу знайдемо рівномірні оцінки для u^m.

Зрозуміло, що

$$\Re h u^m \le \frac{\varkappa_0}{2}|u^m|^2 + \frac{1}{2\varkappa_0}|\Re|^2|h|^2, \quad \varkappa_0 > 0.$$

Тоді з (54) і нерівності Коші-Буняковського одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,0)|^2\, dx = \int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_0^T \Re(t) u^m(x,t)\, dt + h(x) \Big|^2\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \Big[\Big(\int\limits_0^T \Re(t) u^m(x,t)\, dt \Big)^2 + 2 \int\limits_0^T |\Re(t) h(x) u^m(x,t)|\, dt +$$

$$+ |h(x)|^2 \Big]\, dx \leq \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_0^T |\Re(t)|^2\, dt \Big) \Big(\int\limits_0^T |u^m(x,t)|^2\, dt \Big)\, dx +$$

$$+ \varkappa_0 \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^2\, dxdt + \frac{\Re_2 h_2}{\varkappa_0} + h_2 =$$

$$= (\Re_2 + \varkappa_0) \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^2\, dxdt + \frac{\Re_2 h_2}{\varkappa_0} + h_2, \tag{58}$$

де $\Re_2$ взято з (16), а h_2 – з (48).

Для фіксованих $t \in (0,T)$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ домножимо μ-ту рівність з (52) на $\varphi_\mu^m(t)$, підсумуємо за μ від 1 до m і результат зінтегруємо за $t \in (0,T)$. Отримаємо таке:

$$\{u_t^m, u^m\}_Q + \langle \mathcal{A} u^m, u^m \rangle_{U(Q_{0,T})} = \{f, u^m\}_Q. \tag{59}$$

З (55) та пункту *ii* твердження 5 матимемо, що

$$|u^m|^2 \in W^{1,1}(Q_{0,T}), \quad \big(|u^m|^2\big)_t = 2u^m\, u_t^m. \tag{60}$$

Тому, зінтегрувавши частинами і використавши (58), отримаємо

$$\{u_t^m, u^m\}_Q = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u^m(x,T)|^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u^m(x,0)|^2\, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u^m(x,T)|^2\, dx - \frac{\Re_2 + \varkappa_0}{2} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^m|^2\, dxdt - \frac{\Re_2 h_2}{2\varkappa_0} - \frac{h_2}{2}.$$

Для оцінки другого доданку зліва в (59) використаємо (46). Зрозуміло, що

$$|fu^m| \le \frac{\varkappa_1}{2}|u^m|^2 + \frac{1}{2\varkappa_1}|f|^2, \quad \varkappa_1 > 0.$$

Тоді з (59) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^m(x,T)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^{p(x)} + g_0|u^m|^{q(x)} +$$

$$+ \Big(c_0 - \frac{\Re_2}{2} - \frac{\varkappa_0}{2} - \frac{\varkappa_1}{2}\Big)|u^m|^2\Big]\, dxdt \le \frac{\Re_2 h_2}{2\varkappa_0} + \frac{h_2}{2} + \frac{f_2}{2\varkappa_1},$$

де $\Re_2$ взято з (16), а h_2 та f_2 – з (48).

Вибравши $\varkappa_0, \varkappa_1 > 0$ досить малими, звідси матимемо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u^m_{x_i}|^{p(x)} + |u^m|^{q(x)} + |u^m|^2\Big]\, dxdt \le C_5, \tag{61}$$

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,T)|^2\, dx \le C_6. \tag{62}$$

Тому з (58) одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,0)|^2\, dx \le C_7. \tag{63}$$

Тут $C_5, \dots, C_7 > 0$ – сталі, які не залежать від m, α^m.

Повернемося до системи (57). Використавши нерівності (61) і (63), матимемо таке:

$$(P\alpha^m, \alpha^m)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{\mu=1}^{m} (P_\mu \alpha^m)\alpha^m_\mu = |\alpha^m|^2 -$$

$$-\int\limits_{Q_{0,T}} \Re(t) u^m(x,0;\alpha^m) u^m(x,t;\alpha^m)\, dxdt - \int\limits_{\Omega} h(x) u^m(x,0;\alpha^m)\, dx \ge$$

$$\geq |\alpha^m|^2 - \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\frac{1}{2}|u^m|^2 + \frac{|\Re|^2}{2}|u^m(0)|^2\Big]dxdt - \int\limits_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}|u^m(0)|^2 + \frac{|h|^2}{2}\Big]dx \geq$$

$$\geq |\alpha^m|^2 - C_8 \underset{|\alpha^m|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Тому з леми Вішика випливає існування розв'язку системи (57).

Отже, для кожного $\alpha^m \in \mathbb{R}^m$ через $u^m = u^m(x,t;\alpha^m)$ позначаємо розв'язок задачі (52)-(53). По цій функції формуємо праву частину рівностей (56) і отримуємо систему (57). Ми довели, що розв'язок цієї системи існує, для спрощення запису позначимо його знову α^m. Для цього, вже конкретного, α^m розв'язок задачі (52)-(53) позначатимемо далі просто $u^m = u^m(x,t)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$.

Крок 3. Для побудованих нами функцій $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ виконуються рівності (52)-(54), факти (55), (60) і оцінки (61)-(63). З (61)-(62), твердження 1 та леми 4 отримуємо оцінки

$$||u^m; U(Q_{0,T})|| \leq C_9, \tag{64}$$

$$||u^m(T); L^2(\Omega)|| \leq C_9, \tag{65}$$

$$||\mathcal{A}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \leq C_9, \tag{66}$$

де $C_9 > 0$ – стала, яка не залежить від m.

Для фіксованих $t \in (0,T)$ і $\mu \in \{1,\ldots,m\}$ домножимо μ-ту рівність з (52) на $\varphi_\mu^m(t)$, підсумуємо за $\mu = \overline{1,m}$ і результат зінтегруємо за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$. З одержаної рівності, використовуючи (61)-(63), аналогічно як (62) отримуємо оцінку

$$||u^m; L^\infty(0,T;L^2(\Omega))|| \leq C_{10}, \tag{67}$$

де $C_{10} > 0$ – стала, яка не залежить від m.

З оцінок (64)-(67) випливає існування такої підпослідовності $\{u^{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad * \text{-слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ \text{ і слабко в } U(Q_{0,T}), \tag{68}$$

$$u^{m_j}(T) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega), \tag{69}$$

$$\mathcal{A}u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_2 \quad \text{слабко в} \quad [U(Q_{0,T})]^*. \tag{70}$$

Крок 4. Отримаємо додаткові оцінки та збіжності. Нехай $\mathcal{H} := L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} := \mathcal{W}_r$, P_m – оператор проектування з (31), $\widehat{P}_m$ – оператор з (33). Використавши твердження 12, аналогічно як в [36, с. 77] та [50, с. 62-63] перепишемо (52) у вигляді

$$u_t^m = \widehat{P}_m^*\big(f - \mathcal{A}u^m\big). \tag{71}$$

Оскільки r задовольняє (18), то $\mathcal{W}_r \overline{\circlearrowleft} W_0^{1,p^0}(\Omega)$, $\mathcal{W}_r \overline{\circlearrowleft} L^{q^0}(\Omega)$ та $\mathcal{W}_r \overline{\circlearrowleft} L^2(\Omega)$. Тому $\mathcal{W}_r \overline{\circlearrowleft} V \overline{\circlearrowleft} L^2(\Omega) \overline{\circlearrowleft} V^* \overline{\circlearrowleft} \mathcal{W}_r^*$. Нехай $s_{\min}$ та $s'_{\max}$ взято з (22)-(23). Тоді з вкладень (22)-(23) отримаємо таке:

$$U(Q_{0,T}) \circlearrowleft L^{s_{\min}}(0,T;W_0^{1,p_0}(\Omega)), \tag{72}$$

$$L^2(Q_{0,T}) \overline{\circlearrowleft} [U(Q_{0,T})]^* \circlearrowleft L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*). \tag{73}$$

З вкладення (72) і оцінок (64) отримаємо таке:

$$||u^m; L^{s_{\min}}(0,T;W_0^{1,p_0}(\Omega))|| \le C_{11}||u^m; U(Q_{0,T})|| \le C_{12}. \tag{74}$$

Врахувавши (73) і (39), матимемо, що

$$||\widehat{P}_m^* f; L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)|| \le ||f; L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)|| \le$$

$$\le C_{13}||f; L^2(Q_{0,T})|| \le C_{14}. \tag{75}$$

Аналогічно з (73) і (66) отримаємо таке:

$$||\widehat{P}_m^*\mathcal{A}u^m; L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)|| \le ||\mathcal{A}u^m; L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)|| \le$$

$$\le C_{15}||\mathcal{A}u^m; [U(Q_{0,T})]^*|| \le C_{16}. \tag{76}$$

З рівності (71) і оцінок (75)-(76) матимемо, що

$$||u_t^m; L^{s'_{\max}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)|| \le C_{17}. \tag{77}$$

Тут $C_{12}, \ldots, C_{17} > 0$ – сталі, які не залежать від m.

За умов теореми матимемо, що $W_0^{1,p_0}(\Omega) \overset{K}{\subset} L^2(\Omega) \circlearrowleft \mathcal{W}_r^*$. Тому з (74), (77) та теореми Обена (твердження 8) випливає, що

$$u^{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad L^{s_{\min}}(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];\mathcal{W}_r^*). \tag{78}$$

Крок 5. Нехай Ψ – множина з леми 1. Для кожного $\eta \in \Psi$ з рівності (52) при великих $m = m_j$ отримаємо

$$\{u_t^{m_j}, \eta\}_Q + \langle \mathcal{A}u^{m_j}, \eta\rangle_{U(Q_{0,T})} = \{f, \eta\}_Q.$$

Спрямувавши $j \to \infty$, одержимо таку рівність в $D^*(0,T;V^*)$:

$$u_t + \chi_2 = f. \tag{79}$$

Тоді $u_t = f - \chi_2 \in [U(Q_{0,T})]^* \subset L^{s'_{\max}}(0,T;V^*)$ (див. (23)). Крім того, з (68) та (22) випливає, що

$$u \in U(Q_{0,T}) \subset L^{s_{\min}}(0,T;V) \subset L^{s_{\min}}(0,T;V^*).$$

Тому $u \in W^{1,\min\{s'_{\max}, s_{\min}\}}(0,T;V^*) \subset C([0,T];V^*)$, і з (68) та леми 2 одержимо, що $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Нехай $\mu \in \mathbb{N}$, $\psi \in C([0,T])$. Зрозуміло, що $\psi w^\mu \in U(Q_{0,T})$. Тоді з (79) і (70) матимемо рівність

$$\langle u_t, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} = \langle f - \chi_2, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} = \lim_{j\to\infty} \langle f - \mathcal{A}u^{m_j}, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})}.$$

Для великих j маємо нерівність $m_j \geq \mu$. Тому звідси та з (52) одержимо, що

$$\langle u_t, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} = \lim_{j\to\infty} \{u_t^{m_j}, \psi w^\mu\}_Q, \ \psi \in C([0,T]), \ \mu \in \mathbb{N}. \tag{80}$$

Крок 6. Доведемо, що знайдена нами функція u задовольняє нелокальну умову (3). Візьмемо в (80) $\psi(t) = T - t$, $t \in [0,T]$. Зрозуміло, що $\psi(0) = T$, $\psi(T) = 0$. Тоді, зінтегрувавши частинами, з (54), (68) та (80) матимемо

$$\langle u_t, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} = \lim_{j\to\infty} \Big\{ (u^{m_j}(T), \psi(T) w^\mu)_\Omega -$$

$$- (u^{m_j}(0), \psi(0)w^\mu)_\Omega - \langle(\psi w^\mu)_t, u^{m_j}\rangle_{U(Q_{0,T})}\Big\} =$$

$$= -\Big(\int_0^T \Re(t)u(t)\, dt + h, \psi(0)w^\mu\Big)_\Omega - \langle(\psi w^\mu)_t, u\rangle_{U(Q_{0,T})} =$$

$$= -\Big(\int_0^T \Re(t)u(t)\, dt + h, \psi(0)w^\mu\Big)_\Omega -$$

$$- (u(T), \psi(T)w^\mu)_\Omega + (u(0), \psi(0)w^\mu)_\Omega + \langle u_t, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} =$$

$$= T\Big(u(0) - \int_0^T \Re(t)u(t)\, dt - h, w^\mu\Big)_\Omega + \langle u_t, \psi w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})}.$$

Звідси випливає, що $\Big(u(0) - \int_0^T \Re(t)u(t)\, dt - h, w^\mu\Big)_\Omega = 0$ для всіх $\mu \in \mathbb{N}$, а тому функція u задовольняє умову (3) в сенсі $L^2(\Omega)$.

Крок 7. Доведемо, що $\chi_1 = u(T)$. Взявши в (80) $\psi \equiv 1$, отримаємо рівність

$$\langle u_t, w^\mu\rangle_{U(Q_{0,T})} = \lim_{j\to\infty} \{u_t^{m_j}, w^\mu\}_Q.$$

Зінтегрувавши частинами і використавши (3) та (54), одержимо

$$\Big(u(T) - \int_0^T \Re(t)u(t)\, dt - h, w^\mu\Big)_\Omega =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\Big(u^{m_j}(T) - \int_0^T \Re(t)u^{m_j}(t)\, dt - h, w^\mu\Big)_\Omega =$$

$$= \Big(\chi_1 - \int_0^T \Re(t)u(t)\, dt - h, w^\mu\Big)_\Omega, \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

Звідси $(u(T) - \chi_1, w^\mu)_\Omega = 0$ для всіх $\mu \in \mathbb{N}$, а тому $\chi_1 = u(T)$ в сенсі простору $L^2(\Omega)$.

Крок 8. Доведемо, що $\chi_2 = \mathcal{A}u$. Нехай

$$Z_j := \langle \mathcal{A}u^{m_j} - \mathcal{A}v, u^{m_j} - v \rangle_{U(Q_{0,T})}, \quad v \in U(Q_{0,T}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

З монотонності оператора $\mathcal{A}$ матимемо нерівність $Z_j \geq 0$. З (52) та формули інтегрування частинами отримаємо, що

$$\langle \mathcal{A}u^{m_j}, u^{m_j} \rangle_{U(Q_{0,T})} = \{f - u_t^{m_j}, u^{m_j}\}_Q =$$

$$= \{f, u^{m_j}\}_Q - \frac{1}{2}||u^{m_j}(T)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u^{m_j}(0)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Тому (див. (54))

$$0 \leq Z_j \leq \{f, u^{m_j}\}_Q - \frac{1}{2}||u^{m_j}(T)||^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big|\Big|\int\limits_0^T \Re(t)u^{m_j}(t)\,dt + h\Big|\Big|^2_{L^2(\Omega)} -$$

$$- \langle \mathcal{A}u^{m_j}, v \rangle_{U(Q_{0,T})} - \langle \mathcal{A}v, u^{m_j} - v \rangle_{U(Q_{0,T})}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{81}$$

З (69), вже доведеної рівності $u(T) = \chi_1$ та з твердження 7 випливає нерівність

$$\varliminf_{j\to\infty} ||u^{m_j}(T)||^2_{L^2(\Omega)} \geq ||u(T)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Крім того, з нерівності Гельдера та сильної збіжності з (78) матимемо таке:

$$\Big|\Big|\Big(\int\limits_0^T \Re(t)u^{m_j}(t)\,dt + h\Big) - \Big(\int\limits_0^T \Re(t)u(t)\,dt + h\Big)\Big|\Big|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$= \int\limits_0^T |\Re(t)| \cdot ||u^{m_j}(t) - u(t)||_{L^2(\Omega)}\,dt \leq$$

$$\leq C_{18}(\Re)\Big(\int\limits_0^T ||u^{m_j}(t)-u(t)||^{s_{\min}}_{L^2(\Omega)}\,dt\Big)^{1/s_{\min}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тому, взявши $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}$ з обох частин нерівності (81) і використавши (79), (24) та (3), для всіх $v\in U(Q_{0,T})$ отримаємо, що

$$0\leq \{f,u\}_Q-\frac{1}{2}||u(T)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\Big|\Big|\int\limits_0^T \Re(t)u(t)\,dt+h\Big|\Big|^2_{L^2(\Omega)}-$$

$$-\langle\chi_2,v\rangle_{U(Q_{0,T})}-\langle\mathcal{A}v,u-v\rangle_{U(Q_{0,T})}=\langle u_t+\chi_2,u\rangle_{U(Q_{0,T})}-$$

$$-\frac{1}{2}||u(T)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\Big|\Big|\int\limits_0^T \Re(t)u(t)\,dt+h\Big|\Big|^2_{L^2(\Omega)}+\langle\chi_2,-v\rangle_{U(Q_{0,T})}-$$

$$-\langle\mathcal{A}v,u-v\rangle_{U(Q_{0,T})}=\langle\chi_2-\mathcal{A}v,u-v\rangle_{U(Q_{0,T})}. \qquad (82)$$

Нехай $w\in U(Q_{0,T})$. Візьмемо в (82) $v=u-\lambda w$, де $\lambda>0$. Поділивши на λ, отримаємо

$$\langle\chi_2-\mathcal{A}(u-\lambda w),w\rangle_{U(Q_{0,T})}\geq 0,\quad w\in U(Q_{0,T}). \qquad (83)$$

З семінеперервності оператора $\mathcal{A}$ (див. лему 4) випливає, що

$$\lim_{\lambda\to+0}\langle-\mathcal{A}(u-\lambda w),w\rangle_{U(Q_{0,T})}=\langle-\mathcal{A}u,w\rangle_{U(Q_{0,T})}.$$

Тому з (83) одержимо: $\langle\chi_2-\mathcal{A}u,w\rangle_{U(Q_{0,T})}\geq 0$ для $w\in U(Q_{0,T})$. Візьмемо спершу $w=-z$, а затим $w=z$, де $z\in U(Q_{0,T})$. Отримаємо систему нерівностей, яка еквівалентна такому рівнянню: $\langle\chi_2-\mathcal{A}u,z\rangle_{U(Q_{0,T})}=0$ для всіх $z\in U(Q_{0,T})$. Отже, $\chi_2=\mathcal{A}u$ в сенсі простору $[U(Q_{0,T})]^*$.

Крок 9. Підставивши $\chi_2=\mathcal{A}u$ в (79), отримаємо, що функція u задовольняє (17). Крім того, ми вже довели, що u задовольняє (3). Тому u є узагальненим розв'язком нелокальної задачі (1)-(3). Теорему 2 доведено. □

Література

[1] *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир; 1978.

[2] *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up. Atlantis Studies in Diff. Eq. Vol. 4. Paris: Atlantis Press; 2015.

[3] *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998; 51: 85-98.

[4] *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2000; 56: 33-43.

[5] *Алхутов Ю.А., Антонцев С.Н., Жиков В.В.* Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009; 6 (1): 23-50.

[6] *Пташник Б.Й, Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наукова думка; 2002.

[7] *Кирилич В.М.* Нелокальна задача з інтегральними обмеженнями для двовимірної гіперболічної системи першого порядку. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1983; 21: 60-68.

[8] *Лавренюк С.П.* Нелокальна задача для квазілінійного параболічного рівняння. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985; 24: 3-6.

[9] *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности. Некласические уравнения мат. физ. Новосибирск; 2005: 231-239.

[10] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними. Мат. студії. 2007; 28 (2): 115-140.

[11] *Белов П.Н.* Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат; 1975.

[12] *Шелухин В.В.* Задача о перемещении частиц для модельной системы Бюргерса вязкого газа. Сиб. мат. журн. 1991; 32 (2): 154-165.

[13] *Пулькина Л.С.* Об одном классе нелокальных задач и их связи с обратными задачами. Труды Третьей Всероссийской научной конф. Ч. 3.: Дифф. уравн. и краевые задачи. Самара; 2006: 190-192.

[14] *Кириченко С.В.* Об одной краевой задаче для уравнения смешаного типа с нелокальными начальными условиями в прямоугольнике. Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2013; 3 (32): 185-185.

[15] *Шелухин В.В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений. Сиб. мат. журн. 1993; 34 (2): 191-207.

[16] *Кожанов А.И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений. Сибирский журнал индустриальной математики. 2004; 7 (1) (17): 51-60.

[17] *Ignjatovic M.* On solving parabolic equation with homogeneous boundary and integral initial conditions. Математички весник. 2015; 67 (4): 258-268.

[18] *Шелухин В.В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений. Сиб. мат. журн. 1991; 32 (2): 154-165.

[19] *Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G.* On the investigation of one nonclassical problem for Navier-Stokes equations. AMI. 2002; 7 (2): 66-77.

[20] *Aizicovici S., Lee H.* Nonlinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces. Applied Math. Letters. 2005; 18: 401–407.

[21] *Попов А.Ю., Тихонов И.В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени. Мат. сборник. 2005; 196 (9): 72-102.

[22] *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М.* Задача з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часом. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2010; 53 (4): 7-16.

[23] *Смагин В.В., Хуен Н.Т.* Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение. Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия Физ. Мат. 2010; 1: 144-149.

[24] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т. 1: Общая теория. М.; 1962.

[25] *Adams R.A.* Sobolev spaces. New York, San Francisco, London: Academic Press; 1975.

[26] *Evans L.C.* Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc. Vol. 19. Providence, RI; 1998.

[27] *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., and Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. – Lecture Notes Math. – Vol. 2017. – Heidelberg: Springer, 2011. – 509 p.

[28] *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 1991; 41 (116): 592-618.

[29] *Fan X.-L., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 2001; 263: 424-446.

[30] *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов [Дис. ... канд. фіз.-мат. наук]. [Львів]; 2001. 165 с.

[31] *Бугрій О.М.* Задачі для нелінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності [Дис. ... докт. фіз.-мат. наук]. [Львів]; 2017. 341 с.

[32] *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності. Мат. студ. 2005; 24 (2): 167-172.

[33] *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва. Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2005; 64: 44-61.

[34] *Mashiyev R.A., Buhrii O.M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. J. Math. Anal. Appl. 2011; 377: 450-463.

[35] *Бугрій О.М.* Про формули інтегрування частинами для степеневих функцій спеціального вигляду. Мат. Студії. 2016; 45 (2): 118-131.

[36] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. М.: Мир; 1972.

[37] *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. Успехи мат. наук. 1968; 23 (1) (139): 45-90.

[38] *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир; 1967.

[39] *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. 1963; 256 (24): 5042-5044.

[40] *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains. Math. Ann. 1988; 279: 373-394.

[41] *Strauss W.A.* On continuity of functions with values in various Banach spaces. Pacific J. of Math. 1966; 19 (3): 543-551.

[42] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир; 1971.

[43] *Brezis H.* Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer; 2011.

[44] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука; 1976.

[45] *Suhubi E.* Functional analysis. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ.; 2003.

[46] *Buhrii O., Buhrii N.* Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity. Open Math. 2017; 15: 859-883.

[47] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука; 1972.

[48] *Lee J.W., O'Regan D.* Existence results for differential equations in Banach spaces. Comment. Math. Univ. Carolin. 1993; 34 (2): 239-251.

[49] *Byström J.* Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator. J. of Ineq. in Pure and Appl. Math. 2005; 6 (2): Article 56.

[50] *Lions J.-L., Strauss W.A.* Some non-linear evolution equations. Bulletin de la S. M. F. 1965; 93: 43-96.