Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 267–280

УДК 517.927

В. О. Солдатов

(Інститут математики НАН України, Київ)

Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера

soldatovvo@ukr.net

We investigate a broad class of parameter-dependent multipoint linear boundary-value problems for systems of first order ordinary differential equations. We prove a criterion for continuous dependence on the parameter of solutions to these problems in Hölder spaces.

Досліджено широкий клас залежних від параметра багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних першого порядку. Доведено критерій неперервної залежності за параметром розв'язків цих задач у просторах Гельдера.

1. Вступ

У сучасній математиці важливу роль відіграє граничний перехід у системах диференціальних рівнянь. Найкраще його властивості були досліджені у випадку задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Так, для нелінійних систем фундаментальні результати стосовно неперервності за параметром розв'язків задачі Коші були одержані І. І. Гіхманом [1], М. А. Красносельським і С. Г. Крейном [2], Я. Курцвейлєм і З. Ворелом [3]. Для лінійних же систем, ці результати були уточнені і доповнені А. Ю. Левіним [4], З. Опялем [5], В. Т. Рейдом [6] та Нгуен Тхе Хоаном [7].

Крайові задачі, залежні від параметра, досліджено значно гірше, ніж задачу Коші. І. Т. Кігурадзе [8 – 10] та М. Ашордіа [11] ввели і дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язки y таких задач припускалися абсолютно неперервними на відрізку $[a, b]$, а крайові умови розглядалися у формі $By = q$, де B довільний лінійний неперервний оператор, що діє з нормованого простору $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ у $\mathbb{R}^m$ (m — число диференціальних рівнянь системи). І. Т. Кігурадзе та М. Ашордіа отримали умови, за яких розв'язки задач з цього класу, що залежать від параметра, є неперервними за параметром у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Нещодавно ці результати було уточнено і узагальнено на комплекснозначні функції та системи диференціальних рівнянь вищих порядків [12 – 14].

У працях В. А. Михайлеця і його учнів ці результати перенесено на важливий клас багатоточкових крайових задач щодо соболєвських просторів та просторів $C^{(n)}[a, b]$ для рівнянь і систем як першого [15, 16], так і високих порядків [17 – 19]. У цих роботах припускається, що кожна точка, у якій ставляться крайові умови, або не залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ [15, 18, 19], або має граничне значення при $\varepsilon \to 0+$ [16, 17]. Окрім того, допускається існування додаткових точок, що входять у вираз, нехтуваний при $\varepsilon \to 0+$.

У роботі [20] введено новий клас крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. На відміну від звичайних крайових задач, цей клас пов'язаний із заданим функціональним простором. Розглянуто системи, у яких коефіцієнти і праві частини належать простору $(C^{n,\alpha})^m :=$

$C^{n,\alpha}([a,b],\mathbb{C}^m)$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Враховуючи, що розв'язки z кожної такої системи пробігають увесь простір $(C^{n+1,\alpha})^m$, розглядається найбільш загальна крайова умова у формі $Bz = q$, де $B\colon (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор. Така умова може містити похідні розв'язку $z^{(l)}$, де $1 \leq l \leq n+1$. Такі крайові задачі названо тотальними щодо простору $C^{n+1,\alpha}$. Зауважимо, що зокрема і некласичні багатоточкові задачі, які вивчаються у даній роботі, належать до цього класу.

Відмітимо, що класи тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва та просторів неперервно диференційовних функцій були введені у роботах [21, 22] і [23, 24], де була встановлена їх фредгольмовість та були наведені достатні умови неперервної залежності їх розв'язків за параметром. Ці результати були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач [15], матриць Гріна [13, 14] та використані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [25 – 27].

У даній роботі досліджується багатоточкова лінійна крайова задача на відрізку $[a,b]$ дійсної осі для системи диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера. Відмітимо, що використовується постановка, запропонована у роботі [28], яка дає можливість отримати більш слабкі умови, ніж та, що використовувалася у більш ранніх роботах (див., напр., [15 – 19]). Принципова відмінність полягає у тому, що умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від ε і мають спільну граничну точку при $\varepsilon \to 0+$. У даній роботі встановлено умови, достатні для неперервності при $\varepsilon \to 0+$ розв'язків досліджуваної задачі. Окрім того, для більш вузького класу задач, у яких зазначений набір точок є фіксованим, встановлено критерій неперервної залежності розв'язків за параметром.

Робота складається з п'яти розділів. Перший розділ — вступ. У другому розділі наведено постановку досліджуваної багатоточкової крайової задачі, залежної від малого параметра $\varepsilon > 0$. Основний результат роботи сформульовано у третьому її розділі.

Це — достатня умова неперервності при $\varepsilon \to 0+$ розв'язку задачі у нормованому просторі Гельдера. Основний результат доведено у четвертому розділі. У заключному, п'ятому розділі, для більш вузького класу багатоточкових крайових задач встановлено критерій зазначеної неперервності.

2. Постановка задачі

Нехай довільним чином вибрано (скінченний) відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, цілі числа $m \geq 1$, $n \geq 0$ і дійсне число α таке, що $0 \leq \alpha \leq 1$. Використовуємо комплексні простори Гельдера

$$\begin{aligned}(C^{l,\alpha})^m &:= C^{l,\alpha}([a, b], \mathbb{C}^m),\\ (C^{l,\alpha})^{m\times m} &:= C^{l,\alpha}([a, b], \mathbb{C}^{m\times m}),\end{aligned} \tag{1}$$

де $0 \leq l \in \mathbb{Z}$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій та матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до простору $C^{l,\alpha} := C^{l,\alpha}([a, b], \mathbb{C})$, і наділені нормами, що є сумою норм у $C^{l,\alpha}$ усіх компонентів цих функцій. Означення простору Гельдера $C^{l,\alpha}$ нагадаємо наприкінці цього пункту.

Розглядаємо систему $m \geq 1$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b. \tag{2}$$

Тут і далі число $\varepsilon_0 > 0$ фіксоване, вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$ є шуканою та довільним чином задано матрицю-функцію $A(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m\times m}$ і вектор-функцію $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$. У роботі вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців.

Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо із системою (2) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon), \varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, числові матриці $\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами j і k зумовлене подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого номера $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали деяку спільну границю t_j при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача

$$L(0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \le t \le b, \tag{4}$$

$$B(0)y(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)}\, y^{(l)}(t_j,0) = q(0). \tag{5}$$

Тут усі матриці $\alpha_j^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j \in [a,b]$ та вектор $q(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $y(\cdot,\varepsilon) \mapsto B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{n+1,\alpha})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{6}$$

Зроблені нами припущення щодо системи (2) та обмеженість оператора (6) означають згідно з [20], що крайова задача (2), (3) є тотальною щодо простору Гельдера для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, як і задача (4), (5). Для таких крайових задач у цитованій роботі [20] обґрунтовано їх фредгольмовість з індексом нуль і доведено критерій неперервності за параметром їх розв'язків.

Зауважимо, що крайові умови (3), (5) охоплюють як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні шуканої функції.

Наприкінці цього пункту нагадаємо означення просторів Гельдера на $[a,b]$ й обговоримо деякі поняття і позначення, пов'язані з цими просторами. Нехай ціле число $l \ge 0$. Наділимо банахів простір $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ нормою

$$\|x\|_l := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\bigr\}.$$

За означенням, простір Гельдера $C^{l,\alpha} := C^{l,\alpha}([a,b],\mathbb{C})$, де $0 < \alpha \leq 1$, складається з усіх функцій $x \in C^{(l)}$ таких, що

$$\|x^{(l)}\|'_\alpha := \sup\Bigl\{\frac{|x^{(l)}(t_2) - x^{(l)}(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha} :\ t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2\Bigr\} < \infty.$$

Цей простір є банаховим відносно норми

$$\|x\|_{l,\alpha} := \|x\|_l + \|x^{(l)}\|'_\alpha.$$

Задля загальності ми використовуємо позначення $C^{l,0} := C^{(l)}$ та $\|\cdot\|_{l,0} := \|\cdot\|_l$.

Відмітимо, що кожен простір $C^{l,\alpha}$, де $0 \leq \alpha \leq 1$, є банаховою алгеброю відносно деякої норми, еквівалентної $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. Норми у просторах (1) також позначено як $\|\cdot\|_{l,\alpha}$. З контексту завжди буде зрозуміло, у якому саме просторі Гельдера (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) розглядається ця норма.

3. Основний результат

Для крайової задачі (2), (3) розглянемо такі чотири

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^{m\times m}$;

(d1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ і $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(d2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ і $l \in \overline{0,n+1}$;

(d3) $\alpha_{j,k}^{(n+1)}(\varepsilon) = O(1)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ і $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(d4) $\|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ і $l \in \overline{0,n}$;

(d5) $\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ і $l \in \overline{0,n+1}$.

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(C^{n,\alpha})^m$;

(IV) $q(\varepsilon) \to q(0)$ в $\mathbb{C}^m$.

В умові (d4) і надалі під нормою числової матриці (зокрема, вектора) розуміємо суму модулів усіх її елементів.

Розглянемо ще одну умову.

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тепер сформулюємо

Базове означення. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (2), (3) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ і будь-яких правих частин $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$ і $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

($**$) Граничні умови (III) і (IV) тягнуть за собою збіжність

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{n+1,\alpha})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{7}$$

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (2), (3) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I), (d1) – (d5).

4. Доведення основного результату

Крайова задача (2), (3), як окремий випадок тотальної крайової задачі щодо простору Гельдера $C^{n+1,\alpha}$, має згідно з [20] таку властивість.

Твердження 1. *Розв'язок крайової задачі* (2), (3) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *та*

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *в* $\mathbb{C}^m$ *для довільного* $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$.

Тому для доведення теореми 1 достатньо показати, що умови (d1) – (d5) тягнуть за собою граничну умову (II). Припустимо, що виконуються умови (d1) –(d5) і доведемо умову (II).

Для довільної функції $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ запишемо

$$\begin{gathered}\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| = \\ = \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{\omega_j} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)}\, y^{(l)}(t_j) \right\| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\omega_0} \sum_{l=0}^{n+1} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| + \\ + \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}\, y^{(l)}(t_j) \right\|. \qquad (8)\end{gathered}$$

Тут на підставі умови (d5) маємо:

$$\|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \to 0 \qquad (9)$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо другий доданок у правій частині формули (8). Маємо:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}\, y^{(l)}(t_j) \Bigg\| = \\
&= \Bigg\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j) - \alpha_j^{(l)}\, y^{(l)}(t_j) \Bigg\| \le \\
&\le \Bigg\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \big) \Bigg\| + \\
&\quad + \Bigg\| \Big(\sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)} \Big) \cdot y^{(l)}(t_j) \Bigg\| \le \\
&\le \sum_{k=1}^{\omega_j} \big\| \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \big\| \cdot \big\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \big\| + \\
&\quad + \Bigg\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)} \Bigg\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Тут на підставі умови (d2) маємо:

$$
\Bigg\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)} \Bigg\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \to 0. \tag{11}
$$

Окрім того,

$$
\sum_{k=1}^{\omega_j} \big\| \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \big\| \cdot \big\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \big\| \to 0. \tag{12}
$$

Справді, якщо $l = n+1$, то це є прямим наслідком умов (d1), (d3) і неперервності функції $y^{(l)}$. Якщо $l \le n$, то це випливає з теореми Лагранжа і умови (d4):

$$\sum_{k=1}^{\omega_j} \left\|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \cdot \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \leq$$

$$\leq \|y\|_{n+1,\alpha} \sum_{k=1}^{\omega_j} \left\|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0.$$

Тепер із формул (10), (11) і (12) негайно випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \to 0. \tag{13}$$

Тепер властивість (II) є прямим наслідком формул (8), (9) і (13).

Теорему 1 доведено.

5. Окремий випадок

З огляду на теорему 1 природно поставити питання про необхідність умов (d1) – (d5) для того, щоб розв'язок крайової задачі (2), (3) неперервно залежав від параметра ε при $\varepsilon = 0$. Виявляється, що деякі з цих умов не є необхідними. Зокрема, умова (d5) не є необхідною у випадку, коли

$$\sum_{k=1}^{\omega_0} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Дослідимо це питання у випадку, коли точки, у яких ставляться крайові умови, не залежать від ε, тобто, коли крайовий оператор набирає вигляду

$$B(\varepsilon) y(\cdot, \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j, \varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{14}$$

Тут $t_1, \ldots, t_p$ — різні точки відрізка $[a, b]$.

Теорема 2. *Розв'язок крайової задачі* (2), (14) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *та*

(d) $\alpha_j^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_j^{(l)}(0)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$ *і* $l \in \overline{0, n+1}$.

Доведення. З огляду на твердження 1, залишається показати, що (II) $\Leftrightarrow$ (d).

Якщо виконується умова (d), то для будь-якої функції $y \in (C^{n+1,\alpha})^m$ маємо:

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| =$$
$$= \Big\| \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_j^{(l)}(0)\, y^{(l)}(t_j) \Big\| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \big\| \alpha_j^{(l)}(\varepsilon)\, y^{(l)}(t_j) - \alpha_j^{(l)}(0)\, y^{(l)}(t_j) \big\| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \big\| \alpha_j^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \big\| \cdot \|y\|_{n+1,\alpha} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0+$. Отже, (d) $\Rightarrow$ (II).

Доведемо обернену імплікацію. Припустимо, що виконується умова (II). Довільно виберемо номери $j \in \overline{1,p}$ і $l \in \overline{0, n+1}$. Розглянемо достатньо малий окіл U точки t_j (у топології відрізка $[a,b]$) такий, що усі інші точки t_k, де $k \neq j$, знаходяться зовні замикання цього околу. Виберемо функцію $\chi \in C^\infty([a,b])$, яка дорівнює 1 в околі U і дорівнює 0 у деякому околі множини усіх точок t_k, де $k \neq j$. Означимо функцію $y(t) := \chi(t)(t-t_j)^l$ аргументу $t \in [a,b]$. Для неї, відповідно до нашого припущення, маємо

$$\big\| \alpha_j^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \big\| = \|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+,$$

тобто виконується умова (d).

Теорему 2 доведено.

Автор вдячний В. А. Михайлецю і О. О. Мурачу за постановку задачі і обговорення результатів.

Література

[1] *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215–219.

[2] *Красносельський М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153.

[3] *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чех. мат. журн. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.

[4] *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.

[5] *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**. – P. 571–579.

[6] *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 3. – P. 423–439.

[7] *Nguyen The Hoan.* On the dependence of a solution to a linear system of differential equations on a parameter // Differ. Equa. – **29**(1993). – P. 830–835.

[8] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[9] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[10] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Диф. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198–209.

[11] *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. – 1996. – **46**. – P. 385–404.

[12] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[13] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77–90.

[14] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333–342.

[15] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[16] *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач //Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203–216.

[17] *Чеханова Г. О.* Граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах з параметром: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2014. – 122 с.

[18] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260–279.

[19] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач //Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.

[20] *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. arXiv:1604.07029 [math.CA].

[21] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[22] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[23] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[24] *Soldatov V. O.* On the Continuity in a Parameter for the Solutions of Boundary-Value Problems Total with Respect to the Spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, No. 5. – P. 785-794.

[25] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1–2. – P. 287–292.

[26] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361–1378.

[27] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Differential Equations. – **2013**, No. 101. – P. 1–16.

[28] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.