Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 242–254

УДК 517.927

О. Б. Пелехата

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач

o.pelekhata@kpi.ua

We establish new sufficient conditions for continuous dependence on the parameter of solutions of multipoint linear boundary-value problems for systems of differential equations of order $r \geq 1$ in the norms of spaces of continuously differentiable functions $C^{(r-1)}$.

Знайдено нові достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних класичних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ за нормами просторів неперервно диференційовних функцій $C^{(r-1)}$.

1. Вступ

Питання граничного переходу в системах диференціальних рівнянь виникають в багатьох задачах аналізу і досліджувалися різними математиками. Найкраще їх досліджено стосовно задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчався І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовниками. Суттєві узагальнення цих результатів отримано у роботах

Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [4 – 6]. Вони стосуються рівномірної неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ці питання досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [7]. Ці результати були узагальнені на досить широкий клас лінійних крайових задач — тотальних щодо просторів Соболєва [8 – 10] та просторів неперервно диференційовних функцій [11 – 14]. Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

В роботах В. А. Михайлеця та його учнів ці результати перенесено на важливий клас багатоточкових крайових задач щодо соболєвських просторів та просторів $C^{(n)}[a, b]$ для рівнянь і систем як першого [15 – 17], так і високих порядків [13, 18, 19]. В цих роботах припускається, що кожна точка (в якій розглядаються крайові умови) або не залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ [15, 17 – 19], або має граничне значення при $\varepsilon \to 0+$ [13, 16]. Окрім того, допускається існування додаткових точок, що входять у крайовий вираз, нехтуваний при $\varepsilon \to 0+$. У роботі В. О. Солдатова [20] знайдені достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач на відрізку $[a, b]$ дійсної осі для системи диференціальних рівнянь довільного порядку у нормованих просторах $C^{(n+r)}[a, b]$, більш конструктивні, ніж в [13, 18]. Результат встановлений завдяки тому, що умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від $\varepsilon > 0$ і мають спільну граничну точку при $\varepsilon \to 0+$.

Наша мета — знайти достатні умови неперервності розв'язків за малим параметром класичних багатоточкових крайових задач, застосувавши вказаний вище підхід. Зауважимо, що у цій роботі ми вимагатимемо, щоб коефіцієнти системи, а також праві частини були сумовними функціями, на відміну від [20], де накладені більш жорсткі умови, а саме — неперервної диференційовності.

2. Постановка задачі

Нехай задано скінченний відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Для довільних цілих чисел $l \geq 0$ і $m \geq 1$ позначимо $L_1 := L_1([a,b],\mathbb{C})$, $L_1^m := L_1([a,b],\mathbb{C}^m)$ і $L_1^{m\times m} := L_1([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$. Таким чином, L_1 є простір усіх вимірних комплекснозначних функцій, сумовних на відрізку $[a,b]$, наділений нормою

$$\|y\|_1 := \int_a^b |y(t)|dt.$$

Аналогічно, L_1^m і $L_1^{m\times m}$ є простори усіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $f(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ і квадратних матриць-функцій $A(t) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з сумовними на відрізку [a,b] елементами. Норми у цих просторах позначаємо також через $\|\cdot\|_1$ — вони є сумами норм у L_1 усіх компонент функції $y(t)$ або $A(t)$. З контексту завжди буде зрозуміло, про норму у якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Звісно, якщо $m = 1$, то усі ці простори збігаються.

Позначимо $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$, $(C^{(l)})^m := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C}^m)$. Таким чином, $C^{(l)}$ є банахів простір усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою

$$\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\bigr\}.$$

Аналогічно, $(C^{(l)})^m$ є банахів простір усіх l разів неперервно диференційовних вектор-функцій $z : [a,b] \to \mathbb{C}^m$. Норма у цьому просторі є сумою норм у $C^{(l)}$ усіх компонент функції z.

Нехай задано цілі числа $r \geq 1$, $m \geq 1$ і $p \geq 1$. На відрізку $[a,b]$ розглянемо систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$y^{(r)}(t,\varepsilon) + A_{r-1}(t,\varepsilon)y^{(r-1)}(t,\varepsilon) + \ldots + A_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

Тут число $\varepsilon_0 > 0$ фіксоване, вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(r-1)})^m$ шукана, а усі матриці-функції $A_{n-1}(\cdot,\varepsilon) \in L_1^{m\times m}$ і вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in L_1^m$ вважаються відомими. У роботі вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців.

Для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ пов'яжемо з системою (1) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon). \tag{2}$$

Тут числа $q_j(\varepsilon)$ залежать від ε, матриці $\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами j і k зумовлене подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача:

$$\begin{gathered} y^{(r)}(t,0) + A_{r-1}(t,0)y^{(r-1)}(t,0) + \\ + \ldots + A_0(t,0)y(t,0) = f(t,0), \quad a \le t \le b, \end{gathered} \tag{3}$$

$$B(0)y(\cdot;0) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0),0) = c(0). \tag{4}$$

Тут усі матриці $\alpha_j^{(l)}(0) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j(0) \in [a,b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y(\cdot;\varepsilon) \mapsto B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon) : (C^{(r-1)})^m \to \mathbb{C}^m.$$

Оскільки крайова задача (1)-(2) залежить від параметра ε, то природним чином виникає питання про неперервність розв'язків $y(\cdot;\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε в банаховому просторі $(C^{(r-1)})^m$. Мета цієї роботи полягає у знаходженні достатніх умов для виконання граничної рівності

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{(r-1)} \to 0, \varepsilon \to 0+.$$

3. Результат

Крайовій задачі (1)-(2) при кожному $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ відповідає лінійний обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{(r-1)})^m \to (L_1)^m \times \mathbb{C}^m.$$

У граничному випадку $\varepsilon = 0$ цей обмежений оператор відповідає крайовій задачі (3),(4). Як було доведено в [21], він є фредгольмовим, а тому для однозначної розв'язності задачі (1)-(2) необхідно і достатньо, щоб однорідна гранична крайова задача

$$y^{(r)}(t,0) + A_{r-1}(t,0)y^{(r-1)}(t,0) + \ldots + A_0(t,0)y(t,0) = 0, \quad (5)$$

$$B(0)y(\cdot;0) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_j^{(l)}(0)y^{(l)}(t_j(0),0) = 0. \quad (6)$$

мала лише тривіальний розв'язок. Виразимо умови, за яких це виконується.

Нехай $R(t,a)$ резольвента рівняння (3), тобто розв'язок, який набуває значення I_{rm} у точці $t = a$. У нашому випадку $R(t,a)$ — блочна матриця розмірності $rm \times rm$. Позначимо через

$$R_0(t,a), R_1(t,a), ..., R_{(r-1)}(t,a)$$

елементи її першого рядка. Як відомо [22], розв'язок рівняння (3), який приймає значення $Y_a = (y(a), y'(a), ..., y^{(r-1)}(a))$ при $t = a$ задається формулою

$$y(t) = \sum_{i=0}^{r-1} R_i(t_j, a) y^{(i)}(a). \tag{7}$$

Підставивши (7) у (6), отримаємо

$$C \cdot Y_a = 0,$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \Sigma_{j=1}^{p} \Sigma_{i=0}^{(r-1)} \alpha_j^{(i)} R_0^{(i)}(t_j, a) & \dots & \Sigma_{j=1}^{p} \Sigma_{i=0}^{(r-1)} \alpha_j^{(i)} R_{r-1}^{(i)}(t_j, a) \end{pmatrix}.$$

Звідси

Твердження. *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad a \leq t \leq b, \qquad B(0)y(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок, якщо

$$detC \neq 0.$$

Введемо такі позначення:

$$R_{n-1}(\cdot, \varepsilon) = A_{n-1}(\cdot, \varepsilon) - A_{n-1}(\cdot, 0),$$

$$R_{n-1}^{\vee}(t, \varepsilon) = \int_a^t R_{n-1}(s, \varepsilon) ds, \quad f^{\vee}(t, \varepsilon) = \int_a^t f(s, \varepsilon) ds.$$

Сформулюємо теорему про неперервну залежність розв'язку крайової задачі (1), (2) за малим параметром $\varepsilon \geq 0$ у просторі $(C^{(r-1)})^m$.

Теорема. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ і $n \in [r]$ виконуються умови на*

(a) *коефіцієнти*

(1) $\|R^{\vee}_{n-1}(\cdot,\varepsilon)\|_{\infty}\to 0$;

(2) $\|R_{r-1}(\cdot,\varepsilon)R^{\vee}_{n-1}(\cdot,\varepsilon)\|_{(1)}\to 0$;

(b) *праві частини рівнянь*

(3) $\|f(\cdot,\varepsilon)\|_1=O(1), \quad \|f^{\vee}(\cdot,\varepsilon)-f^{\vee}(\cdot,0)\|_{\infty}\to 0$;

(c) *граничні оператори*

(4) $c(\varepsilon)\to c(0)$;

(5) $t_{j,k}(\varepsilon)\to t_j(0)$ *для усіх* $j\in\overline{1,p}$, $k\in\overline{1,q_j}$;

(6) $\sum\limits_{k=1}^{q_j(\varepsilon)}\alpha^{(l)}_{j,k}(\varepsilon)\to\alpha^{(l)}_j(0)$ *для усіх* $j\in\overline{1,p}$, $l\in\overline{0,r-1}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{q_j(\varepsilon)}\|\alpha^{(l)}_{j,k}(\varepsilon)\|\cdot|t_{j,k}(\varepsilon)-t_j(0)|\to 0$
для усіх $j\in\overline{1,p}$, $k\in\overline{1,q_j}$, $l\in\overline{0,r-1}$;

(8) $\sum\limits_{k=1}^{q_j(\varepsilon)}\|\alpha^{(l)}_{0,k}(\varepsilon)\|\to 0$, *для усіх* $k\in\overline{1,q_0}$, $l\in\overline{0,r-1}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon>0$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\|_{(r-1)}\to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0+, \tag{8}$$

де $\|\cdot\|_{\infty}$– sup-норма, $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_{(r-1)}$ — норми у просторах L^m_1 та $C^{(r-1)}$ відповідно. Під нормою числової матриці (зокрема, вектора) розуміємо суму модулів усіх її елементів.

4. Доведення.

Досліджувана нами задача з крайовою умовою (2) є частковим випадком загальних крайових задач

$$y^{(r)}(t,\varepsilon) + A_{r-1}(t,\varepsilon)y^{(r-1)}(t,\varepsilon) + \ldots + A_0(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \tag{9}$$

$$B_l(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), l \in \overline{1,r}. \tag{10}$$

Для них в роботі [7] було встановлене

Твердження. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ і $n \in [r]$ виконуються умови теореми на коефіцієнти та праві частини рівнянь, а також умова на граничні оператори*

(f) $B_n(\varepsilon)y \to B_n(0)y, \quad y \in C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right), n \in [r]$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача (9)-(10) має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення (8). Для

доведення основної теореми достатньо показати, що умова (f) твердження є наслідком умов (6) – (9) теореми.

У припущенні, що умови (6) – (9) виконуються, доведемо властивість (f). Для довільної функції $y \in (C^{(r-1)})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ запишемо:

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{q_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{r-1} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{r-1} \left\| \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \tag{11}$$

Тут на підставі умови (6) маємо:

$$\sum_{k=1}^{q_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{r-1} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \le \sum_{k=1}^{q_0(\varepsilon)} r \cdot \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{(r)} \to 0 \tag{12}$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$. Дослідимо останній доданок в (11). Запишемо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j(0)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j(0)) - \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0)) \Big) \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \right) \cdot y^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|y\|_{(r)}.$$

Тут на підставі умови (7) маємо:

$$\left\|\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0)\right\| \cdot \|y\|_{(r)} \to 0. \tag{13}$$

Окрім того,

$$\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\| \to 0. \tag{14}$$

Це випливає з теореми Лагранжа і умови (8):

$$\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j(0))\| \leq$$

$$\leq \|y\|_{(r)} \sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0.$$

Із формул (4.), (13), (14) негайно випливає, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) y^{(l)}(t_j(0))\right\| \to 0. \tag{15}$$

Тепер властивість (f) є прямим наслідком формул (11), (12) і (15).

Теорему доведено.

Зауваження. *Якщо числа q_j не залежать від ε, то умови на граничні оператори мають вигляд:*

(4) $c(\varepsilon) \to c(0)$;

(5) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j(0)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_j}$;

(6) $\sum_{k=1}^{q_j(\varepsilon)} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_j^{(l)}(0)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(7) $\|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$
для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_j}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(8) $\|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$, для усіх $k \in \overline{1,q_0}$, $l \in \overline{0,r-1}$.

5. Висновки.

У статті досліджена параметризована числом $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ сім'я багатоточкових лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$, коефіцієнти та праві частини яких сумовні на відрізку $[a,b]$. Знайдено умови неперервності розв'язків за малим параметром класичних багатоточкових крайових задач. При цьому умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від $\varepsilon > 0$ і мають спільну граничну точку при $\varepsilon \to 0+$. Досліджений випадок, коли кожна точка граничної задачі має скінченну серію збіжних до неї точок розглянутої задачі, а всі інші точки, що не збігаються до граничних, об'єднуються в нульову серію. Кількість точок у кожній серії залежить від параметра ε. Встановлений результат узагальнює твердження, одержане в [7], зокрема, умови на граничні оператори.

Автор вдячна В. А. Михайлецю за постановку задачі та керівництво роботою.

Література

[1] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.

[2] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[3] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Диф. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198 – 209.

[4] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227 – 239.

[5] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.

[6] *Kodliuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.

[7] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3.

[8] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28 – 30.

[9] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.

[10] *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 191 – 199.

[11] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 268 – 273.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24 – 28.

[13] *Чеханова Г. О.* Граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах з параметром: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2014. – 122 с.

[14] *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a, b]$ // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 5. — С. 692 –700.

[15] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2009. – 148 с.

[16] *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач //Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203 – 216.

[17] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15 – 19.

[18] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260 – 279.

[19] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач //Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532 – 541.

[20] *Солдатов В. О.* Багатоточкові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 302 – 312.

[21] *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 302 – 312.

[22] *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.