Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 21–46

УДК 517.957

М. М. Бокало, І. В. Скіра

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів; mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

Мішана задача для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності

The initial-boundary value problem for higher-order elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity is considered. Existence and uniqueness of weak solution of this problem are proved. An a priori estimates are obtained.

Досліджено мішану задачу для інтегро-диференціальних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі та отримано його апріорні оцінки.

1. Вступ

В даній роботі розглядаються анізотропні інтегро-диференціальні еліптично-параболічні рівняння вищих порядків зі змінними показниками нелінійності, задані в обмежених циліндричних областях. Для цих рівнянь можливе нелінійне входження невідомої функції як в диференціальну, так і в інтегральну частину рівняння. Такі рівняння виникають при моделюванні різних процесів в природі, економіці та інших сферах.

Нелінійні еліптично-параболічні рівняння зі сталими показниками нелінійності досліджувалися в багатьох роботах, серед яких [1] – [7]. В даний час активно розвивається теорія нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Відмітимо, що узагальнені розв'язки відповідних задач для таких рівнянь беруться з узагальнених просторів Лебега та Соболєва. Більш повну інформацію про ці простори та їх використання можна знайти в [8] – [20].

Інтегро-диференціальні параболічні рівняння широко використовуються при математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці (наприклад, в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів в дифузії заряджених частинок в плазмі та в інших різноманітних задачах). Зокрема, такі рівняння досліджувались в [20] – [22].

У даній роботі вивчається питання існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаної задачі з крайовими умовами Діріхле для нелінійних еліптично-параболічних рівнянь вищих порядків з інтегральними членами. Для доведення існування таких розв'язків використана комбінація методів регуляризації та Гальоркіна. Раніше така задача не роглядалася. Робота складається з двох частин: в першій частині дається постановка задачі і формулювання основного результату, а в другій – обґрунтування основного результату.

2. Постановка задачі і формулювання основного результату

Нехай n, m – натуральні числа, а M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Під $\mathbb{R}^n$ розуміємо лінійний простір, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, з нормою $|x| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$. Через N позначаємо кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\big\{j : \alpha_j \neq \beta_j\big\}$). Тут і далі 0 – число нуль або мультиіндекс, складений з нулів (це легко зрозуміти з контексту). Покладемо $|\xi| := \big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\big)^{1/2}$ для $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$. Вважатимемо, що $\Gamma := \partial\Omega$ (межа області Ω) є кусково-гладкою поверхнею і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число, $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma := \Gamma \times (0, T)$.

Припустимо, що

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $0 \leq b(x) \leq 1$ для всіх $x \in \Omega$,

і нехай $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,\big|\, b(x) > 0\}$.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha| \in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) + \int\limits_\Omega c(x, y, t, u(y, t))dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j=\overline{0,m-1}, \tag{2}$$

та початкову умову

$$u(x,0)=u_0(x)\,, \quad x\in\Omega_0, \tag{3}$$

де $a_\alpha : Q\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c:\Omega\times\Omega\times(0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_\alpha : Q\to\mathbb{R}$ ($|\alpha|\in M$), $u_0 : \Omega\to\mathbb{R}$ – задані функції, які задовольняють наведені нижче умови. Тут і далі через δu позначено впорядкований набір з похідних $D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} u$ функції u порядків $|\alpha|\in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi\in\mathbb{R}^N$).

Далі сформульовану вище мішану задачу для рівняння (1) з крайовими умовами (2) і початковою умовою (3) коротко називатимемо *задачею* (1)–(3).

Ми вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), а для цього введемо потрібні для цього позначення і зробимо відповідні припущення щодо вихідних даних цієї задачі.

Нехай $r\in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x)\geqslant 1$ для майже всіх $x\in\Omega$. Припустимо, що або $G=\Omega$, або $G=Q$. Позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ узагальнений простір Лебега, який складається з функцій $v\in L_1(G)$ таких, що $\varrho_{G,r}(v)<\infty$, де $\varrho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G=\Omega$, та $\varrho_{G,r}(v) := \iint\limits_Q |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G=Q$. На цьому просторі введемо норму $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda>0 \mid \varrho_{G,r}(v/\lambda)\le 1\}$, з якою він є банаховим. Якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x)>1$, то спряжений простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ може бути ототожненим з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)}+\frac{1}{r'(x)}=1$ для майже всіх $x\in\Omega$ (детальніше див., наприклад, [8]).

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – впорядкований набір вимірних функцій $p_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ $(|\alpha| \in M)$ (пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$), які задовольняють умову

$(\mathcal{P})$ $\quad p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) > 1, \quad p_\alpha^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) < +\infty \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \in M.$

Через $p' = (p'_\alpha : |\alpha| \in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x)+1/p'_\alpha(x) = 1$ $(|\alpha| \in M)$ для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $W^m_{p(\cdot)}(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega) \mid D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)\ \ \forall\alpha,\ |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W^m_{p(\cdot)}(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_c^\infty(\Omega)$ в $W^m_{p(\cdot)}(\Omega)$. Тут і далі $C_c^\infty(\Omega)$ – лінійний простір нескінченно диференційовних фінітних функцій $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Розглянемо лінійний простір $\mathbb{V}_p := \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ з нормою $\|v\|_{\mathbb{V}_p} := \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}$, який є банаховим.

Введемо простір $W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як підпростір простору $L_1(Q)$, складений з тих функцій h, для яких $D^\alpha h \in L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, коли $|\alpha| \in M$, з нормою $\|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)}$. Через $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ позначимо підпростір простору $W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$, складений з таких функцій h, що $h(\cdot,t) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p(\cdot)}(\Omega)$ для м.в. $t \in (0,T)$.

Нехай $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Позначимо через $H_b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції $w := \widetilde{b}^{-1/2} v$, де $v \in L_2(\Omega)$. Простір $H_b(\Omega)$ з півнормою $\|w\|_{H_b(\Omega)} = \big(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2 dx\big)^{1/2}$ є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $H_b(\Omega)$ є поповненням лінійного простору $\mathbb{V}_p$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_b(\Omega)}$ (див. [2, I.3.3]).

Введемо простір $C([0,T];H_b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h : [0,T] \to H_b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2}h \in C([0,T];L_2(\Omega))$, і півнорму $\|h\|_{C([0,T];H_b(\Omega))} := \max\limits_{t\in[0,T]} \|h(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)}$ на ньому, з якою він є повним півнормованим простором.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}_p^b := \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C([0,T]; H_b(\Omega))$$

і норму $\|h\|_{\mathbb{U}_p^b} := \|h\|_{W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)} + \|h\|_{L_2(Q)} + \|h\|_{C([0,T];H_b(\Omega))}$ на ньому, з якою він є банаховим.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$ визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$(і пронумерованих так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$) дійснозначних функцій, які задовольняють такі чотири умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською (тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною, а для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом) і, крім того, $a_\alpha(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$.

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного α ($|\alpha| \in M$), майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta| \in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(Q)$, $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\,\cdot\,)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant K_1 |\xi_0 - \eta_0|^2, \tag{4}$$

де $K_1 > 0$ – стала;

$(\mathcal{A}_4)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ з $\mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant K_2 \sum_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)} - g(x,t),$$

де $K_2 > 0$ – стала, $0 \leqslant g \in L_1(Q)$.

Нехай $\mathbb{C}$ – множина функцій $c : \Omega \times \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють такі умови:

($\mathcal{C}_1$) функція $c(x,y,t,s), (x,y,t,s) \in \Omega \times \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}$, є каратеодорівською (тобто для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$ функція $c(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною, а для всіх $s \in \mathbb{R}$ функція $c(\cdot,\cdot,\cdot,s) : \Omega \times \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом) і, крім того, $c(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$;

($\mathcal{C}_2$) для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times Q$ та довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,s_1) - c(x,y,t,s_2)| \leqslant L|s_1 - s_2|,$$

де $L > 0$ – стала.

Зауваження 1. З умов ($\mathcal{C}_1$) і ($\mathcal{C}_2$) випливає, що для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$ маємо нерівність

$$|c(x,t,y,s)| \leq L|s|. \tag{5}$$

Нехай $\mathbb{F}_{p'}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q (і пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$) дійснозначних функцій таких, що для кожного $\alpha,\ |\alpha| \in M$, функція f_α належить простору $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$.

Під $C^1_c(0,T)$ розумітимемо лінійний простір неперервно диференційовних фінітних функцій $\varphi : (0,T) \to \mathbb{R}$.

Означення 1. Нехай b і p задовольняють, відповідно, умови ($\mathcal{B}$) та ($\mathcal{P}$), $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $c \in \mathbb{C}$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p'}$, $u_0 \in H_b(\Omega)$.

Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) називаємо функцію $u \in \mathbb{U}^b_p$, яка задовольняє початкову умову

$$\|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|_{H_b(\Omega)} = 0 \tag{6}$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi +$$

$$+v\varphi\int\limits_{\Omega} c(x,y,t,u(y,t))\,dy - buv\varphi'\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad \forall\, v\in \mathbb{V}_p,\ \forall\,\varphi\in C_c^1(0,T). \qquad (7)$$

Основним результатом нашої роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай b і p задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_\alpha : |\alpha|\in M)\in \mathbb{A}_p$, $c\in\mathbb{C}$, $(f_\alpha : |\alpha|\in M)\in \mathbb{F}_{p'}$, $u_0\in H_b(\Omega)$ і, крім того, виконується нерівність*

$$K_1 > L\mathrm{mes}_n\Omega. \qquad (8)$$

Тоді задача (1)–(3) має единий узагальнений розв'язок і для нього виконується оцінка

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega} b(x)|u(x,t)|^2\,dx +$$

$$+\iint\limits_{Q}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} + |u(x,t)|^2\Big)\,dxdt \le$$

$$\le C_1\Big[\iint\limits_{Q}\Big(\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)} + g(x,t)\Big)\,dxdt + \int\limits_{\Omega} b(x)|u_0(x)|^2\,dx\Big] \qquad (9)$$

де $C_1>0$ – стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і p_α^- $(|\alpha|\in M)$.

Тут і далі $\mathrm{mes}_n\Omega$ – міра Лебега множини Ω.

3. Обґрунтувння основного результату

Спочатку сформулюємо потрібне нам допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай b і p задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, а функція $w \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$ така, що виконується тотожність*

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \Big(\sum_{|\alpha| \in M} g_\alpha D^\alpha v \Big) \varphi - bwv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_p,\ \forall \varphi \in C_c^1(0,T), \tag{10}$$

для деяких $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha| \in M)$. Тоді $w \in C\big([0,T]; H_b(\Omega)\big)$ і для будь-яких $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in \mathbb{V}_p$ та $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, маємо

$$\theta(t_2) \int\limits_\Omega b(x) w(x,t_2) v(x)\, dx - \theta(t_1) \int\limits_\Omega b(x) w(x,t_1) v(x)\, dx + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big\{ \Big(\sum_{|\alpha| \in M} g_\alpha D^\alpha v \Big) \theta - bwv\theta' \Big\}\, dxdt = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2) \|w(\cdot,t_2)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(t_1) \|w(\cdot,t_1)\|^2_{H_b(\Omega)} - \\ -\frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega)} \theta'(t)\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| \in M} g_\alpha D^\alpha w \Big) \theta\, dxdt = 0. \tag{12}$$

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 1 праці [12] і ми його опускаємо.

Далі для зручності і скорочення записів будемо використовувати такі позначення:

$$a_\alpha(w)(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad |\alpha| \in M; \tag{13}$$
$$c(w)(x,y,t) := c(x,y,t,w(y,t)), \quad (x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T).$$

Доведення теореми 1. Проведемо доведення в три етапи. Спочатку доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), потім його існування, а після цього – правильність оцінки (9).

Перший етап (єдиність розв'язку). Припустимо супротивне. Нехай u_1 і u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(3). Віднімемо тотожність (7) з $u = u_1$ від тотожності (7) з $u = u_2$. У результаті отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2))\, D^\alpha v\varphi +$$

$$+v\varphi \int\limits_\Omega (c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t))\, dy - b(x)(u_1-u_2)v\varphi' \Big\}\, dxdt = 0.$$

Звідси на підставі леми 1 з $w = u_1 - u_2, \theta \equiv 1, t_1 = 0, t_2 = T$ отримаємо (див. (12))

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x)|u_1(x,T) - u_2(x,T)|^2 dx +$$

$$+\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2)\big)\big(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\big)\Big\} dxdt +$$

$$+\iint\limits_Q \big(u_1 - u_2\big)\Big(\int\limits_\Omega \big(c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)\big)\, dy\Big) dxdt = 0. \quad (14)$$

З умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big(a_\alpha(u_1) - a_\alpha(u_2)\big)\big(D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\big)\Big\}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant K_1 \iint\limits_Q |u_1 - u_2|^2\, dxdt. \qquad (15)$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, отримаємо таку оцінку:

$$\left|\iint\limits_Q \big(u_1(x,t) - u_2(x,t)\big)\Big(\int\limits_\Omega \big(c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)\big) dy\Big) dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_Q |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \Big(\int_\Omega |c(u_1)(x,y,t) - c(u_2)(x,y,t)|\, dy \Big) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L \iint_Q |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \Big(\int_\Omega |u_1(y,t) - u_2(y,t)|\, dy \Big)\, dxdt =$$

$$= L \int_0^T \Big(\int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \; dx \Big)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega \iint_Q |u_1 - u_2|^2 \; dxdt. \qquad (16)$$

Тоді з (14) на підставі (15) і (16) здобуваємо

$$(K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega) \iint_Q |u_1 - u_2|^2\, dxdt \leqslant 0.$$

Звідси та умови (8) отримаємо рівність $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, а отже, $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Другий етап (існування розв'язку). Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), використовуючи комбінацію методів регуляризації та Фаедо-Гальоркіна.

Нехай $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ – повна лінійно незалежна система функцій в просторі $\mathbb{V}_p$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ позначимо $V_k := \{d_1 w_1 + \ldots + d_k w_k \,\big|\, d_1, ..., d_k \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, що множина $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k$ є щільною в просторах $\mathbb{V}_p$ та $H_b(\Omega)$.

Виберемо послідовність $\big\{u_{0,k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що $u_{0,k} \in V_k$ і

$$\|u_0 - u_{0,k}\|_{H_b(\Omega)} = \Big\|b^{1/2}u_0 - b^{1/2}u_{0,k}\Big\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (17)$$

Зауважимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$, майже всіх $x \in \Omega$ і довільного $\eta \in (0,1]$ правильна нерівність

$$\Big|b^{1/2}(x) - \Big(b(x) + \eta\Big)^{1/2}\Big|^2 \Big|u_{0,k}(x)\Big|^2 \;\; \leqslant \;\; 4(b(x)+1)\Big|u_{0,k}(x)\Big|^2.$$

Отож, на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left\| b^{1/2} u_{0,k} - \Big(b + \eta\Big)^{1/2} u_{0,k} \right\|_{L^2(\Omega)} \underset{\eta \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Звідси випливає існування послідовності додатних чисел $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $\eta_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ і

$$\big\| b^{1/2} u_{0,k} - \big(b + \eta_k\big)^{1/2} u_{0,k} \big\|_{L^2(\Omega)} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{18}$$

Приймемо

$$b_k(x) := b(x) + \eta_k, \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

З (17) – (19) випливає, що

$$\left\| b^{1/2} u_0 - b_k^{1/2} u_{0,k} \right\|_{L^2(\Omega)} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{20}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення u_k у вигляді

$$u_k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_{k,i}(t) w_i(x), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{21}$$

де $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$ – абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що виконуються рівності

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ b_k(x) u_{k,t} w_j + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(u_k)\, D^\alpha w_j + w_j \int\limits_{\Omega} c(u_k)(x,y,t)dy \Big\} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha D^\alpha w_j \, dx, \quad t \in [0,T], \quad j = \overline{1,k}, \tag{22}$$

$$u_k(x,0) = u_{0,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{23}$$

Співвідношення (22), (23) можна трактувати як задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $c_{k,1},\ldots,c_{k,k}$. Систему рівнянь (22) можна звести до нормальної форми. Тому на підставі теореми про існування, єдиність та продовження розв'язку цієї задачі (див., наприклад, [23]) існує єдиний глобальний її розв'язок $c_{1,k},\ldots.., c_{k,k}$ і він визначений на деякому проміжку $[0,T_k\rangle$, де $T_k \leqslant T$. Тут і далі "$\rangle$" означає ")" або "]". Отож, функція u_k визначена на множині $\overline{\Omega}\times[0,T_k\rangle$. Пізніше ми встановимо оцінки, з яких буде випливати рівність $[0,T_k\rangle=[0,T]$.

Тепер отримаємо відповідні оцінки членів послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для кожного $j\in\{1,\ldots,k\}$ домножимо рівність з номером j системи (22) на $c_{k,j}$ і підсумуємо отримані рівності. Здобуту рівність проінтегруємо за $t\in[0,\tau]\subset[0,T_k\rangle$ і використаємо (21), (23) та формулу інтегрування частинами. У результаті здобудемо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt=$$

$$=\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\,dxdt-$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}u_k(x,t)\Big(\int\limits_{\Omega}c(u_k)(x,y,t)dy\Big)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b_k(x)|u_{0,k}(x)|^2\,dx. \tag{24}$$

Далі нам буде потрібна така нерівність, що випливає з нерівності Юнга: для майже всіх $x\in\Omega$

$$ad\leqslant\varepsilon|a|^{r(x)}+\varepsilon^{-\frac{1}{r^- -1}}|d|^{r'(x)},\quad a,d\in\mathbb{R},\quad \varepsilon\in(0,1), \tag{25}$$

де $r\in L^\infty(\Omega)$, $r^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}r(x)>1$, $r'(x):=r(x)/(r(x)-1)$ для майже всіх $x\in\Omega$.

Для довільного $0 < \delta < 1$, використовуючи умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ та $(\mathcal{A}_4)$, отримуємо таку оцінку:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k) D^\alpha u_k \Big\}\, dxdt =$$

$$= (\delta + (1-\delta)) \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k) D^\alpha u_k \Big\}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \delta K_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |u_k|^2 \, dxdt + (1-\delta) K_2 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} \, dxdt -$$

$$-(1-\delta) \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega g \, dxdt. \quad (26)$$

Використавши (25), здобуваємо

$$\left| \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u_k \Big\}\, dxdt \right| \leqslant \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha||D^\alpha u_k| \Big\}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} \Big\}\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \varepsilon^{-1/(p_\alpha^- - 1)} |f_\alpha|^{p'_\alpha(x)} \Big\}\, dxdt, \quad (27)$$

де $\varepsilon \in (0,1)$ – довільне число.

Використовуючи нерівність (5) та нерівність Коші–Буняковського, отримаємо

$$\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_k(x,t)\Big(\int\limits_\Omega c(u_k)(x,y,t)\,dy\Big)dxdt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u_k(x,t)|\,\Big(\int\limits_\Omega |c(u_k)(x,y,t)|\,\,dy\Big)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u_k(x,t)|\,\Big(\int\limits_\Omega |u_k(y,t)|\,dy\Big)\,dxdt =$$

$$= L\int\limits_0^\tau \Big(\int\limits_\Omega |u_k(x,t)|\,\,dx\Big)^2 dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u_k(x,t)|^2\,dxdt. \quad (28)$$

З рівності (24) на підставі (26) – (28) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx +$$
$$+ ((1-\delta)K_2-\varepsilon)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt +$$
$$+ (\delta K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u_k|^2\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M} \varepsilon^{-1/(p_\alpha^- -1)}|f_\alpha|^{p'_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt +$$
$$+ (1-\delta)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega g\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\,dx,\ \tau\in(0,T_k\rangle. \quad (29)$$

В (29) візьмемо значення $\delta \in (0,1)$ таким, щоби виконувалась нерівність $\delta K_1 - L\mathrm{mes}_n\Omega > 0$ (це можна зробити на підставі (8)), а тоді виберемо значення $\varepsilon \in (0,1)$ таким, щоб виконувалась нерівність $(1-\delta)K_2 - \varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = (1-\delta)K_2/2$. У результаті отримаємо

$$\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx + C_2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)} + |u_k|^2\Big)\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_3\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M}|f_\alpha|^{p'_\alpha(x)} + g\Big)\,dxdt + \int\limits_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\,dx,\ \tau\in(0,T_k\rangle, \tag{30}$$

де $C_2,\ C_3$ – додатні сталі, які не залежать від k і τ.

З (20) випливає, що послідовність $\big\{\int_\Omega b_k|u_{0,k}|^2\,dx\big\}_{k=1}^{+\infty}$ є обмеженою. Звідси та з (30) отримаємо такі оцінки

$$\int\limits_\Omega b_k(x)|u_k(x,\tau)|^2\,dx \leqslant C_4 \quad \forall\tau\in(0,T_k\rangle, \tag{31}$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\Big\}\,dxdt \leqslant C_5 \quad \forall\tau\in(0,T_k\rangle, \tag{32}$$

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u_k(x,t)|^2\,dxdt \leqslant C_6 \quad \forall\tau\in(0,T_k\rangle, \tag{33}$$

де C_4, C_5, C_6 – додатні сталі, які не залежать від k і τ.

На підставі (31) маємо, зокрема, що $T_k = T$ і $[0,T_k\rangle = [0,T]$, а отже, оцінки (31) – (33) правильні при заміні $(0,T_k\rangle$ на $(0,T]$.

З умови $(\mathcal{A}_2)$, нерівності (5) та оцінок (32), (33), використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо оцінки

$$\iint\limits_{Q} |a_\alpha(u_k)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt \leqslant C_7, \quad |\alpha| \in M, \tag{34}$$

$$\iint\limits_{Q} \Big| \int\limits_{\Omega} c(u_k)\, dy \Big|^2\, dxdt \leqslant C_8, \tag{35}$$

де C_7, C_8 – сталі, які не залежить від k.

Оскільки простори $L_{p_\alpha(\cdot)}(Q)$, $L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ ($|\alpha| \in M$) є рефлексивними (див. [8, p. 600]), то з оцінок (31) – (35) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_k\}$ (цю підпослідовність позначатимемо так само як і всю послідовність), функцій $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$, $\widetilde{u} \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $\chi_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ ($|\alpha| \in M$), $\zeta \in L_2(Q)$ таких, що

$$b_k^{1/2} u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad * -\text{слабко в} \quad L_\infty(0,T; L_2(\Omega)), \tag{36}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q), \tag{37}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q), \tag{38}$$

$$a_\alpha(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \ \ \text{слабко в} \ \ L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q), \quad |\alpha| \in M, \tag{39}$$

$$\int\limits_{\Omega} c(u_k) dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{40}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Для цього спочатку відмітимо, що

$$b_k^{1/2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} \ \ \text{сильно в} \ \ L_2(\Omega) \ \ \text{і майже всюди на} \quad \Omega. \tag{41}$$

Тепер покажемо, що

$$\tilde{u} = b^{1/2}u \quad \text{майже всюди на} \quad Q. \tag{42}$$

Справді, для довільної функції $\psi \in C(\overline{Q})$ на підставі (36) маємо

$$\iint\limits_{Q} b_k^{1/2} u_k \psi \, dxdt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_{Q} \tilde{u}\psi \, dxdt. \tag{43}$$

Беручи до уваги (41), легко показати, що $b_k^{1/2}\psi \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}\psi$ в $L_{p_0{}'(\cdot)}(Q)$. Отож, на підставі (38), маємо

$$\iint\limits_{Q} u_k b_k^{1/2} \psi \, dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \iint\limits_{Q} u b^{1/2} \psi \, dxdt. \tag{44}$$

Співвідношення (43), (44) дають підставу стверджувати, що для будь-якої $\psi \in C(\overline{Q})$ правильна рівність

$$\iint\limits_{Q} \tilde{u}\psi \, dxdt = \iint\limits_{Q} b^{1/2} u \psi \, dxdt,$$

звідки випливає рівність (42).

Виберемо довільним чином і зафіксуємо числа $j, k \in \mathbb{N}$ такі, що $k \geqslant j$. Рівність системи (22) з номером j домножимо на функцію $\theta \in C^1([0,T])$ таку, що $\theta(T) = 0$, і проінтегруємо за t від 0 до T, використовуючи формулу інтегрування частинами. У результаті здобудемо рівність, з якої, перейшовши до границі при $k \to \infty$ і взявши до уваги (20), (23), (36)–(42), отримаємо

$$\begin{aligned} -\theta(0) \int\limits_{\Omega} b(x) u_0(x) w_j(x) \, dx - \iint\limits_{Q} b u w_j \theta' \, dxdt + \\ + \iint\limits_{Q} \Big(\sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha - f_\alpha) D^\alpha w_j + \zeta w_j \Big) \theta \, dxdt = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

З цієї рівності випливає, що для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0) \int\limits_Q b(x) u_0(x) v(x)\, dx - \iint\limits_Q buv\theta'\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha - f_\alpha) D^\alpha v + \zeta v \Big) \theta\, dxdt = 0. \tag{46}$$

Зауважимо, що коли взяти $\theta = \varphi \in C_c^1(0,T)$ в (46), то отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \Big(\sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha - f_\alpha) D^\alpha v + v\zeta \Big) \varphi - buv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0 \tag{47}$$

для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

З (47) на підставі леми 1 випливає, що

$$u \in C\big([0,T]; H_b(\Omega)\big) \tag{48}$$

і для кожних $v \in \mathbb{V}_p$ і $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(T) = 0$, правильна рівність

$$-\theta(0) \int\limits_\Omega b(x) u(x,0) v(x)\, dx - \iint\limits_Q buv\theta'\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha - f_\alpha) D^\alpha v + \zeta v \Big) \theta\, dxdt = 0. \tag{49}$$

З (46) і (49) отримуємо (6), а з (37), (38) і (48) випливає, що $u \in \mathbb{U}_p^b$.

На підставі (47) для доведення тотожності (7) достатньо показати, що правильна рівність

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} \chi_\alpha(x,t) D^\alpha v(x) + \zeta(x,t) v(x) \Big\}\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(u)(x,t) D^\alpha v(x) + \Big(\int\limits_\Omega c(u)(x,y,t) dy \Big) v(x) \Big\}\, dx \tag{50}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ та будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$. Для цього використаємо метод монотонності (див. [24]).

Нехай $w \in W^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ – довільна функція. Позначимо

$$W_k := \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(u_k) - a_\alpha(w))(D^\alpha u_k - D^\alpha w) + \\ + \Big(\int\limits_\Omega [c(u_k) - c(w)]dy \Big) \big(u_k - w\big) \Big\} \theta \, dxdt, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\theta(t) := 1 - t/T$, $t \in \mathbb{R}$.

На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$W_k \geqslant \iint\limits_Q \Big\{ K_1 |u_k - w|^2 + (u_k - w) \int\limits_\Omega \big[c(u_k) - c(w)\big]\, dy \Big\} \theta \, dxdt. \tag{51}$$

Аналогічно як ми отримали (16), можемо встановити нерівність

$$\left| \iint\limits_Q (u_k - w) \Big(\int\limits_\Omega [c(u_k) - c(w)]\, dy \Big) \theta \, dxdt \right| \leqslant \\ \leqslant L \mathrm{mes}_n \Omega \iint\limits_Q |u_k - w|^2 \, \theta \, dxdt. \tag{52}$$

З (51) і (52), врахувавши умову $(\mathcal{C}_2)$, отримуємо

$$W_k \geqslant (K_1 - L\mathrm{mes}_n \Omega) \iint\limits_Q |u_k - w|^2 \theta \, dxdt \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Маємо

$$W_k = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u_k) D^\alpha u_k + u_k \int\limits_\Omega c(u_k) dy \Big\} \theta \, dxdt -$$

$$-\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w+a_\alpha(w)(D^\alpha u_k-D^\alpha w)\big]-$$

$$-w\int\limits_{\Omega}c(u_k)dy-\big(u_k-w\big)\int\limits_{\Omega}c(w)dy\Big\}\,\theta dxdt\geqslant 0. \qquad (53)$$

Для кожного $j\in\{1,\dots,k\}$ помножимо рівність з номером j системи (22) на $c_{k,j}\theta$ і підсумуємо отримані рівності за j. Результуючу рівність проінтегруємо за $t\in[0,T]$ і використаємо формулу інтегрування частинами та (21) і (23). У результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(u_k)D^\alpha u_k+u_k\int\limits_{\Omega}c(u_k)dy\Big\}\theta\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2T}\iint\limits_{Q}b_k|u_k|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b_k|u_{0,k}|^2\,dx,\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (54)$$

На підставі (53) і (54) здобуваємо

$$W_k=\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}f_\alpha D^\alpha u_k\Big\}\theta\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2T}\iint\limits_{Q}b_k|u_k|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b_k|u_{0,k}|^2\,dx-$$

$$-\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{|\alpha|\in M}\big[a_\alpha(u_k)D^\alpha w+a_\alpha(w)(D^\alpha u_k-D^\alpha w)\big]-$$

$$-w\int\limits_{\Omega}c(u_k)dy-(u_k-w)\int\limits_{\Omega}c(w)dy\Big\}\theta\,dxdt\geqslant 0. \qquad (55)$$

Із співвідношень (36), (42) випливає

$$\varliminf_{k\to\infty} \iint\limits_Q b_k |u_k|^2 \, dxdt \geqslant \iint\limits_Q b|u|^2 \, dxdt. \tag{56}$$

На підставі (20), (38) – (40) і (56), з (55) отримаємо

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} W_k \leqslant \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta \, dxdt - \\ -\frac{1}{2T} \iint\limits_Q b|u|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b|u_0|^2 \, dx - \\ - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \big[\chi_\alpha D^\alpha w + a_\alpha(w)(D^\alpha u - D^\alpha w)\big] - \\ -w\zeta - \big(u - w\big) \int\limits_\Omega c(w) \, dy \Big\} \theta \, dxdt. \end{aligned} \tag{57}$$

З (47) і (6), використовуючи лему 1 (див. (12)), матимемо

$$\begin{aligned} \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha D^\alpha u + u\zeta \Big\} \theta \, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u \Big\} \theta \, dxdt - \\ -\frac{1}{2T} \iint\limits_Q b|u|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b|u_0|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{58}$$

На підставі (57) і (58) здобуваємо

$$\begin{aligned} \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(w))(D^\alpha u - D^\alpha w) + \\ +(u - w)\Big(\zeta - \int\limits_\Omega c(w) dy\Big) \Big\} \theta \, dxdt \geqslant 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Взявши $w = u - \lambda v\varphi$ в (59), де $v \in \mathbb{V}_p$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\lambda > 0$ – довільні фіксовані, після ділення отриманої нерівності на λ, матимемо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(u - \lambda v\varphi))D^\alpha v +$$

$$+\big(\zeta - \int\limits_\Omega c(u - \lambda v\varphi)\,dy\big)v\Big\}\theta\varphi\,dxdt \geqslant 0. \tag{60}$$

Переходячи в (60) до границі при $\lambda \to 0+$ на підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_2)$ та теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла (див. [25, с. 648]), здобуваємо

$$\iint_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} (\chi_\alpha - a_\alpha(u))D^\alpha v + \big(\zeta - \int\limits_\Omega c(u)\,dy\big)v\Big\}\theta\varphi\,dxdt = 0,$$

де $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$ є довільними функціями. Отож, рівність (50) є правильною.

З (47), беручи до уваги (50), отримаємо (7). Отже, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Третій етап (апріорна оцінка розв'язку). Використовуючи лему 1 з $w = u$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$, отримаємо (див. (12))

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x)|u(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(u)D^\alpha u\Big\}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha u\Big\}dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u\Big(\int\limits_\Omega c(u)\,dy\Big)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\,dx. \tag{61}$$

Легко показати виконання нерівностей подібних до (26), (27) та (28) з u замість u_k. Отже, можна отримати нерівність аналогічну до (29), з якої легко випливає оцінка (9) узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Теорема 1 доведена.

Література

[1] Showalter R. E. Degenerate evolution equations and applications // Indiana University Mathematics Journal. – 1974. –**23**, No. 8. – P. 655-677.

[2] Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations – Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations), Volume 1, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977, xii+196 p.

[3] Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Mathematische Zeitschrift. – 1983. – **183**. – P. 311–341.

[4] Kuttler K.L. The Galerkin method and degenerate evolution equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – **107**. – P. 396-413.

[5] Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[6] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. – New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[7] Andreu F, Igbida N., M. Mazón J., Toledo J. A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions // Interfaces and Free Boundaries. – 2006. – **8**, No. 4. – P. 447-479.

[8] Kováčik O., Rákosnı́c J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$ // Czechoslovak Mathematical Journal. 1991. – **41**, No. 116. – P. 592-618.

[9] Kováčik O. Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasciculi Mathematici. – 1995. – **25**. – P. 87-94.

[10] Růžička M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory // Lecture Notes in Mathematics, 1748. – (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

[11] Buhrii O. M., Lavrenyuk S. P. On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration // Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – **53**, No. 7. – P. 1027-1042 (Переклад з Українського математичного журналу.– 2001. – **53**, № 7. – С. 867–878).

[12] Бокало М. М., Паучок І.Б. Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Математичні студії. – 2006. – **24**, № 1. – С. 25-48.

[13] Bokalo M., Domanska O. On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Математичні студії. – 2007. – **28**, № 1. – С. 77-91.

[14] Антонцев С., Шмарев С. Затухание решений параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Научные записки Математического института имени Стеклова. – 2008. – **261**. – С. 11-21.

[15] Алхутов Ю., Антонцев С., Жиков В. Параболические уравнения с переменными показателями нелинейности // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2009. – **6**. – С. 23–50.

[16] Fu Y., Pan N. Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010. – **362**. – P. 313-326.

[17] Mihailescu M., Radulescu V., Tersian S. Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2011. – **38**. – P. 277-289.

[18] Mashiyev R. A., Buhrii O. M. Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2011. – **377**. – P. 450-463.

[19] Бокало М. М. Мішана задача для еліптично-параболічних анізотропних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 14-26.

[20] Бугрій О., Бугрій М. Про існування в узагальнених просторах Соболєва розв'язків мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, пов'язаних з європейський опціоном // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2016. – Вип. 81. – С. 61-84.

[21] Buhrii O., Buhrii N. On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity // New Trends in Mathematical Sciences. – 2017. – **5**, No. 3. – P. 128-153.

[22] Buhrii O., Buhrii N. Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity // Open Mathematics. – 2017. – **15**. – P. 859–883.

[23] Coddington E. A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. – McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London, 1955.

[24] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.

[25] Evans L. C. Partial differential equations // Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, Amer. Math. Soc.