Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 227–241

УДК 517.9

І. Л. Нижник

(Інститут математики НАН України, Київ)

Біжучі обвальні хвилі в дифузійно–кінетичних ланцюгах

irene@imath.kiev.ua

We study traveling avalanche waves in one spatially discrete nonlinear reaction-diffusion lattices. Definition of avalanche waves are given and their existence is proved for the case of a cubic-like piece-wise linear interaction. Analytical expressions of velocities of the avalanche waves and profiles of these waves are obtained.

Вивчаються біжучі обвальні хвилі в просторово–одновимірних нелінійних дифузійно–кінетичних ланцюгах. Дано означення обвальних хвиль і доведено їх існування для випадку бістійкої кусочно–лінійної взаємодії. Наведено аналітичні вирази для швидкості та форми обвальних хвиль.

1. Вступ

Нелінійні дифузійно–кінетичні рівняння є математичними моделями при дослідженні багатьох явищ у фізиці [6, 17, 26], хімії [27, 39], біології [2, 3, 5, 11, 16, 18, 23, 24, 42, 43] та техніці [4,12–14,30,31,35,36,39,40]. Значна увага приділяється вивченню просторово–дискретних рівнянь, що описують дифузійно пов'язані бістійкі комірки [1,7,8,10,15,19–22,25,28,29,37,38,41,44].

Саме для таких рівнянь в нелінійній динаміці було відкрито ряд феноменів, що не зустрічаються у відповідних рівняннях в частинних похідних другого порядку [1, 7, 9–12, 22, 28, 32, 33]. Так, в роботі [32] описані стійкі стаціонарні розв'язки одновимірних ланцюгів дифузійно пов'язаних комірок з кубічною бістійкою нелінійністю та її кусково–лінійним аналогом. Було показано, що при малих значеннях дифузійної константи кожна комірка може незалежно від інших знаходитись в одному із стійких (або близьких до стійких) станів. Для довільних значень дифузійної константи комірки групуються в кластери, що призводить до існування хаотичних розв'язків. Аналогічно описані стійкі стаціонарні розв'язки у випадку m–стійкої нелінійності [34].

Добре відомо, що у випадку бістійких комірок з несиметричною кубічною нелінійністю існують розповсюджуючі кінкоподібні хвилі [29].

На відміну від хвильових процесів, що описуються гіперболічними рівняннями, для нелінійного дифузійного рівняння явище розповсюдження хвиль із скінченною швидкістю є чисто нелінійним ефектом. Якщо у дифузійному рівнянні

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - f(u) \tag{1}$$

нелінійність f бістійка, наприклад, кубічна $f(u) = (u+q)(u^2-1)$, тоді існування бістійких поширюючих кінків для просторово–неперервного рівняння (1) є результатом асиметрії нелінійності f. В такому випадку умова

$$I = \int_{u_-}^{u_+} f(v)\,dv \neq 0, \tag{2}$$

де $u_- < u_+$ є стійкими положеннями $f(u_\pm) = 0$, $f'(u_\pm) > 0$, є необхідною та достатньою для існування поширюючих кінків [16]. У випадку, коли дифузійне рівняння (1) – просторово–дискретне, тобто Δ є просторово–дискретним оператором Лапласа, ситуація аналогічна, [29]. Основна відмінність полягає в тому, що для просторово–дискретних дифузійних систем кінки зовсім не розповсюджуються, коли інтеграл I в (2) достатньо малий. Це добре відомий ефект зупинки розповсюдження хвиль [22,29]. Якщо нелінійність f бістійка та непарна функція, $u_- = -u_+$ та $u = 0$ – нестійке положення, тоді типова ситуація для розв'язків типу бістійкого фронту є їх стаціонарність. Винятком для цього правила є випадки, коли перед хвильовим фронтом розв'язок належить малому околу нестійкого розв'язку $u = 0$. У такому випадку виникає розповсюджуюча хвиля, хвостова частина якої є стійким стаціонарним розв'язком. Природа появи таких хвиль зовсім відмінна від розповсюджуючих кінків. Механізм розповсюдження цих хвиль подібний до механізму явища падаючого доміно в їх близько вертикально поставленому ланцюжку. Такі хвилі для дискретного просторово–двовимірного нелінійного дифузійного рівняння (1) з кубічною або кусково–лінійною (типу кубічної) нелінійностями вивчені у роботі [33]. В цій роботі автори назвали такі бі- та мета–стійкі розповсюджуючі фронти – обвальними хвилями, щоб підкреслити факт існування станів близьких до нестійких.

В даній роботі детально розглянуті обвальні хвилі для одновимірних ланцюгів.

2. Просторово–одновимірні нелінійні дифузійно–кінетичні ланцюги

Нелінійні просторово–одновимірні дискретні дифузійно–кінетичні рівняння з бістійкою нелінійністю задаються нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь на ланцюгу Z^1

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = d(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - f(u_n), \quad n \in Z^1, \tag{3}$$

де константа $d \geq 0$ – додатній параметр (константа зв'язку або дифузійна константа), що є множником при дискретному Лапласіані, f – бістійка нелінійність, що задається кубічною функцією

$$f(u) = u(u^2 - 1), \tag{4}$$

або кусочно–лінійною функцією

$$f(u) = u - \operatorname{sign} u = \begin{cases} u-1, & u > 0, \\ u+1, & u < 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Рівняння (3) має точні стійкі стаціонарні розв'язки $u_n \equiv 1$ та $u_n \equiv -1$. Ми називатимемо їх тривіальними розв'язками. Тривіальним нестійким розв'язком є стаціонарний розв'язок $u_n \equiv 0$. Нетривіальні рівномірно обмежені стаціонарні розв'язки рівняння (3) задовольняють умову $|u_n| < 1$. Це твердження леми 3.1 в роботі [32]. Обмежений стаціонарний розв'язок u_n рівняння (3) з нелінійністю типу кубічної вигляду (5) є l_2 стійким тоді і лише тоді, коли $u_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}^1$. Це твердження леми 3.2 в роботі [32].

Нехай u_n – стійкий стаціонарний розв'язок рівняння (3). Сигнатурну функцію $\hat{u}_n = \operatorname{sign} u_n$ називатимемо скелетом розв'язку u_n. Стійкий стаціонарний розв'язок u_n однозначно визначається своїм скелетом $\hat{u}_n = \operatorname{sign} u_n$, це твердження теореми 3.1 в роботі [32].

Добре відомо, що обмежені стаціонарні розв'язки просторово–неперервного одновимірного аналогу рівняння (3) з кубічною нелінійністю (4) є періодичними розв'язками, а їх границі – кінки [15]. У випадку, коли рівняння (3) з нелінійностями (4) чи (5) є просторово–одновимірне та дискретне, множина стаціонарних розв'язків істотно більша, ніж у неперервному випадку. Дискретне рівняння може мати розв'язком дискретний солітон та навіть дискретні хаотичні розв'язки [32]. Для більш точного опису обмежених стаціонарних розв'язків одновимірного ланцюга (3) застосовується поняття компоненти скелету таких розв'язків. Компонента скелету за означенням – будь–яка максимальна множина послідовних точок з однаковими значеннями в них скелету. В роботі [32] показано для випадку одновимірних ланцюгів, що довільна сигнатурна функція, всі компоненти якої містять не менше $N(d) = 1/2 + \sqrt{d}\ln(2\sqrt{d})$ точок, є скелетом стійкого стаціонарного розв'язку рівняння (3), і цей розв'язок однозначно визначається своїм скелетом.

Прикладом 2τ–періодичних розв'язків рівняння (3) з нелінійністю (5) можуть слугувати наступні вирази

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n(1+4d)^{-1}, \qquad \tau = 1, \\ u_n &= (-1)^{[n/2]}(1+2d)^{-1}, \quad \tau = 2, \end{aligned} \tag{6}$$

де $[n/2]$– ціла частина від числа $n/2$. Прикладом 2τ-періодичних стаціонарних розв'язків рівняння (3) з нелінійністю (4) можуть слугувати наступні 2τ-періодичні розв'язки

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n(1-4d)^{\frac{1}{2}}, \qquad d < \tfrac{1}{4} \quad \tau = 1, \\ u_n &= (-1)^{[n/2]}(1-2d)^{\frac{1}{2}}, \quad d < \tfrac{1}{2} \quad \tau = 2. \end{aligned} \tag{7}$$

3. Біжучі кінкоподібні хвилі

Розв'язок одновимірного рівняння (1) називається кінкоподібним, якщо при $x \to \pm\infty, u(x,t) \to u_\pm$, де u_+ і u_- стійкі стаціонарні розв'язки. Як вже вказувалось у вступі, біжучі кінкоподібні хвилі існують лише у випадку несиметричної нелінійності f, коли інтеграл (2) відмінний від нуля. Розглянемо просторово–одновимірне рівняння дифузії вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \Theta(u) - q\Theta(-u), \tag{8}$$

де $q \geq 1$, а Θ – одинична функція Хевісайда. Нелінійність в (8) кусково–лінійна з двома стійкими положеннями $u_+ = 1$ і $u_- = -q$. При $q > 1$ і довільних $d > 0$ для рівняння (8) існує біжуча кінкоподібна хвиля вигляду

$$u(x,t) = a(x - ct), \tag{9}$$

де

$$a(x) = \begin{cases} 1 - e^{-px}, & x \geq 0, \\ -q(1 - e^{\frac{1}{pd}x}), & x \leq 0, \end{cases} \tag{10}$$

а

$$p = \sqrt{\frac{q}{d}}, \quad c = (q-1)\sqrt{\frac{d}{q}}. \tag{11}$$

Просторово–дискретним аналогом рівняння (8) є рівняння

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = d(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - u_n + \Theta(u_n) - q\Theta(-u_n). \tag{12}$$

При великих значеннях дифузійної константи d у рівнянні (8) існує кінкоподібний хвильовий розв'язок, який має вигляд

$$u_n(t) = a(n - ct),$$

де функція a подібна до вказаної в (10). Проте, при малих d, або при q, близькому до 1, кінкоподібні хвилі зупиняються, утворюючи стаціонарний розв'язок рівняння (12). Знайдемо умови, коли у рівняння (12) існують стаціонарні кінки. Не порушуючи загальності, можна вважати, що стаціонарний розв'язок рівняння (12) приймає додатні значення при $n > 0$. Але такий стаціонарний розв'язок задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} d(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - u_n + 1 = 0, \quad n \geq 1, \\ d(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) - u_n - q = 0, \quad n \leq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Якщо позначити $u_1 = \alpha$, а $u_0 = -\beta$, де числа α і β додатні, то із (13), враховуючи умови $u_n \to 1$ при $n \to \infty$, а $u_n \to -q$ при $n \to -\infty$, отримуємо

$$u_n = \begin{cases} 1 - (1+\beta)e^{-pn}, & n \geq 0, \\ -q + (q - \beta)e^{pn}, & n \leq 1, \end{cases} \tag{14}$$

де

$$p = 2\ln\frac{1+\sqrt{1+4d}}{2\sqrt{d}} \tag{15}$$

є додатнім розв'язком рівняння

$$2\sinh\frac{p}{2} = \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Умови, що розв'язок (14) при $n = 0$ – від'ємний, а при $n = 1$ – додатній, призводять до наступної умови існування стаціонарного кінка

$$d < \frac{q}{(q-1)^2}. \tag{16}$$

При умові, коли $d > \dfrac{q}{(q-1)^2}$, виникає кінкоподібна біжуча хвиля. Ця умова еквівалентна умові, що $q > 1 + \dfrac{1}{2d} + \dfrac{1}{2d}\sqrt{1+4d}$.

4. Біжучі обвальні хвилі

Розглянемо задачу Коші для одновимірного дифузійно–кінетичного ланцюга (3) із бістійкою нелінійністю f і стійкими розв'язками $u_n \equiv 1$ та $u_n \equiv -1$.

Нехай початкові дані співпадають на додатній півосі зі стаціонарним просторово–періодичним розв'язком u_n^{per} і з тривіальним стійким розв'язком $u_n \equiv -1$ на від'ємній півосі. При досить малих значеннях дифузійної константи d еволюція в часі призводить до певних незначних змін початкових даних і прямування розв'язку до стаціонарного при $t \to \infty$. Проте, при великих значеннях константи d, як показують числові розрахунки, виникає поступовий почерговий перехід значень із u_n^{per} до -1. Цей процес переходу значень u_n^{per} із околу нестійкого положення в стійкий стан $u_n \equiv -1$ нагадує ефект падаючого доміно, де падіння з певною швидкістю зміщується вздовж ланцюжка. Це спостереження дає можливість привести наступне означення біжучої обвальної хвилі для рівняння (3).

Означення 1. *Розв'язок $u_n(t)$ рівняння (3) з бістійкою нелінійністю (4) або (5) будемо називати біжучою обвальною хвилею, що рухається зі швидкістю c по переходу стаціонарного періодичного розв'язку u_n^{per} в стійкий тривіальний розв'язок $u_n \equiv -1$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий скінченний інтервал $I_0 = (N_1, N_2)$, що розв'язок $u_n(t)$ зовні інтервалу $I_t = (N_1 + ct, N_2 + ct)$ відрізняється менше, ніж на ε, від u_n^{per} при $n > N_2 + ct$ і від стійкого тривіального розв'язку $u_n \equiv -1$ при $n < N_1 + ct$.*

Розглянемо випадок рівняння (3)–(5) і стаціонарний 2–періодичний розв'язок $u_n^{per} = (-1)^n(1+4d)^{-1}$. Існування біжучих обвальних хвиль в цьому випадку випливає із наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай $u_n^{per} = (-1)^n(1 + 4d)^{-1}$ – стаціонарний 2–періодичний розв'язок рівняння (3)–(5). Тоді існує таке $d_0 = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$, що для кожного значення дифузійної константи $d > d_0$ в рівнянні (3)–(5) існує біжуча обвальна хвиля з певною швидкістю $c = c(d)$ по переходу розв'язку u_n^{per} в тривіальний розв'язок $u_n \equiv -1$. Цей розв'язок можна представити у вигляді*

$$u_n(t) = \begin{cases} a_0(n - ct), & n = 2k, \\ a_1(n - ct), & n = 2k - 1, \end{cases} \tag{17}$$

де функції a_0 і a_1 монотонно зростаючі і задовольняють граничні умови на нескінченності

$$\begin{aligned} &a_k(x) \to (-1)^k(1 + 4d)^{-1}, \; x \to \infty \\ &a_k(x) \to -1, \;\; x \to -\infty, \;\; (k = 0, 1). \end{aligned} \tag{18}$$

Доведення. Спочатку побудуємо в явному вигляді стійкі стаціонарні розв'язки рівняння (3)–(5), вважаючи, що розв'язок u_n приймає додатні значення лише при парних $n \geq 0$. Нехай $u_0 > 0$, тоді

$$u_n = (-1)^n(1+4d)^{-1}(1-(-1)^n e^{-pn}) + u_0 e^{-pn}, \quad n \geq 0,$$
$$u_n = -1 + (1+u_0)e^{pn}, \quad n \leq 0, \tag{19}$$

де значення p визначено в (15), а $u_0 = \dfrac{\sqrt{1+4d}-2d}{1+4d}$. Умова $u_0 > 0$ дає обмеження на коефіцієнт дифузії $d < d_0 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})$, при якій існує стаціонарний розв'язок. При $d > d_0$ виникає біжуча обвальна хвиля вигляду (17). Підставляючи вираз (17) у рівняння (3)–(5), отримуємо систему для функцій a_0 і a_1:

$$-ca_0'(x) = d[a_1(x+1) + a_1(x-1) - 2a_0(x)] - a_0(x) + \operatorname{sign}(a_0),$$
$$-ca_1'(x) = d[a_0(x+1) + a_0(x-1) - 2a_1(x)] - a_1(x) + \operatorname{sign}(a_1). \tag{20}$$

Не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_1(x) < 0$, а функція $a_0(x)$ приймає додатні значення лише при $x > 0$. В системі (20) перейдемо до нових функцій $w(x)$ і $v(x)$, поклавши

$$w(x) = a_0(x) + a_1(x), \qquad v(x) = a_0(x) - a_1(x). \tag{21}$$

Тоді отримуємо окремі рівняння для функцій $w(x)$ і $v(x)$:

$$-cw'(x) = d[w(x+1) + w(x-1) - 2w(x)] - w(x) - 2\Theta(-x),$$
$$cv'(x) = d[v(x+1) + v(x-1) + 2v(x)] + v(x) - 2\Theta(x), \tag{22}$$

де $\Theta(x)$ – одинична функція Хевісайда. Граничні умови (18) трансформуються в граничні умови для функцій $w(x)$ і $v(x)$:

$$w(x) \to 0, \quad x \to +\infty, \qquad w(x) \to -2, \ x \to -\infty,$$
$$v(x) \to 2(1+4d)^{-1}, \ x \to +\infty, \qquad v(x) \to 0, \ x \to -\infty, \tag{23}$$
$$w(0) = -v(0) = a_1(0).$$

Система (23) є лінійною диференціальною різницевою системою із сталими коефіцієнтами. Часткові розв'язки неоднорідної системи на додатній і від'ємній осі мають вигляд $\tilde{w}(x) = 0$ при $x > 0$; $\tilde{w}(x) = -2$ при $x < 0$ $\tilde{v}(x) = 2(1 + 4\pi)$ при $x > 0$ $\tilde{v}(x) = 0$ при $x < 0$. Однорідні рівняння (23) мають розв'язки $w(x) = e^{px}$, де число p є нулем характеристичного рівняння

$$-cp + 1 + 2d = 2d \cosh p. \tag{24}$$

Рівняння (24) має два розв'язки p_1 і p_2. При великих $d > d_0$ ці розв'язки наближено мають вигляд $p_1 = c^{-1} > 0$ і $p_2 = -\frac{c}{d}$. Розв'язки однорідного рівняння для $\tilde{v}$ мають вигляд $\tilde{v} = e^{p_k x}$, де p_k нулі характеристичного рівняння

$$-cp + 1 + 2d = -2d \cosh p. \tag{25}$$

При великих значеннях $d > d_0$ дійсна частина p_3 і p_4 додатна. Тому неперервний на всій осі розв'язок системи (23) можна представити у вигляді

$$w(x) = \begin{cases} -2(1+4d)^{-1} e^{p_2 x}, & x \geq 0, \\ -2 + 2(1 - (1+4d)^{-1}) e^{p_1 x}, & x \leq 0, \end{cases} \tag{26}$$

та

$$v(x) = \begin{cases} 2(1+4d)^{-1}, & x > 0, \\ -2(1+4d) e^{\frac{4d}{c} x}, & x < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Умова, що розв'язок $w(x)$ є неперервний в точці $x = 0$, а стрибок похідної $w(+0) - w(-0) = \dfrac{2}{c}$ дає такий вираз для швидкості

$$c = 2\sqrt{2}d. \tag{28}$$

Враховуючи заміну (21), отримуємо

$$a_0(x) = \frac{1}{2}(w(x) + v(x)), \;\; a_1(x) = \frac{1}{2}(w(x) - v(x)). \tag{29}$$

Підставляючи вирази (26) та (27) для $w(x)$ і $v(x)$ у формули (21), отримуємо в явній формі функції $a_0(x)$ та $a_1(x)$. Наближені вирази для цих функцій при великих значеннях d мають наступний вигляд:

$$a_0(x) = \begin{cases} (1+4d)^{-1}(1-e^{-\frac{c}{p}x}), & x \geq 0, \\ -1+e^{\frac{1}{c}x}, & x \leq 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$a_1(x) = \begin{cases} -(1+4d)^{-1}(1+e^{-\frac{c}{p}x}), & x \geq 0, \\ -1+e^{\frac{1}{c}x}-(1+4d)^{-1}(e^{\frac{1}{c}x}+e^{\frac{4d}{c}x}), & x \leq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Якщо розв'язок $u_n(t)$ допускає представлення (17) з граничними умовами (18), тоді він згідно з Означенням 1 представляє біжучу обвальну хвилю. Теорема 1 доведена.

Література

[1] *Afraimovich V. S., Nekorkin V. I.* Chaos of traveling waves in a discrete chain of diffusively coupled maps // Int. J Bifur. Chaos — 1994. — **4**. — P. 631–637.

[2] *Aronson D. G., Weinberger H. F.* Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics // Adv. Math. — 1978. — **30**. — P. 33–76.

[3] *Atkinson C., Reuter G. E. H.* Deterministic epidemic waves //Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1976. — **80**. — P. 315–330.

[4] *Bates P. W., Fife P. C., Ren X., Wang. X.* Traveling waves in a convolution model for phase transitions // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1997. — **138**. — P. 105–136.

[5] *Bell J., Cosner C.* Threshold behavior and propagation for nonlinear differential-difference systems motivated by modeling myelinated axons // Q. Appl. Math. — 1984. — **42**. — P. 1–14.

[6] *Cahn J. W., Chow S-N., Van Vleck E. S.* Spatially discrete nonlinear diffusion equations // Rocky Mount. J. Math. — 1995. — **25**. — P. 87–118.

[7] *Cahn J. W., Mallet-Paret J., Van Vleck E. S.* Traveling wave solutions for systems of ODE's on a two-dimensional lattice // SIAM J. Appl. Math. — 1999. — **59**. — P. 455–493.

[8] *Chen X., Guo J-Sh., Wu Ch-Ch.* Traveling waves in discrete periodic media for bistable dynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. — 2008. — **189**. — P. 189–236.

[9] *Chow S-N., Mallet–Paret J.* Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems - part I // IEEE Trans. Circuits Syst I — 1995. — **CAS - 42**(10). — P. 746–751.

[10] *Chow S-N., Mallet–Paret J., Van Vleck E. S.* Pattern formation and spatial chaos in spatially discrete evolution equations // Random Comput. Dynam. — 1996. — **4**. — P. 109–178.

[11] *Chow S-N., Shen W.* Dynamics in a discrete Nagumo equation: spatial topological chaos // SIAM J. Appl. Math. — 1995. — **55**(6). — P. 1764-1781.

[12] *Chua L. O., Hasler M., Moschytz G., Neirynck J.* Autonomous cellular neural networks: a unified paradigm for pattern formation and active wave propagation // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 1995. — **CAS-42**. — P. 559–577.

[13] *Chua L. O., Yang L.* Cellular neural networks: Theory and practice // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1988. — **CAS-35**(10). — P. 1257–1290.

[14] *Crounse K. R., Chua L. O.* Methods for image processing and pattern formation in cellular neural networks: a tutorial // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 1995. — **CAS-42**(10). — P. 583–601.

[15] *Elmer C. E., Van Vleck E. S.* Analysis and computation of traveling wave solutions of bistable differential-difference equations // Nonlinearity. — 1999. — **12**. — P. 771–798.

[16] *Fife P. C.* Mathematical aspects of reacting and diffusing systems in Lectures Notes in Biomathematics.–Berlin: ed. Levin S., Springer-Verlag, 1979.

[17] *Fife P. C.* Diffusive waves in inhomogeneous media // Proc. Edinburg Math. Soc. — 1989. — **2**, 32. — P. 291–315.

[18] *Glass L., Hunter P., McCulloch.* Theory of Heart.–Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[19] *Guo J-Sh., Wu Ch-Ch.* The existence of traveling wave solutions for a bistable three-component lattice dynamical system // Journal of Differential Equations — 2016. — **260**. — P. 1445–1455.

[20] *Hupkes H. J., Van Vleck E. S.* Negative Diffusion and Traveling Waves in High Dimensional Lattice Systems // SIAM J. Math. Anal. — 2013. — **45**. — P. 1068–1135.

[21] *Hupkes H. J., Van Vleck E. S.* Traveling Waves for Complete Discretizations of Reaction Diffusion Systems // J. Dyn. Diff. Eqn. — 2015. — P. 1–52.

[22] *Keener J. P.* Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — **47**(3). — P. 556–572.

[23] *Keener J. P.* The effects of discrete gap junction couplingon propagation in myocardium // J. Theor. Biol. — 1991. — **148**. — P. 49–82.

[24] *Keener J. P., Sneed J.* Mathematical Physiology. — New York, 1988.

[25] *Kohonen T.* Self–organizing Maps. — Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[26] *Laplante J. P., Erneux T.* Propagation failure and multiple steady states in an array of diffusion couples flow reactors // Physica A — 1992. — **188**. — P. 89–98.

[27] *Laplante J. P., Erneux T.* Propagation failure in arrays of coupled bistable chemical reactors // J. Phys. Chem. — 1992. — **96**. — P. 4931–4934.

[28] *Mallet–Paret J.* Spatial patterns, spatial chaos, and traveling waves in lattice differential equations in: Stochastic and Spatial Structures of Dynamical Systems, eds. S.J. van Strien and S.M. Verduyn Lunel, North-Holland. — 1996. — P. 105–129.

[29] *Mallet–Paret J.* The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems // J. Dynam. Differential Equations. — 1999. — **11**. — P. 49–128.

[30] *Marquie P., Binczak J. C., Comte J. C., Michaux B., Bilbault J. M.* Diffusion effects in a nonlinear electrical lattice // Phys. Rev. E — 1998. — **57**. — P. 6075.

[31] *Nekorkin V. I., Kazantsev V. B., Rulkov N. F., Velarde M. G., Chua L. O.* Homoclinic orbits and solitary waves in a one-dimensional array of Chua's circuits // IEEE Trans. Circuits Syst.I — 1995. — **CAS-42**(10). — P. 785–801.

[32] *Nizhnik L. P, Nizhnik I. L., Hasler M.* Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-d array of bistable cells // Int. J. of Bifurcation and Chaos. — 2002. — **2**. — P. 261–279.

[33] *Nizhnik L. P, Hasler M., Nizhnik I. L.* Traveling avalanche waves in spatially discrete bistable reaction-diffusion systems. — 2002. — Preprint 03-05-115 BiBoS. 21 pp.

[34] *Nizhnik I. L.* Stable stationary solutions for a reaction–diffusion equation with a multi-stable nonlinearity // Phys. Lett. A — 2006. — **357**. — P. 319—322.

[35] *Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Chua L. O.* Traveling wave front and its failure in one-dimensional array of Chua's circuits // J. Circuits, Syst. Comput. — 1993. — **3**. — P. 215–229.

[36] *Roska T., Chua L. O.* The CNN universal machine: an analogue array computer // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1993. —**40**. — P. 163–173.

[37] *Shen W.* Traveling waves in time almost periodic structures governed by bistable nonlinearities. I. Stability and uniqueness // J. Differential Equations. — 1999. — **159**. — P. 1–54.

[38] *Sheng W-J., Li W-T., Wang Z-C.* Periodic pyramidal traveling fronts of bistable reaction-diffusion equations with time-periodic nonlinearity // Journal of Differential Equations. — 2012. — **252**. — P. 2388–2424.

[39] *Thiran P.* Dynamics and Self-Organization of Locally Coupled Neural Networks. — Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997. — 209 pp.

[40] *Thiran P., Crounse K. R., Chua L. O., Hasler M.* Pattern formation properties of autonomous cellular neuralnetworks // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1995. — **42**. — P. 757–774.

[41] *Van Vleck E. S., Zhang A.* Competing interactions and traveling wave solutions in lattice differential equations // Communications on Pure and Applied Analysis — 2016. — **15**. — P. 457–475.

[42] *Zinner B.* Stability of traveling wavefronts for the discrete Nagumo equation // SIAM J. Math. Anal. — 1991. — **22**. — P. 1016–1020.

[43] *Zinner B.* Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation // J. Diff. Eq. — 1992. — **96**. — P. 1–27.

[44] *Zou W., Zhan M.* Stationary patterns in a discrete bistable reaction-diffusion system: mode analysis // Chin. Phys. B — 2010. — **19**, № 10. — P. 100509–100519.