Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 255–266

УДК 517.956.223

О. В. Рибак

(Інститут математики НАН України, Київ)

Числа Ляпунова у напівгрупових системах

semperfi@ukr.net

We study the Lyapunov numbers — the quantitative measures of sensitive dependence on initial conditions of dynamical systems. Some properties of the Lyapunov numbers for dynamical systems given by continuous maps are generalized for semigroup actions.

Вивчаються числа Ляпунова — кількісні показники чутливості динамічної системи до початкових умов. Твердження для динамічних систем, що задаються неперервними відображеннями, узагальнені на випадок дії напівгрупи.

1. Вступ

У роботі розглядаються кількісні показники чутливості динамічних систем вигляду (X, G), де X — метричний простір, а G — деяка напівгрупа його відображень у себе. Такий об'єкт узагальнює динамічні системи (X, f), де f — відображення простору X у себе. В системі, де діє певна напівгрупа, замість одного відображення може бути довільна їх множина, якщо вона замкнена відносно операції композиції функцій.

Багато означень, що мають відношення до звичайних динамічних систем, можна розповсюдити і на напівгрупові системи. Наприклад, це можна зробити з означеннями транзитивності, слабкої змішуваності або мінімальності. Подібні узагальнення можливі і для деяких тверджень. Наприклад, як і у випадку (X, f), транзитивна система (X, G) з компактним X міститиме точку, орбіта якої є всюди щільною. Або з того, що система транзитивна, нескінченна та має щільну множину мінімальних точок, слідує її чутливість як у звичайному, так і в напівгруповому випадку [5]. Але деякі властивості систем вигляду (X, f) не переносяться на загальний випадок. Наприклад, для системи (X, f) вірним є твердження, що зі слабкої змішуваності слідує k-кратна транзитивність для довільного натурального k. Для напівгрупових систем це не завжди вірно: множина монотонних неперервних відображень відрізка утворює слабко змішуючу, але не 3-кратно транзитивну систему [2]. Тому вивчення напівгрупових систем ставить багато цікавих питань.

У даній роботі проаналізовані питання, що стосуються співвідношень між числами Ляпунова – різними кількісними показниками чутливості системи. Поняття, пов'язані з чутливістю, перенесені з випадку (X, f) на напівгрупові динамічні системи. Досліджено, які властивості зберігаються при такому узагальненні.

Одними з перших статей, де вивчається чутливість систем до початкових умов, є [1] та [3]. У цих роботах було запропоноване таке означення.

Означення 1. Систему (X, f) називають чутливою (або чутливою до початкових умов), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та довільного її відкритого околу U знайдуться $y \in U$ та $n \in \mathbb{N}_0$, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.

У роботі [4] описувалися способи кількісної оцінки чутливості. Для даної цілі були запропоновані означення спеціальних констант, названих числами Ляпунова. В системах вигляду (X, f) виконуються певні рівності чи нерівності між зазначеними числами. Одні співвідношення є універсальними, інші мають місце в динамічних системах окремих типів. Тут здійснено дослідження аналогічних співвідношень для випадку системи (X, G), де X — метричний простір, а G — деяка напівгрупа його неперервних відображень.

2. Основні поняття

Введемо умовні позначення, які часто будуть використовуватися далі.

Нехай $\mathbb{N}_0$ означає множину всіх цілих невід'ємних чисел.

Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ за допомогою запису $f^n(x)$ позначатимемо вираз $\underbrace{f(f(...f}_{n \text{ разів}}(x)...))$. Відображення $f^0(x)$ є тотожним, тобто для всіх x вірна рівність $f^0(x) = x$.

Якщо U — деяка підмножина простору X, то для позначення замикання U в просторі X буде використовуватися запис $\overline{U}$.

У багатьох роботах в якості динамічної системи розглядається пара (X, f), де X — метричний простір, а f — відображення цього простору в себе. Зазвичай додатково припускалося, що f неперервне відносно метрики простору X, а сам X є компактним або принаймні повним. Система (X, f) називається динамічною тому, що можна розглядати послідовності $(x,\ f(x),\ f^2(x),\ ...)$, де x — довільна точка множини X. Наведені послідовності ітерацій можна сприймати як рухи точки при багатократній дії відображення f.

Поняття динамічної системи можна узагальнити наступним чином. В системі (X, f) діють відображення f^n, де $n \in \mathbb{N}_0$. Тобто кожному елементу n з $\mathbb{N}_0$ поставлено у відповідність відображення f^n. Множина $\mathbb{N}_0$ є напівгрупою відносно додавання. Наведена відповідність узгоджує операції додавання та композиції функцій. Тобто для будь-яких $m, n \in N_0$ сумі $m + n$ відповідає композиція $f^m(f^n)$ в той час, як елементам m та n відповідають

f^m та f^n. За аналогією можна розглянути довільну напівгрупу G і співставити кожному $g \in G$ деяку функцію $f_g : X \to X$. Дана відповідність має бути узгоджена зі структурою напівгрупи. А саме: для будь-яких $g, h \in G$ повинна справджуватись умова $f_{gh} = f_g(f_h)$, а якщо G містить нейтральний елемент e, то має виконуватися тотожність $f_e(x) = x$. У цьому випадку пару (X, G) розглядатимемо як динамічну систему. Будемо казати, що напівгрупа G діє на просторі X. Далі замість $f_g(x)$ будемо писати просто $g(x)$, бо можна вважати, що самі елементи $g \in G$ є відображеннями X у себе.

Наведемо декілька прикладів напівгрупових динамічних систем.

Приклад 1. *Нехай простір X є декартовим добутком $X_1 \times ... \times X_k$, тобто його точки – це набори елементів $(x_1,\ ...,\ x_k)$, де $x_i \in X_i$ $(i = 1,\ ...,\ k)$. Для кожного X_i нехай існує відображення $f_i : X_i \to X_i$. Множина $\mathbb{N}_0^k = \{(n_1,\ ...,\ n_k)|n_1,\ ...,\ n_k \in \mathbb{N}_0\}$ є напівгрупою відносно операції покоординатного додавання. Задамо її дію на X: нехай для довільного вектора $\vec{n} = (n_1,\ ...,\ n_k)$ та всіх точок $x = (x_1,\ ...,\ x_n)$ виконується співвідношення $\vec{n}(x) = (f_1^{n_1}(x_1),\ ...,\ f_k^{n_k}(x_k))$. Маємо динамічну систему $(X_1 \times ... \times X_k, \mathbb{N}_0^k)$.*

На просторі з наведеного прикладу часто розглядається дія меншої напівгрупи $\{(n, ..., n)|n \in \mathbb{N}_0\}$. Тоді відповідну систему називають декартовим добутком систем (X_1, f_1), ..., (X_k, f_k).

Приклад 2. *Нехай простір X є колом S^1. Розглянемо множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ з операцією додавання. Нехай для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ функція f_α є поворотом на кут α (вважатимемо, що поворот здійснюється проти годинникової стрілки). Тоді $(S^1, \mathbb{R})$ є ще одним прикладом дії напівгрупи.*

Приклад 3. *Розглянемо одиничний відрізок $I = [0, 1]$. Нехай G складається з неперервних монотонних функцій $g : I \to I$. Множина G є напівгрупою відносно композиції, тому що композиція* *двох неперервних монотонних функцій теж неперервна та монотонна. Елементи $g \in G$ діятимуть на I природним чином: у якості f_g береться сама функція g. Пара (I, G) є напівгруповою динамічною системою.*

Дія довільної напівгрупи G може бути не комутативною: не для всіх відображень f, g буде виконуватися рівність $f(g) = g(f)$. Таке явище спостерігається у прикладі 3.

Для напівгрупових систем (X, G) також можна ввести поняття чутливості за аналогією з означенням 1.

Означення 2. Систему (X, G) називають чутливою (або чутливою до початкових умов), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ і довільного її відкритого околу U знайдуться $y \in U$ та $g \in G$, для яких $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Як правило, розглядаються дії напівгруп, де відображення є неперервними відносно метрики простору X. Неперервні функції особливо цікаві у дослідженні чутливості, адже у цьому випадку чутливість може бути досягнута лише завдяки нескінченній множині відображень. Ми теж використовуватимемо дане обмеження.

У [4] були запропоновані означення чисел Ляпунова. Ці числа на кількісному рівні характеризують чутливість певної системи. Тут ми наведемо означення для випадку системи (X, G).

Означення 3. Першим числом Ляпунова системи (X, G) називається найбільше таке $\mathcal{L}_1$, що для будь-якого $\varepsilon < \mathcal{L}_1$ та будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 4. Другим числом Ляпунова системи (X, G) називається найбільше таке $\mathcal{L}_2$, що для будь-якого $\varepsilon < \mathcal{L}_2$ та будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Означення 5. Третім числом Ляпунова системи (X, G) називається найбільше таке $\mathcal{L}_3$, що для будь-якого $\varepsilon < \mathcal{L}_3$, будь-якої

$x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$.

Означення 6. Четвертим числом Ляпунова системи (X, G) називається найбільше таке $\mathcal{L}_4$, що для будь-якого $\varepsilon < \mathcal{L}_4$, будь-якої $x \in X$ та довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, знайдуться такі $x, y \in U$, що нерівність $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ виконується для нескінченної множини елементів $g \in G$.

Іншими словами, числа $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$ – це точні верхні грані тих ε, для яких виконуються певні властивості, пов'язані зі взаємним віддаленням точок простору під дією напівгрупи.

3. Співвідношення між числами Ляпунова

Далі ми будемо припускати, що X – компактний простір з метрикою d, а всі відображення f_g, відповідні елементам $g \in G$, неперервні відносно цієї метрики. Тому ми не будемо окремо згадувати про це у формулюванні кожної теореми.

З означень 3-6 одразу слідує, що $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Також у [4] було доведено менш очевидну нерівність $2\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1$ для системи (X, f) із компактним X та неперервним f. Доведемо аналогічне твердження для напівгрупової дії.

Теорема 1. *Для системи* (X, G) *виконується нерівність* $2\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1$.

Доведення. Будемо аналізувати лише випадок $\mathcal{L}_1 > 0$, бо для $\mathcal{L}_1 = 0$ потрібна нерівність отримується очевидним чином з невід'ємності чисел Ляпунова. Розглянемо деяку точку $x \in X$. Покажемо, що для довільного $\delta > 0$ та будь-якого відкритого околу U точки x знайдеться $y \in U$, для якої нерівність $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1/2 - \delta$ справджується при нескінченно багатьох $g \in G$.

За означенням першого числа Ляпунова, знайдуться точки $z_1, z_2 \in U$ та відображення $g_1 \in G$, для яких вірна умова

$d(g_1(z_1), g_1(z_2)) > \varepsilon_1 - \delta$. За нерівністю трикутника, для однієї з цих двох точок (позначимо її y_1) виконується $d(g_1(x), g_1(y_1)) > (\varepsilon_1 - \delta)/2$. Оберемо відкритий окіл U_1 точки y_1, для якого справджуються умови $\operatorname{diam}(U_1) < 1$, $\operatorname{diam}(g_1(U_1)) < \delta/2$ і $\overline{U_1} \subset U$. Потрібний окіл існує завдяки неперервності відображення g_1.

Побудуємо послідовність точок $\{y_n\}$, а разом з нею – послідовності відображень $\{g_n\}$ та відкритих околів $\{U_n\}$. Згадана $\{y_n\}$ має збігатися до такої точки y, що співвідношення $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1/2 - \delta$ вірне за нескінченно багатьох $g \in G$.

Будуватимемо зазначені послідовності індуктивно. Елементи y_1, g_1 та U_1 вже обрані. Тому достатньо задати y_{k+1}, g_{k+1}, U_{k+1} ($k \in \mathbb{N}$) у припущенні, що відповідні члени y_k, g_k та U_k вже є.

За означенням числа $\mathcal{L}_1$, знайдеться така $g_{k+1} \in G$, що $\operatorname{diam}(g_{k+1}(U_k)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Тоді, за нерівністю трикутника, існує точка y_{k+1}, для якої $d(g_{k+1}(x), g_{k+1}(y_{k+1})) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$. Оберемо згадані y_{k+1} та g_{k+1} в якості наступних елементів відповідних послідовностей. Нарешті, візьмемо такий окіл U_{k+1} точки y_{k+1}, що $\operatorname{diam}(U_{k+1}) < 1/(k+1)$, $\operatorname{diam}(g_{k+1}(U_{k+1})) < \delta/2$ та $U_{k+1} \subset U_k$.

Згідно з правилами побудови наших послідовностей, для кожного натурального k виконана умова $U_{k+1} \subset U_k$, звідки маємо $\overline{U_{k+1}} \subset \overline{U_k}$. Множина X компактна, тому будь-яка її замкнена підмножина теж буде компактною. Отже, $\{\overline{U_n}\}$ — це послідовність вкладених компактів, а такі множини завжди мають спільну точку y. Оскільки $\overline{U_1} \subset U$, точка y теж належить U. Для кожного натурального k точки y та y_k належать множині U_k. За вибором U_k та g_k, виконуються умови $d(g_k(x), g_k(y_k)) > (\mathcal{L}_1 - \delta)/2$ та $d(g_k(y_k), g_k(y)) \leq \operatorname{diam}(g_k(U_k)) < \delta/2$. Тому з нерівності трикутника маємо, що $d(g_k(x), g_k(y)) \geq d(g_k(x), g_k(y_k)) - d(g_k(y_k), g_k(y)) < \mathcal{L}_1/2 - \delta$.

Покажемо, що для довільного $\delta < 2\mathcal{L}_1/3$ всі відображення $\{g_k\}$ різні. Розглянемо деякі g_i та g_j, де $i < j$. За вибором множини U_j маємо $\operatorname{diam}(g_i(U_i)) < \delta/2$. З іншого боку, U_i містить U_{j-1} (можливо, $U_i = U_{j-1}$), тому $\operatorname{diam}(g_j(U_i)) \geq \operatorname{diam}(g_j(U_{j-1})) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Якщо $\delta/2 < \mathcal{L}_1 - \delta$, множини $g_i(U_i)$ та $g_j(U_i)$ мають різні діаметри. Отже, у випадку $\delta < 2\mathcal{L}_1/3$ відображення g_i та g_j відрізняються одне від одного. Тому для $0 < \delta < 2\mathcal{L}_1/3$ виконується $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1/2 - \delta$.

Беручи як завгодно малі $\delta > 0$, отримуємо $2\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1$. Теорему 1 доведено. $\square$

З доведеної теореми та очевидних нерівностей $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ і $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$ слідує, що для будь-яких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ справджується $2\mathcal{L}_i \geq \mathcal{L}_j$.

Теорема 1 в певному сенсі є точною. Тобто можна навести приклади чутливих систем, у яких нерівність $2\mathcal{L}_i \geq \mathcal{L}_j$ перетворюється на рівність для деяких i та j. Зокрема, систему (X, f) з виконанням рівності $2\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1$ можна побудувати таким чином. Розглянемо відрізок $I = [0, 1]$ зі звичайною метрикою $d(x, y) = |x - y|$. У якості f візьмемо кусково-лінійну функцію, для якої $f(x) = 3x$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, $f(x) = 2 - 3x$ при $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ та $f(x) = 1 - x$ при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Система (X, f) є топологічно точною, тобто для будь-якого відкритого околу U знайдеться таке n, що $f^n(U) = I$. Тому, за означенням 3, $\mathcal{L}_1 = 1$. З іншого боку, точка $\frac{1}{2}$ є нерухомою точкою функції f, отже для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ та $x \in I$ вірно $d(f^n(\frac{1}{2}), f^n(x)) = d(\frac{1}{2}, f^n(x)) \leq \frac{1}{2}$. Звідси $\mathcal{L}_3 \leq \frac{1}{2}$. За теоремою 1, це можливо лише у випадку $\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}$.

В [4] показано, що для деяких класів динамічних систем вигляду (X, f) між певними числами Ляпунова спостерігається рівність. Наприклад, було доведено, що для транзитивних систем виконується рівність між першими двома числами. Для мінімальних систем, які є частковим випадком транзитивних, доведено, що окрім $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ виконується $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

Далі будуть виведені такі ж самі рівності для випадку дії комутативної напівгрупи.

Наведемо деякі означення.

Означення 7. Транзитивною системою називається така (X, G), що для будь-яких відкритих непорожніх підмножин $U, V \subset X$ знайдеться $g \in G$, для якої $g(U) \cap V \neq \varnothing$.

Як відомо, множина $M \subset X$ називається щільною в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така $y \in M$, що $d(x, y) < \varepsilon$. Множина $M \subset X$ називається всюди щільною, якщо вона щільна в будь-якій точці $x \in X$. Множина $M \subset X$ ніде не щільна, якщо для довільної непорожньої відкритої множини $U \subset X$ існує точка $z \in U$, де M не щільна. (Підкреслимо, що ніде не щільна множина може бути щільною в деяких точках, якщо множина цих точок не містить відкритої непорожньої підмножини). Якщо розглянути замикання, щільність можна розуміти наступним чином. Множина M щільна в точці x, якщо $x \in \overline{M}$, всюди щільна, якщо $X = \overline{M}$, і ніде не щільна, якщо $\overline{M}$ не містить відкритих непорожніх підмножин простору X.

Можна дати означення мінімальної та транзитивної точки, виходячи з поняття щільності.

Означення 8. Точка $x \in X$ називається транзитивною точкою системи (X, G), якщо множина $\{g(x)|g \in G\}$ щільна в X.

Означення 9. Мінімальною системою називається така (X, G), що для довільної точки $x \in X$ множина $\{g(x)|g \in G\}$ щільна в X. Тобто система мінімальна тоді і лише тоді, коли будь-яка її точка транзитивна.

Для подальших доведень будемо використовувати таку лему.

Лема 1. *Якщо система (X, G) транзитивна, X – компактний, а G складається з неперервних відображень, то будь-яка непорожня відкрита підмножина простору X містить транзитивну точку.*

Доведення. Як відомо, якщо X – компактний, то в ньому існує зліченна база, тобто така сім'я непорожніх відкритих множин $B_i | i \in \mathbb{N}$, що для будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдеться B_i, яка повністю лежить в U.

Точка x не є транзитивною тоді і тільки тоді, коли замикання її орбіти $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$ не співпадає з усім X. Оскільки $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$ є замкненою множиною, її доповнення до X відкрите. За вибором системи $B_i | i \in \mathbb{N}$, знайдеться B_j, яка не має спільних точок із $\overline{\{g(x)|g \in G\}}$, а тим більше – з самою орбітою $\{g(x)|g \in G\}$. Отже, точка не є транзитивною тоді і лише тоді, коли її орбіта не перетинається з деякою B_j.

Покажемо, що для кожної B_j $(j \in \mathbb{N})$ множина C_j тих точок, орбіти яких не перетинаються з B_j, є ніде не щільною в X. Нехай це не так. Тоді для деякої $_j$ знайдеться непорожня відкрита множина U, що належить $\overline{C_j}$. Але, за означенням транзитивної системи, знайдеться $g \in G$, для якої $g(U) \cap B_j \neq \varnothing$. Оскільки g неперервна і C_j щільна в U, знайдеться точка $z \in U \cap C_j$, для якої $g(z) \in B_j$. Але це суперечить означенню C_j. Тому C_j ніде не щільна.

Отже, множина не транзитивних точок є об'єднанням зліченної сім'ї ніде не щільних множин C_j. За теоремою Бера, непорожня відкрита підмножина компактного простору не може бути об'єднанням зліченної кількості ніде не щільних множин. Тому для довільної непорожньої відкритої $U \subset X$ існує точка $z \in U$, яка не належить жодній C_j $(j \in \mathbb{N})$. Вона є транзитивною. Лему 1 доведено. $\square$

Завдяки наведеній лемі можна показати рівність між першими двома числами Ляпунова для транзитивної системи, що ми сформулюємо у вигляді окремої теореми.

Теорема 2. *Для транзитивної системи (X, G) з комутативною напівгрупою G вірна рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.*

Доведення. Як і в доведенні теореми 1, розглянемо лише випадок $\mathcal{L}_1 > 0$. Розглянемо довільну відкриту непорожню множину $U \subset X$ та деяке $\delta > 0$. За означенням $\mathcal{L}_1$, знайдуться такі $x, y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(x), g(y)) > \mathcal{L}_1 - \delta$.

За лемою 1, у як завгодно малому відкритому околі x знайдеться транзитивна точка. Функція g неперервна, тому існує такий окіл V точки x, що для всіх $v \in V$ вірно $d(g(x), g(v)) < \delta$. Множина $U \cap V$ відкрита та непорожня, бо містить точку x. Оберемо транзитивну точку z всередині цієї множини. Оскільки z транзитивна, знайдеться таке відображення $h \in G$, що точка $h(z)$ достатньо близька до y для виконання умови $d(g(h(z)), g(y)) < \delta$. Тоді за нерівністю трикутника справджується співвідношення $d(g(z), g(h(z))) \geq d(g(x), g(y)) - d(g(x), g(z)) - d(g(h(z)), g(y)) < \mathcal{L}_1 - 3\delta$.

З комутативності напівгрупи G маємо $g(h(z)) = h(g(z))$. Тому $d(g(z), h(g(z))) < \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Точка $g(z)$ не може бути ізольованою, інакше виконуватиметься рівність $\mathcal{L}_1 = 0$. Отже, в довільному околі $g(z)$ є нескінченно багато точок вигляду $f(z)$, де $f \in G$.

Точка z не ізольована. Дійсно, якби існував відкритий окіл V точки z, що містить лише її, то в цьому околі не знайшлося б двох точок x та y, які для деякої $f \in G$ задовольняли б умову $d(f(x), f(y)) > 0$. А це суперечило би припущенню про $\mathcal{L}_1 > 0$. Розглянемо настільки малий відкритий окіл W точки z, що для довільної $p \in W$ виконуються нерівності $d(p, z) < \delta$ та $d(h(p), h(z)) < \delta$. Із транзитивності та не ізольованості z випливає, що всередині W існує безліч точок вигляду $f_i(z)$, де $f_i \in G$. За вибором множини W, для таких точок виконуються нерівності $d(z, f_i(z)) < \delta$ та $d(h(z), h(f_i(z))) < \delta$. Тому за нерівністю трикутника отримуємо $d(f_i(z), f_i(h(z))) > d(z, h(z)) - d(z, f_i(z)) - d(h(z), h(f_i(z))) > \mathcal{L}_1 - 5\delta$.

Отже, для даної системи $\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1 - 5\delta$. З довільності $\delta > 0$ маємо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Теорему 2 доведено. □

Можна довести схожу теорему для мінімальних систем. У цьому випадку вірними виявляються дві рівності у різних парах чисел Ляпунова.

Теорема 3. *Для мінімальної системи (X, G) з комутативною напівгрупою G вірні рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.*

Доведення. Оскільки мінімальна система завжди є транзитивною, рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ слідує з попередньої теореми.

Для доведення рівності $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ розглянемо довільну точку z та її довільний окіл U. За означенням числа $\mathcal{L}_3$, для довільного $\delta > 0$ знайдуться такі $y \in U$ та $g \in G$, що $d(g(z), g(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Нехай $V \subset U$ – відкритий окіл точки y, для якого $\operatorname{diam}(g(V)) <$

δ. Точка z є транзитивною, тому існує така $h \in G$, що $h(z) \in V$. За нерівністю трикутника, $d(g(z), h(g(z))) > d(g(z), g(y)) - d(g(y), h(g(z))) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Далі можна застосувати ті ж самі міркування, що і в доведенні теореми 2, звідки отримаємо $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. Теорему 3 доведено. $\square$

4. Висновки

Твердження статті [4] узагальнюються на випадок системи (X, G) з комутативною G. Відкритим залишається питання, чи обов'язкова комутативність зазначеної напівгрупи відображень. Для теореми 1 ця властивість G не використовувалася. Автор припускає, що і в інших теоремах можна обійтися без цього обмеження.

Література

[1] *Auslander J., Yorke J.* Interval maps, factors of maps and chaos // Tohoku Mathematical Journal. – 1980. – C. 177–188.

[2] *Cairns G., Kolganova A., Nielsen A.* Topological transitivity and mixing notions for group actions // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 2007. – № 2. – C. 371–397.

[3] *Guckenheimer J.* Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps // Comm. Math. Phys. – 1979. – C. 133–160.

[4] *Kolyada S., Rybak O.* On the Lyapunov numbers // Colloquium Mathematicum. – 2013. – № 2. – C. 209–218.

[5] *Kontorovich E., Megrelishvili M.* A note on sensitivity of semigroup actions // Semigroup Forum. – 2008. – № 1. – C. 133–141.