Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 109–131

УДК 519.624:517.984

Суперекспоненціальна збіжність FD-методу для спектральної задачі в банаховому просторі

В. Л. Макаров, Н. М. Романюк

Інститут математики НАН України, Київ;
makarov@imath.kiev.ua, romaniuknm@gmail.com

In this work we obtaine necessary conditions for the FD-method's super-exponential convergence with respect to eigenvectors. The mentioned method is targeted to solve spectral problems for linear operators in Banach space wich can contain eigenvalues of arbitrary multiplicity.

В работе получены достаточные условия супер-экспоненциальной сходимости относительно собственных векторов предложенного ранее авторами алгоритма FD-метода для решения спектральных задач для линейных операторов с дискретным спектром, действующих в банаховом пространстве. При этом, как исходная задача, так и операторы промежуточных задач FD-метода могут иметь кратные собственные значения.

1. Вступ

Найбільш економічними серед наближених методів розв'язання задач на власні значення з точки зору обчислювальних ресурсів, а значить, і більш ефективними при їх програмній реалізації є дискретні методи. Проте, дискретні методи мають ряд недоліків, які на даний момент вдалось подолати тільки частково. Це, наприклад, погіршення точності із зростанням номера власного значення, використання згенерованої на початку чисельного процесу сітки, насичення точності, обмежена кількість обчислюваних (надійних) власних значень, яка залежить від кроку сітки.

Недоліки класичних дискретних та спектральних методів, зокрема, методу скінченних різниць (FDM), методу Нумерова (MN) та методу скінченних елементів (FEM), підкреслює заключне зауваження із [19] про те, що «хоча число надійних власних значень і зростає зі збільшенням обчислювального масштабу N, відсоток надійних власних значень (в порівнянні з ненадійними власними значеннями) буде прямувати до нуля, коли N прямує до нескінченності». Тут N – кількість вузлових точок розбиття. За допомогою *асимптотичної корекції* в поєднанні з FDM, MN та FEM частково вдалось подолати проблему погіршення точності із зростанням номера власного значення, адже ця техніка є ефективною для дуже низьких за номером власних значень (див., напр., монографію [16] та відповідні посилання в ній). Водночас існують задачі, які вимагають обчислення великої кількості (тисяч) власних значень та відповідних нормованих власних функцій, наприклад, при обчисленні функції спектральної щільності (див., напр., [16, p.273]).

Протягом останніх років для наближеного розв'язування задач на власні значення широко застосовуються аналітичні (функціональні) методи, які базуються на ідеї *методу гомотопії* або, що те ж саме, *методу продовження за параметром* (див., напр., [1, 2]) і дозволяють знаходити розв'язки у вигляді швидкозбіжних функціональних рядів. Це, наприклад, запропонований у 80-х роках XX століття американським фізиком Дж. Адомяном *метод декомпозиції Адомяна* (ADM) (див. посилання в [17]), запропонований у 1992 році в [14] китайським математиком Shijun Liao *метод гомотопного аналізу* (HAM), запропонований китайським математиком JI-Huan He у 1999 році в [13] *метод гомотопного збурення* (HPM).

Спорідненим за ідеологією із згаданими методами HPM, HAM та ADM є *функціонально-дискретний метод* (FD-метод), який на відміну від них містить в собі дискретну складову, за допомогою якої можна досягати збіжності у випадках, коли HPM, HAM, ADM є розбіжними. Наявність дискретної складової робить FD-метод спорідненим також із методами, які використовують *апроксимацію коефіцієнтів диференціального рівняння* та зарекомендували себе як високоточні та ефективні. Варіанти цього методу були у використанні з початку XX-го століття, а для кусково-сталого наближення коефіцієнтів метод був вперше теоретично обґрунтований М. М. Боголюбовим і М. М. Криловим у 1928 році для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та названий «*metodo dei* *tronconi*» [4]. Пізніше в 1969 році в [12] R. G. Gordon запропонував метод кусково-поліноміального наближення коефіцієнтів системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Варто також згадати роботи J. Dähnn, наприклад, у [5] для задач Штурма-Ліувілля другого порядку використано кусково-сталу апроксимацію коефіцієнтів рівняння. Методи такого типу відомі у літературі під назвою *методи Прюса* (див., напр., [16, Ch.6]) та названі на честь S. Pruess, який у 1973 році в [15] довів умови строгої збіжності та здійснив аналіз похибок методу при використанні кусково-поліноміальної апроксимації. До методів апроксимації коефіцієнтів диференціального рівняння також належать *експоненціально зважений Тау метод Лежандра-Гауса* [6, 7] та *методи кускового збурення* («*Piecewise Perturbation Methods*» – PPM) (див., напр., [18]).

Вперше запропонований у 1991 році В. Л. Макаровим в [22] FD-метод дає змогу подолати перераховані вище недоліки дискретних методів та може бути застосований до розв'язування операторних рівнянь загального вигляду (див., напр., [21]), а для ряду конкретних випадків було доведено, що швидкість його збіжності є *суперекспоненціальною*. Для широкого класу одновимірних задач на власні значення було доведено, що FD-метод збігається із швидкістю не повільнішою, ніж геометрична прогресія, знаменник якої прямо пропорційний параметру дискретизації та обернено пропорційний порядковому номеру відповідного власного значення, тобто із збільшенням порядкового номера власного значення зростає швидкість збіжності FD-методу.

Серед особливостей, які спричиняють труднощі при чисельному розв'язуванні задач на власні значення за допомогою дискретних методів, слід відмітити наявність *кратних* та *щільно згрупованих в кластери близьких власних значень*. Такі особливості притаманні, наприклад, скалярним задачам Штурма-Ліувілля другого порядку з рівняннями Матьє і Кофі-Еванса та з рівняннями Хілла і Ламе з періодичними та антиперіодичними крайовими умовами, скалярним задачам типу Штурма-Ліувілля четвертого порядку з відповідними крайовими умовами, задачам типу Штурма-Ліувілля з матричними коефіцієнтами. Як зазначено у [8], при недостатньо малому кроці розбиття відрізку отримані згідно з дискретними методами наближення до близьких і, водночас, простих власних значень на деякому кроці методу починають співпадати.

В роботах В. Л. Макарова та його учнів [3, 9, 10, 20] FD-метод обґрунтовано та застосовано для розв'язування задач типу Штурма-Ліувілля з *близькими щільно згрупованими в двійки власними значеннями*. При цьому вже на етапі базової задачі, з якої починається чисельний процес, виникають *двократні власні значення*, що зумовлює модифікацію традиційного алгоритму FD-методу для кожної із задач, а в [9] здійснено узагальнення на випадок абстрактної постановки задачі на власні значення для самоспряжених операторів з дискретним спектром, що діють у гільбертовому просторі. Пізніше в роботах [25, 26] обґрунтовано нову схему алгоритму FD-методу для задач на власні значення в абстрактному формулюванні для самоспряжених операторів з дискретним спектром, що діють у гільбертовому просторі, у випадку базової задачі з власними значеннями *довільної (скінченної) кратності*.

Дана робота є доповненням до результатів роботи [11] щодо суттєвого уточнення швидкості збіжності відносно власних векторів запропонованого в ній алгоритму FD-методу для задач на власні значення в абстрактному формулюванні для лінійних операторів з дискретним спектром, що діють у банаховому просторі, у випадку базової задачі з власними значеннями довільної (скінченної) кратності. Слід зауважити, що розроблені підходи FD-методу у згаданих роботах [11, 25, 26] можуть бути застосовані до спектральних задач типу Штурма-Ліувілля як на скінченному, так і на нескінченному інтервалі, які можуть мати кратні власні значення як у вихідній постановці, так і в процесі їх розв'язування, причому, не тільки на етапі базової задачі.

2. Абстрактна постановка задачі

Розглянемо задачу на власні значення в банаховому просторі X з нульовим елементом θ

$$(A+B)u_n - \lambda_n u_n = \theta \tag{1}$$

в припущенні, що спектр оператора $A+B$ є дискретним. Шукаємо власну пару $\{\lambda_n, u_n\}$ із заданим фіксованим індексом n. Нехай X^* є дуальним банаховим простором лінійних функціоналів на X і $(\cdot,\cdot)$ є білінійним відношенням. Апроксимуємо оператор B оператором $\bar{B}$ таким, щоб *базова задача*

$$(A+\overline{B})u_n^{(0)} - \lambda_n^{(0)} u_n^{(0)} = \theta \tag{2}$$

була «простішою», ніж задача (1), тобто так, щоб (2) мала явний аналітичний (точний) розв'язок.

Визначимо формально гомотопію між двома задачами P_1 та P_2 із розв'язками u_1 та u_2 з топологічного простору X як параметричну задачу $P_H(t)$ із розв'язком $u(t)$, який неперервно залежить від параметра $t \in [0,1]$ і $u(0) = u_1$, $u(1) = u_2$ (див., напр., [1, 2]). Згідно з ідеєю гомотопії для деякого фіксованого номера n власної пари «занурюємо» (2) в сімейство параметричних задач

$$(A + W(t))u_n(t) - \lambda_n(t)u_n(t) = \theta, \quad t \in [0,1] \tag{3}$$

з $W(t) = \overline{B} + t(B - \overline{B})$, яке містить обидві задачі (1) і (2). Очевидно, що $u_n(0) = u_n^{(0)}$, $\lambda_n(0) = \lambda_n^{(0)}$, $\quad u_n(1) = u_n$, $\lambda_n(1) = \lambda_n$. Розв'язок (3) шукаємо у вигляді степеневих рядів по змінній t:

$$\lambda_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)} t^j,\ u_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)} t^j, \tag{4}$$

де формально $\lambda_n^{(j)} = \frac{1}{j!} \left.\frac{d^j \lambda_n(t)}{dt^j}\right|_{t=0}$, $u_n^{(j)} = \frac{1}{j!} \left.\frac{d^j u_n(t)}{dt^j}\right|_{t=0}$. При $t = 1$ в (4) отримуємо

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \quad u_n = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)} \tag{5}$$

за умови, що ряди (4) збігаються для всіх $t \in [0,1]$. Зрізані ряди

$$\overset{N}{\lambda}_n = \sum_{j=0}^{N} \lambda_n^{(j)}, \quad \overset{N}{u}_n = \sum_{j=0}^{N} u_n^{(j)} \tag{6}$$

є *наближеннями рангу* N до власних значень і власних векторів задачі (1) і разом з отриманими в [11] та наведеними нижче формулами для $\lambda_n^{(j)}, u_n^{(j)}$ становлять алгоритм для їх обчислення.

3. Алгоритм FD-методу

Для того, щоб знайти члени рядів (5), (6) підставимо (4) в (3) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t. Отримаємо наступну рекурентну послідовність рівнянь:

$$(A + \overline{B})u_n^{(j+1)} - \lambda_n^{(0)} u_n^{(j+1)} = F_n^{(j+1)},\ j = -1, 0, 1, ... \tag{7}$$

з $F_n^{(0)}=0$ та

$$F_n^{(j+1)}=F_n^{(j+1)}(\lambda_n^{(0)},...,\lambda_n^{(j+1)};u_n^{(0)},...,u_n^{(j)})=$$
$$=\lambda_n^{(j+1)}u_n^{(0)}-\varphi(B)u_n^{(j)}+\sum_{p=1}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)},\quad \varphi(B)=B-\overline{B}. \tag{8}$$

Початкові значення $\lambda_n^{(0)}$, $u_n^{(0)}$ для задач (7), (8) є розв'язками *базової задачі* (2), яка є «простішою», ніж задача (1). Нехай базова задача має дійсні власні значення, впорядковані в неспадному порядку, тобто $0\le\lambda_1^{(0)}\le\lambda_2^{(0)}\le...\le\lambda_n^{(0)}\le...$, куди кожне власне значення $\lambda_n^{(0)}$ входить k_n разів відповідно до його кратності. Нехай $e_{n,p}$, $p=\overline{1,k_n}$, $n=1,2,...$ є власними векторами, які відповідають $\lambda_n^{(0)}$, $n=1,2,...$, і утворюють базис в X. Позначимо через $\vec{e}_n=[e_{n,1},e_{n,2},...,e_{n,k_n}]^T$ та через $f_{n,p}$, $p=\overline{1,k_n}$, $n=1,2,...$ відповідну біортогональну систему функціоналів в X^* до $e_{n,p}$, $p=\overline{1,k_n}$, тобто $(e_{m,i},f_{n,j})=\delta_{n,j}\delta_{m,i}$, $n,m=1,2,...$, $i=1,2,...,k_m$, $j=1,2,..,k_n$, яка утворює базис в X^*. Тут і надалі позначатимемо через $\delta_{n,j}$ символ Кронекера.

Рекурентні рівняння згідно з нашим методом мають вигляд:

$$\tilde{A}u-\lambda_n^{(0)}u=g, \tag{9}$$

де $\lambda_n^{(0)}$ є власним значенням оператора $\tilde{A}=A+\overline{B}$, тобто оператор $\tilde{A}+\lambda_n^{(0)}E$ з тотожним оператором E є сингулярним. Частковий розв'язок будемо шукати у такій формі:

$$\hat{u}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_p}c_{p,i}e_{p,i}. \tag{10}$$

Після підстановки (10) в рівняння (9) з використанням біортогональності систем $\{e_{p,i}\}$ та $\{f_{p,i}\}$ одержимо

$$c_{n,i}=0,\quad c_{p,i}=\frac{(g,f_{p,i})}{\lambda_p^{(0)}-\lambda_n^{(0)}}, \tag{11}$$

тобто

$$\hat{u}=\Gamma_n^+g=\sum_{p=1,p\ne n}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^{(0)}-\lambda_n^{(0)}}\sum_{i=1}^{k_p}(g,f_{p,i})e_{p,i}, \tag{12}$$

де через Γ_n^+ позначено псевдообернений оператор Мура-Пенроуза до оператора $\tilde{A} + \lambda_n^{(0)} E$.

Загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u_n^{(0)} = \sum_{p=1}^{k_n} C_{n,p}^{(0)} e_{n,p}, \tag{13}$$

де сталі $C_{n,p}^{(0)}$ $p = \overline{1, k_n}$ будуть визначені нижче.

Використовуючи умови розв'язності

$$(F_n^{(j+1)}, f_{n,p}) = 0, \;\; p = \overline{1, k_n}, \tag{14}$$

розв'язок (7) можна записати у вигляді

$$u_n^{(j+1)} = \sum_{p=1}^{k_n} C_{n,p}^{(j+1)} e_{n,p} + \hat{u}_n^{(j+1)}, \tag{15}$$

де перший доданок є загальним розв'язком однорідного рівняння і

$$\hat{u}_n^{(j+1)} = \Gamma_n^+ \left(\sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} u_n^{(p)} - \varphi(B) u_n^{(j)} \right) \tag{16}$$

є частковим розв'язком неоднорідного рівняння. Причому, підсумовування за p в (16) здійснюється від 1, а не від 0, внаслідок властивості оператора Γ_n^+, яку сформульовано в лемі 3.1.

Лема 3.1. *Справедливими є такі рівності:* $\Gamma_n^+ e_{n,p} = 0$, $p = \overline{1, k_n}$.

Доведення леми 3.1 слідує із зображення (12).

Умова (14) приводить до системи рівнянь

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{k_n} C_s^{(j)} \Big((\varphi(B) - \lambda_n^{(1)} E) e_{n,s}, f_{n,m} \Big) = \\ = - \Big(\varphi(B) \hat{u}_n^{(j)}, f_{n,m} \Big) + \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(j+1-p)} C_m^{(p)} \,, \;\; m = \overline{1, k_n}. \end{gathered} \tag{17}$$

Тут через $\lambda_n^{(1)}$ позначено одне з власних значень $\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n,i}^{(1)}$, $i = \overline{1, k_n}$ матриці $[(\varphi(B) e_{n,s}, f_{n,m})]_{s,m=\overline{1,k_n}}$, що відповідають впорядкуванню:

$\lambda_{n,1}^{(1)} \le \lambda_{n,2}^{(1)} \le ... \le \lambda_{n,k_n}^{(1)}$, в яке кожне власне значення входить відповідну до його кратності кількість разів. Введемо вектор $\vec{C}^{(j)}$ із компонентами $C_s^{(j)}, s = 1, ..., k_n$ та матрицю

$$D^{[\nu]} = [d_{s,m}^{[\nu]}]_{s,m=\overline{1,k_n}},$$
$$d_{s,m}^{[\nu]} = \left((\varphi(B) - \lambda_{n,\nu}^{(1)} E)e_{n,s}, f_{n,m}\right), \ 1 \le \nu \le k_n \tag{18}$$

і перепишемо рівняння (17) у векторно-матричній формі

$$D^{[\nu]}\vec{C}^{(j)} = \sum_{p=0}^{j-1} \lambda_n^{(j+1-p)} \vec{C}^{(p)} - \langle \varphi(B)\hat{u}^{(j)}, \vec{f}\rangle, \ \ j = 0, 1, ..., \tag{19}$$

де $\vec{f} = [f_1, f_2, ..., f_{k_n}]^T$, $\langle v, \vec{f}\rangle = [(v, f_1), (v, f_2), ..., (v, f_{k_n})]^T$. Із (19) при $j = 0$, враховуючи умову $\hat{u}^{(0)} = 0$, отримуємо

$$D^{[\nu]}\vec{C}^{(0)} = \vec{0}. \tag{20}$$

Тут вектори $\vec{C}_i^{(0)}$, $i = \overline{1, \mu_\nu}$, $1 \le \mu_\nu < k_n$, $(\vec{C}_i^{(0)}, \vec{C}_t^{(0)})_R = \delta_{i,t}$ є розв'язками системи (20), тобто $\lambda_\nu^{(1)}$ є власним значенням матриці $[(\varphi(B)e_{n,s}, f_{n,m})]_{s,m=\overline{1,k_n}}$ кратності μ_ν, де $(\cdot,\cdot)_R$ є скалярним добутком в R^{k_n}. Вимагатимемо, щоб коефіцієнти $C_{n,p}^{(j+1)}$, $p = \overline{1,k}$ задовольняли умову:

$$(u_n^{(j+1)}, f_n^{(0)}) = \left(u_n^{(j+1)}, \sum_{i=1}^{k_n} C_{n,i}^{(0)} f_{n,i}\right) = 0, \tag{21}$$

де $f_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{k_n} C_{n,i}^{(0)} f_{n,i}$ є спряженим вектором до $u_n^{(0)}$. Звідси слідує

$$(\vec{C}_i^{(j+1)}, \vec{C}_i^{(0)})_R = \sum_{p=1}^{k_n} C_{n,p}^{(j+1)} C_{n,p}^{(0)} = 0, \ j = 0, 1, \dots . \tag{22}$$

Помножимо (17) на $C_m^{(0)}$ та підсумуємо за m від 1 до k_n. Отримаємо наступне співвідношення:

$$\lambda_n^{(j+1)} = \left(\varphi(B)\hat{u}_n^{(j)}, f_n^{(0)}\right), \tag{23}$$

звідки отримаємо оцінку

$$||\lambda_n^{(j+1)}|| \le ||\varphi(B)\hat{u}_n^{(j)}|| \ ||f_n^{(0)}||_*, \tag{24}$$

де $||\cdot||_*$ – норма в X^*.

Враховуючи (23), видно, що права частина (19) ортогональна до векторів $\vec{C}_i^{(0)}$, $i=\overline{1,\mu_\nu}$, тобто необхідні і достатні умови її розв'язності виконуються.

Розглянемо наступний розв'язок системи (19) (цей розв'язок є неоднозначним):

$$\vec{C}_i^{(j)} = (D^{[\nu]})^+ \left(\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_i^{(j+1-p)} \vec{C}_i^{(p)} - \langle \varphi(B)\hat{u}_i^{(j)}, \vec{f} \rangle \right), \tag{25}$$

де $(D^{[\nu]})^+$ – псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці $D^{[\nu]}$. Зауважимо, що в даному розділі при детальному записі замість індексу i або n слід писати трійку n,ν,i. Використання у викладках одного із вказаних індексів здійснено з метою їх спрощення та у випадках, коли це не призводить до непорозумінь.

Легко показати, що

$$(D^{[\nu]})^+ \vec{C}_i^{(0)} = \vec{0}, \tag{26}$$

тобто виконуються умови ортогональності (22), що обумовлює вибір розв'язку системи (19) у формі (25).

4. Збіжність FD-методу

Перейдемо до відшукання оцінок похибок методу. Беручи до уваги (23), (26), із (25) отримаємо

$$||\vec{C}_i^{(j)}||_R \le w \cdot \sum_{p=0}^{j-1} ||\hat{u}_i^{(j-p)}||\ ||\vec{C}_i^{(p)}||_R, \tag{27}$$

де

$$w = ||\varphi(B)||\,||(D^{[\nu]})^+||_R \left(||f_n^{(0)}||_* + |\langle \vec{f} \rangle| \right),$$

$$\left| \left\langle \vec{f} \right\rangle \right| = \left(\sum_{s=1}^{k_n} ||f_s||_*^2 \right)^{\frac{1}{2}},\ ||\vec{a}||_R = (\vec{a},\vec{a})_R\,.$$

Із (15), (16) одержуємо оцінки

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{u}_n^{(j+1)}|| \le M_n \left\{ \sum_{s=0}^{j} ||\tilde{u}_n^{(j-s)}||\,||\tilde{u}_n^{(s)}|| + ||\vec{C}_n^{(j)}||_R \right\}, \\
&||\varphi(B)\tilde{u}_n^{(j+1)}|| \le N_n \left\{ \sum_{s=0}^{j} ||\tilde{u}_n^{(j-s)}||\,||\tilde{u}_n^{(s)}|| + ||\vec{C}_n^{(j)}||_R \right\},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

де

$$
M_n = \max\left\{ ||\varphi(B)||\,||\Gamma_n^+||\,||f_n^{(0)}||_*\,,\ ||\Gamma_n^+\varphi(B)||k_n \right\},
$$

$$
N_n = \max\left\{ ||\varphi(B)||\,||\varphi(B)\Gamma_n^+||\,||f_n^{(0)}||_*,\ ||\varphi(B)\Gamma_n^+\varphi(B)||k_n \right\},
$$

$$
\tilde{u}_i^{(s)} = \begin{cases} \hat{u}_i^{(s)},\ s \ge 1, \\ u_i^{(0)},\ s = 0. \end{cases}
$$

Тут використано оцінку

$$
||u_i^{(j+1)}|| \ \le ||\hat{u}_i^{(j+1)}|| + ||\vec{C}_i^{(j+1)}||_R,\ \ j = 0, 1, ... \tag{29}
$$

Ввівши позначення

$$
\begin{gathered}
u_{j+1} = ||\tilde{u}_n^{(j+1)}||, v_{j+1} = ||\varphi(B)\tilde{u}_n^{(j+1)}||, c_{j+1} = ||\vec{C}_n^{(j+1)}||_R, j = 0, 1, ..., \\
c_0 = 1,\ \ u_0 = ||u_n^{(0)}||,
\end{gathered}
\tag{30}
$$

перепишемо рекурентну систему нерівностей (27), (28) у формі

$$
\begin{aligned}
&c_{j+1} \le w \sum_{p=0}^{j} u_{j-p} c_p, \\
&u_{j+1} \le M_n \left\{ \sum_{s=0}^{j} u_{j-s} u_s + c_j \right\}, \\
&v_{j+1} \le N_n \left\{ \sum_{s=0}^{j} u_{j-s} u_s + c_j \right\},\ \ j = 0, 1, ...
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Далі замінимо знаки нерівностей на рівності і одержимо мажорантну для (31) систему рекурентних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&C_{j+1}=w\sum_{p=0}^{j}U_{j-p}C_p,\\
&U_{j+1}=M_n\left\{\sum_{s=0}^{j}U_{j-s}U_s+C_j\right\},\\
&V_{j+1}=N_n\left\{\sum_{s=0}^{j}U_{j-s}U_s+C_j\right\},\ \ j=0,1,...,\\
&\qquad C_0=1,\ U_0=\left\|u_n^{(0)}\right\|,
\end{aligned}
$$

тобто $c_j \le C_j$, $u_j \le U_j$, $v_j \le V_j$, $j=0,1,...$ Враховуючи співвідношення

$$N_nU_{j+1}=M_nV_{j+1}, \tag{32}$$

з першого та другого рівнянь отримуємо

$$
\begin{gathered}
C_{j+1}=w\sum_{p=0}^{j}U_{j-p}C_p,\quad U_{j+1}=M_n\left\{\sum_{s=0}^{j}U_{j-s}U_s+C_j\right\},\quad j=0,1,...,\\
C_0=1,\quad U_0=||u_n^{(0)}||.
\end{gathered}
$$

Ввівши нові змінні та нові мажорантні змінні

$$M_n^{-j}U_j=\tilde U_j,\quad M_n^{-j}C_j=\tilde C_j, \tag{33}$$

перейдемо до нової мажорантної системи

$$
\begin{gathered}
\tilde C_{j+1}=w\sum_{p=0}^{j}\tilde U_{j-p}\tilde C_p,\quad \tilde U_{j+1}=\sum_{s=0}^{j}\tilde U_{j-s}\tilde U_s+\tilde C_j,\quad j=0,1,...,\\
\tilde C_0=1,\quad \tilde U_0=||u_n^{(0)}||.
\end{gathered} \tag{34}
$$

Для того, щоб розв'язати (34), введемо такі твірні функції:

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\tilde U_j\ ,\ \ g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\tilde C_j.$$

Виходячи з (34), отримаємо систему рівнянь

$$f(z)-U_0=z\left[f^2(z)+g(z)\right],\ \ g(z)-1=w\left[f(z)-U_0\right]g(z). \tag{35}$$

Виразивши з другого рівняння $g(z) = 1/\{1 - w\,[f(z) - U_0]\}$ та підставивши цей вираз в перше, отримаємо

$$-\,zwf^3(z) + (w + z + zwU_0)f^2(z) - (zwU_0 + 1)f(z) + \\ + (wU_0^2 + U_0 + z) = 0. \quad (36)$$

Поміняємо у рівнянні (36) місцями залежну і незалежну змінні, тобто будемо розглядати z як функцію від f:

$$z(f) = \frac{w(f - U_0)\left(f - \frac{wU_0+1}{w}\right)}{w\,f^2\left(f - \frac{wU_0+1}{w}\right) - 1}. \quad (37)$$

Аналіз функції (37) показує, що

$$z(U_0) = z\left(\frac{wU_0 + 1}{w}\right) = 0; \qquad z(f) > 0 \ \ \forall f \in \left(U_0, \frac{wU_0 + 1}{w}\right);$$

$$z'(U_0) = \frac{1}{(U_0)^2 + 1} > 0, \quad z'\left(\frac{w\,U_0 + 1}{w}\right) = -1 < 0.$$

Звідси робимо висновок про те, що існує таке $z_{\max} = z(f_{\max})$, $f_{\max} \in \left(U_0, \frac{wU_0+1}{w}\right)$, яке є радіусом збіжності ряду $f(z)$, а отже, існують такі додатні сталі L, ε, які не залежать від j, n, що виконується наступне:

$$(z_{\max})^j\,\tilde{U}_j \le \frac{L}{j^{1+\varepsilon}}, \ j = 1, 2, ... \quad (38)$$

Враховуючи (38), для $z \ge 0$ отримуємо

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j\,||\tilde{u}_i^{(j)}|| \le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_{\max}} M_n\right)^j \tilde{U}_j\,(z_{\max})^j \le \\ \le 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_{\max}} M_n\right)^j \frac{L}{j^{1+\varepsilon}}. \quad (39)$$

Нехай виконується умова

$$q_n = \frac{M_n}{z_{\max}} < 1, \quad (40)$$

тоді нерівність (39) буде вірною $\forall z \in [0, 1]$, а отже, буде вірною нерівність

$$||\tilde{u}_i^{(j)}|| \le \frac{L\,[q_n]^j}{j^{1+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2, ... \quad (41)$$

Із (27) та (41) отримуємо наступну рекурентну систему нерівностей:

$$||\vec{C}_n^{(j)}||_R \leq wL \sum_{p=0}^{j-1} [q_n]^{j-p} \, ||\vec{C}_n^{(p)}||_R, \; j = 1, 2, ...,$$

розв'язок якої мажорується розв'язком такої системи рівнянь:

$$C_j = wL \sum_{p=0}^{j-1} [q_n]^{j-p} \, C_p, \quad j = 1, 2, ..., \; C_0 = 1, \quad ||\vec{C}_n^{(j)}||_R \leq C_j.$$

Використовуючи метод твірних функцій, отримуємо

$$g(z) = \frac{1}{1 - 2wL(\tilde{f}(z) - 1)}, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \, [q_n]^j \, .$$

Із розкладу функції $g(z)$ в ряд Тейлора $\tilde{g}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \tilde{C}_j$, $C_j \leq \tilde{C}_j$ випливає, що

$$\tilde{C}_j = \frac{wL}{1 + wL} \, [q_n(1 + wL)]^j \, .$$

Цей ряд збігається $\forall z \in [0, 1]$ за умови, що

$$q_n(1 + wL) < 1. \tag{42}$$

Теорема 4.1 ([11]). *Нехай виконуються умови* (40), (42). *Тоді FD-метод для задачі* (1) *є експоненціально збіжним для власних векторів та суперекспоненціально збіжним для власних значень з такими оцінками його точності:*

$$\|u_{n,i} - \overset{N}{u}_{n,i}\| \leq L \, [wk_n + 1] \, \frac{[q_n(1 + wL)]^{N+1}}{1 - q_n(1 + wL)}, \tag{43}$$

$$|\lambda_{n,i} - \overset{N}{\lambda}_{n,i}| \leq \frac{L \, \|\varphi(B)\| \, \|f_n^{(0)}\|_* \, [q_n]^N}{(N + 1)^{1+\varepsilon}(1 - q_n)}. \tag{44}$$

Тут $i = \overline{1, k_n}$.

Оцінка для власних векторів (43) в теоремі 4.1 може бути покращена. З цією метою подібно до (36) записуємо рівняння для твірної функції $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \tilde{C}_j$

$$g(z) = \frac{1}{1 - wz\left(\frac{(g(z)(U_0 w + 1) - 1)^2}{w^2 g^2(z)} + g(z)\right)}, \tag{45}$$

де $c_j = ||\vec{C}_n^{(j)}||_R \leq C_j = M_n^j\tilde{C}_j$, $j = 0,1,2,...$, $c_0 = C_0 = \tilde{C}_0 = 1$, і розв'язуємо відносно z, тобто запишемо z як функцію від g

$$z(g) = \frac{wg\,(g-1)}{g^3w^2 + \left(g\,(U_0w+1)-1\right)^2}. \tag{46}$$

Для дослідження функції $z(g)$ знаходимо

$$z'(g) = -\frac{w(w^2g^2((g-1)^2 - 1 - (U_0)^2) + (g-1)^2)}{[g^3w^2 + (g(U_0w+1)-1)^2]^2}. \tag{47}$$

З аналізу (46), (47) робимо висновок, що

$$z(g) > 0 \;\forall\, g \in (1,\infty);\;\; z(1) = 0,\;\;\; z(\infty) = 0;\;\; z'(1) = \frac{1}{w((U_0)^2+1)} > 0,$$

$$z'\left(1+\sqrt{(U_0)^2+1}\right) = \\ = -\frac{w((U_0)^2+1)}{\left[\left(1+\sqrt{(U_0)^2+1}\right)^3 w^2 + \left((1+\sqrt{(U_0)^2+1})(U_0w+1)-1\right)^2\right]^2} < 0,$$

і, отже, існує таке $g_{\max} \in \left(1, 1+\sqrt{(U_0)^2+1}\right)$, при якому функція $z(g)$ досягає свого максимума

$$z_{1,\max} = \max_{g\in\left[1,1+\sqrt{(U_0)^2+1}\right]} z(g) = z(g_{\max}),$$

який є радіусом збіжності ряду $g(z)$ і який співпадає із радіусом збіжності ряду $f(z)$, тобто $z_{1,\max} = z_{\max}$. Тоді при виконанні умови (40) існують такі додатні сталі L_1, ε_1, які не залежать від j, n, що виконується нерівність

$$(z_{\max})^j\,\tilde{C}_j \leq \frac{L_1}{j^{1+\varepsilon_1}},\; j = 1,2,... \tag{48}$$

Враховуючи (48), введені вище позначення та заміни (30), (33), для $z \geq 0$ отримуємо

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j\|\vec{C}_n^{(j)}\|_R \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_{\max}}M_n\right)^j \tilde{C}_j(z_{\max})^j \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_{\max}}M_n\right)^j \frac{L_1}{j^{1+\varepsilon_1}},$$

яка буде вірною $\forall z \in [0,1]$ при виконанні умови (40), а отже, буде вірною нерівність

$$\|\vec{C}_n^{(j)}\|_R \leq \frac{L_1\,[q_n]^j}{j^{1+\varepsilon_1}},\ j=1,2,... \tag{49}$$

З нерівностей (29), (41) та (49) випливає оцінка

$$||u_{n,i}^{(j)}|| \leq \frac{2\bar{L}[q_n]^j}{j^{1+\bar{\varepsilon}}},\ j=1,2,...,\quad \bar{L}=\max(L,L_1),\quad \bar{\varepsilon}=\min(\varepsilon,\varepsilon_1). \tag{50}$$

Таким чином, посилено оцінку (43) та доведено наступну теорему, яка є головним результатом даної роботи.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (40). *Тоді FD-метод для задачі* (1) *є суперекспоненціально збіжним як для власних значень з оцінкою його точності* (44), *так і для власних векторів з наступною оцінкою його точності:*

$$\|u_{n,i} - \overset{N}{u}_{n,i}\| \leq 2\bar{L}\,\frac{[q_n]^{N+1}}{(N+1)^{1+\bar{\varepsilon}}(1-q_n)},\quad i=\overline{1,k_n}. \tag{51}$$

5. Застосування FD-методу до задач Штурма-Ліувілля з матричним потенціалом

В роботах [23, 24] для скалярних задач Штурма-Ліувілля з рівнянням Шрьодінгера з поліноміальним потенціалом $q(x)$ у гільбертовому просторі та крайовими умовами Діріхле (53) і Діріхле-Неймана (54)

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (\lambda - q(x))\,u(x) = 0,\ \ q(x) = \sum_{l=0}^{r} c_l x^l,\quad x \in (0,1), \tag{52}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{53}$$

$$u(0) = u'(1) = 0 \tag{54}$$

доведено теореми, які об'єднано в наступній теоремі.

Теорема 5.3 (див. [23, 24]). *Справедливими є такі структурні зображення розв'язків рекурентних задач згідно з* FD-*методом (з вибором* $\bar{q}(x) \equiv 0$*) для задач* (52), (53) *та* (52), (54)

$$u_n^{(0)}(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(0)}}x\right), a_0^{(0)} = \sqrt{2}, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} u_n^{(2j-1)}(x) = &\sum_{p=1}^{(2j-1)(r+1)} b_p^{(2j-1)} x^p \cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(0)}}x\right) + \\ &+ \sum_{p=0}^{(2j-1)(r+1)-1} a_p^{(2j-1)} x^p \sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(0)}}x\right), \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} u_n^{(2j)}(x) = &\sum_{p=1}^{2j(r+1)-1} b_p^{(2j)} x^p \cos\left(\sqrt{\lambda_n^{(0)}}x\right) + \\ &+ \sum_{p=0}^{2j(r+1)} a_p^{(2j)} x^p \sin\left(\sqrt{\lambda_n^{(0)}}x\right), \\ &j = 1,\ 2,\ ..., \end{aligned} \tag{57}$$

де (55) *з* $\lambda_n^{(0)} = (\pi n)^2$ *або* (55) *з* $\lambda_n^{(0)} = \pi^2(n-1/2)^2$ *– розв'язки базових задач для* (52), (53) *та* (52), (54) *відповідно, коефіцієнти* $b_p^{(2j-1)}$, $(p = \overline{1,(2j-1)(r+1)})$, $a_p^{(2j-1)}$, $(p = \overline{1,(2j-1)(r+1)-1})$, $b_p^{(2j)}$, $(p = \overline{1,2j(r+1)-1})$, $a_p^{(2j)}$, $(p = \overline{1,2j(r+1)})$, $j = 1,\ 2,\ ...$ *залежать від* r, c_l $(l = \overline{0,r})$, j, $\lambda_n^{(0)}$.

Ці теореми природнім чином узагальнюються на випадок задачі Штурма-Ліувілля із симетричним матричним потенціалом, в якому кожен елемент є поліномом деякого степеня. Проілюструємо це на наступному прикладі, в якому також наведено результати обчислень, які стосуються суперекспоненціальної збіжності (згідно з теоремами 4.1, 4.2) запропонованого в [11] алгоритму FD-методу .

Приклад 5.1. Розглянемо одновимірну по простору векторно-матричну задачу Штурма-Ліувілля з крайовими умовами Діріхле на відрізку $(0,1)$, тобто задачу (1), в якій оператори A, B визначені наступним чином:

$$D(A) = \left\{v \in C^2[0,1] : v(0) = v(1) = 0\right\},\ Av = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad \forall v \in D(A),$$

$$D(B) = L_2(0,1), \quad Bv = Q(x)\,v(x),$$

$$Q(x) = (1/2 - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1/2-x)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ (1/2-x)^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in (0,1).$$

В таблиці 1 наведено трійки власних значень $\lambda_{n,l}^{ex}$, $l = \overline{1,3}$, $n = \overline{1,4,8}$, отримані за допомогою методу стрільби з використанням методу Гіра для інтегрування відповідних задач Коші. Обчислення здійснені за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 17 (з Digits=128, maxord=11, abserr=10^{-36}, relerr=10^{-24}).

За допомогою реалізованого в пакеті MATSCS в Matlab методу CPM$\{10,8\}$ (див. [18]) знайдено власні значення E_k в режимі обчислень з подвійною точністю та допустимим відхиленням $tol = 10^{-15}$. Деякі з них при $k = \overline{0,11}$ та $k = \overline{21,23}$ разом з похибками обчислень ΔE_k наведені в таблиці 1. Кількість інтервалів розбиття «основної» сітки $nint = 25$. Як видно з таблиці 1, вже при невеликих номерах k власні значення в трійках співпадають, а саме $E_3 = E_4$, $E_6 = E_7$, $E_{3t} = E_{3t+1} = E_{3t+2}$, $t >= 3$. Це зумовлено близькістю власних значень в трійках та використанням розбиття відрізку, яке генерується на початку виконання алгоритму CPM-методу, для обчислення всіх власних значень.

Застосуємо найпростіший варіант FD-методу, коли $\bar{B}$=0. Псевдообернений оператор Мура-Пенроуза Γ^+ має вигляд:

$$\Gamma^+ v = (g_n(x,\cdot), v_n(\cdot)) = \int_0^1 g_n(x,\xi) v_n(\xi) d\xi,$$

$$g_n(x,\xi) = \frac{1}{4\pi^2 n^2}(\cos(n\pi(x+\xi)) - \cos(n\pi(x-\xi))) - \frac{1}{2\pi n}(\sin(n\pi(x+\xi)) \times \\ \times (1 - x - \xi) - \sin(n\pi|x-\xi|)(1 - |x-\xi|)),$$

де $g_n(x,\xi)$ – узагальнена функція Гріна. В цьому випадку кожне власне значення $\lambda_n^{(0)} = (n\pi)^2$ базової задачі є трикратним і йому відповідає система власних векторів $e_{n,m}(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)|[\delta_{m,s}]|_{s=\overline{1,3}}$, $m = \overline{1,3}$. Загальними розв'язками базової задачі є власні вектори $u_{n,p}^{(0)}(x) = \sum_{m=1}^{3} C_{n,p,m}^{(0)} e_{n,m}(x)$, $p = \overline{1,3}$. FD-метод в даному прикладі є *таким, що точно реалізується.* При цьому $\lambda_{n,l}^{(2j-1)} = 0$, $l = \overline{1,3}$, $j = 1,2,\ldots$ Поправки $\lambda_{n,l}^{(2j)}$, $l = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$ та $u_{n,l}^{(1)}(x)$, $u_{n,l}^{(2j)}(x)$, $u_{n,l}^{(2j+1)}(x)$, $l = \overline{1,3}$, $j = 1,2$ знайдено в аналітичній формі, яка дає

Таблиця 1. Власні значення $\lambda_{n,l}^{ex}$, $l=\overline{1,3}$, $n=\overline{1,4},8$ та E_k, $k=\overline{0,11}$, $\overline{21,23}$, обчислені за допомогою методу стрільби та методу CPM$\{10,8\}$ відповідно.

n	l	$\lambda_{n,l}^{ex}$	k	E_k	ΔE_k
1	1	9.8630058979914519472572l4	0	9.86300589799145	+3.55e-015
	2	9.868665687828881068818954	1	9.86866568782887	+2.19e-015
	3	9.869448153557578352854274	2	9.86944815355757	+2.19e-015
2	1	39.478475053095933298873 86	3	39.4784750530959	+8.77e-015
	2	39.478759053076397098872 13	4	39.4784750530959	+8.77e-015
	3	39.480297738154111288578 33	5	39.4802977381541	-1.42e-014
3	1	88.826466678974911712796 17	6	88.8264666789749	+1.97e-014
	2	88.826604316096010297188 87	7	88.8264666789749	+1.97e-014
	3	88.827612964739855126060 48	8	88.8276129647398	+2.84e-014
4	1	157.91368583767001681330 47	9	157.913685837670	+3.51e-014
	2	157.91376472740372425506 64	10	157.913685837670	+3.51e-014
	3	157.91439921069112885408 09	11	157.913685837670	+3.51e-014
8	1	631.65468556421995432690 33	21	631.654685564219	+1.40e-013
	2	631.65470555605932586332 51	22	631.654685564219	+1.40e-013
	3	631.65488074323492980444 69	23	631.654685564219	+1.40e-013

можливість проаналізувати їх залежність від номера n трійки власних значень. Завдяки цьому при використанні FD-методу вдається уникнути наведених вище труднощів, які виникають при обчисленнях за допомогою методу CPM$\{10,8\}$. Для прикладу наведемо декілька перших поправок до власних значень з номером $l=2$ в трійці

$$\lambda_{n,2}^{(2)} = \frac{407}{26880\pi^2 n^2} - \frac{41}{1280 n^4 \pi^4} - \frac{69}{64\pi^6 n^6} - \frac{621}{64\pi^8 n^8},$$

$$\lambda_{n,2}^{(4)} = \frac{1}{2048\pi^6 n^6}\left(\frac{3505027}{10090080} - \frac{175217}{13200\pi^2 n^2} - \frac{1780713}{1400\pi^4 n^4} - \frac{1058901}{20\pi^6 n^6} - \right.$$
$$\left. - \frac{1315017}{\pi^8 n^8} - \frac{10777887}{\pi^{10} n^{10}} + \frac{298392093}{\pi^{12} n^{12}}\right),$$

$$\lambda_{n,2}^{(6)} = \frac{1}{262144\pi^{10} n^{10}}\left(\frac{1667581358327}{1140683544000} - \frac{12287385727}{51979200\pi^2 n^2} - \frac{152354952053}{3234000\pi^4 n^4}\right.$$
$$- \frac{12586852796619}{2802800\pi^6 n^6} - \frac{8906760196623}{30800\pi^8 n^8} - \frac{31079098729737}{2800\pi^{10} n^{10}} + \frac{4638985272207}{140\pi^{12} n^{12}}$$
$$\left. + \frac{627884964879723}{20\pi^{14} n^{14}} + \frac{1232333454333699}{\pi^{16} n^{16}} - \frac{15115583818323711}{\pi^{18} n^{18}}\right)$$

Таблиця 2. Збіжність FD-методу відносно власних значень $\lambda_{n,l}, l=\overline{1,3}$ з номерами $n=\overline{1,4},8$.

n	j	$\lvert\lambda_{n,1}^{(j)}\rvert$	$\Delta_{n,1}(j)$	$\lvert\lambda_{n,2}^{(j)}\rvert$	$\Delta_{n,2}(j)$	$\lvert\lambda_{n,3}^{(j)}\rvert$	$\Delta_{n,3}(j)$
1	0	9.870	6.6e-3	9.870	9.4e-4	9.870	1.6e-4
	2	6.599e-3	7.8e-7	9.387e-4	1.8e-8	1.562e-4	5.0e-10
	4	7.877e-7	2.3e-10	1.778e-8	7.9e-13	4.995e-10	3.7e-15
	6	2.301e-10	8.7e-14	7.916e-13	4.9e-17	3.746e-15	1.4e-18
2	0	39.48	5.7e-5	39.48	3.4e-4	39.48	1.9e-3
	2	5.745e-5	6.8e-10	3.415e-4	1.7e-8	1.881e-3	7.6e-7
	4	6.796e-10	2.2e-14	1.778e-8	8.0e-13	7.567e-7	2.3e-10
	6	2.125e-14	1.2e-15	8.050e-13	4.5e-17	2.329e-10	4.4e-14
3	0	88.83	2.7e-5	88.83	1.6e-4	88.83	1.2e-3
	2	2.707e-5	3.5e-12	1.647e-4	4.3e-11	1.173e-3	3.0e-8
	4	3.477e-12	3.1e-16	4.269e-11	1.3e-14	2.968e-8	2.7e-12
	6	3.314e-16	2.4e-17	1.322e-14	8.5e-20	2.710e-12	9.2e-16
4	0	157.9	1.5e-5	157.9	9.4e-5	157.9	7.3e-4
	2	1.542e-5	3.3e-12	9.431e-5	2.4e-11	7.288e-4	1.6e-9
	4	3.334e-12	5.9e-17	2.438e-11	1.4e-16	1.604e-9	1.6e-13
	6	6.218e-17	2.8e-18	1.408e-16	1.2e-19	1.635e-13	5.9e-17
8	0	631.8	3.9e-6	631.8	2.4e-5	631.8	2.0e-4
	2	3.895e-6	2.4e-13	2.389e-5	6.3e-13	1.991e-4	4.4e-11
	4	2.373e-13	8.5e-19	6.257e-13	2.8e-20	4.364e-11	2.1e-17
	6	8.430e-19	1.1e-20	3.603e-20	7.7e-21	2.111e-17	1.2e-19

та декілька перших відповідних поправок до власних векторів, які ілюструють узагальнення наведеної вище теореми 5.3 на випадок матричного потенціалу

$$u_{n,2}^{(j)}(x)=\left[u_{n,2}^{(j)}[1](x),\ \ 0,\ \ -u_{n,2}^{(j)}[1](x)\right]^T,\quad j=\overline{0,5},$$

де

$$u_{n,2}^{(0)}[1](x)=-\sin(\pi n x),$$

$$u_{n,2}^{(1)}[1](x)=\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2\pi^2n^2}\right)x-\frac{3}{8}-\frac{3}{4\pi^2n^2}\right)\frac{\sin(\pi n x)}{4\pi^2n^2}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}x^4-x^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2n^2\pi^2}\right)x^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2n^2\pi^2}\right)x\right)\frac{\cos(\pi n x)}{4\pi n},$$

$$u_{n,2}^{(2)}[1](x)=\left(\frac{1}{4}x^8-x^7+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{2\pi^2n^2}\right)x^6+\left(\frac{5}{4}+\frac{39}{2\pi^2n^2}\right)x^5-\left(\frac{23}{16}+\right.\right.$$

Таблиця 3. Збіжність FD-методу відносно власних векторів $u_{n,l}(x), l = \overline{1,3}$ з номерами $n = \overline{1,4}, 8$.

n	j	$\|\|u_{n,1}^{(2j)}\|\|$	$\|\|u_{n,1}^{(2j+1)}\|\|$	$\|\|u_{n,2}^{(2j)}\|\|$	$\|\|u_{n,2}^{(2j+1)}\|\|$	$\|\|u_{n,3}^{(2j)}\|\|$	$\|\|u_{n,3}^{(2j+1)}\|\|$
1	0	0.9866	1.470e-2	1	5.627e-3	1.013	2.321e-3
	1	9.206e-5	1.901e-6	1.238e-5	1.109e-7	2.047e-6	7.881e-9
	2	1.669e-8	5.421e-10	3.551e-10	4.859e-12	1.193e-11	5.882e-14
2	0	0.9931	4.284e-3	1	9.082e-3	1.007	2.399e-2
	1	3.174e-6	8.340e-8	4.930e-6	7.680e-8	4.432e-5	1.210e-6
	2	5.267e-10	1.193e-11	8.545e-11	3.647e-12	5.531e-9	3.866e-10
3	0	1.013	2.257e-3	1	5.196e-3	0.9865	1.431e-2
	1	1.215e-6	4.844e-9	9.786e-6	2.256e-8	6.936e-5	4.525e-7
	2	5.890e-11	3.679e-13	2.922-11	8.743e-14	1.448e-9	1.288e-11
4	0	1.019	1.825e-3	1	4.399e-3	0.9803	1.205e-2
	1	1.007e-6	4.799e-9	3.731e-6	1.145e-8	2.845e-5	2.509e-7
	2	2.246e-11	1.203e-13	1.245-11	3.626e-14	7.380e-10	6.149e-12
8	0	1.025	8.794e-4	1	2.182e-3	0.9746	6.028e-3
	1	2.565e-7	6.189e-10	1.142e-6	1.301e-9	9.103e-6	3.037e-8
	2	1.674e-12	3.470e-15	1.041-12	1.076e-15	4.756e-11	2.131e-13

$$+\frac{11}{\pi^2 n^2}-\frac{207}{4\pi^4 n^4}\Bigg)x^4-\left(\frac{3}{8}+\frac{21}{2\pi^2 n^2}+\frac{207}{2\pi^4 n^4}\right)x^3+\Bigg(\frac{9}{16}+\frac{121}{16\pi^2 n^2}+$$

$$+\frac{69}{2\pi^4 n^4}-\frac{621}{4\pi^6 n^6}\Bigg)x^2+\left(\frac{15}{16\pi^2 n^2}+\frac{69}{4\pi^4 n^4}+\frac{621}{4\pi^6 n^6}\right)x-\frac{247}{10080}-$$

$$-\frac{1633}{3360\pi^2 n^2}-\frac{931}{160\pi^4 n^4}-\frac{501}{8\pi^6 n^6}-\frac{3879}{8\pi^8 n^8}\Bigg)\frac{\sin(\pi n x)}{32\pi^2 n^2}+\Bigg(\frac{11}{7}x^7-\frac{11}{2}x^6+$$

$$+\left(\frac{73}{20}-\frac{207}{10\pi^2 n^2}\right)x^5+\left(\frac{37}{8}+\frac{207}{4\pi^2 n^2}\right)x^4-\left(\frac{103}{24}+\frac{23}{\pi^2 n^2}-\frac{207}{2\pi^4 n^4}\right)x^3-$$

$$-\left(\frac{15}{16}+\frac{69}{4\pi^2 n^2}+\frac{621}{4\pi^4 n^4}\right)x^2+\left(\frac{1483}{1680}+\frac{46}{5\pi^2 n^2}+\frac{207}{4\pi^4 n^4}\right)x\Bigg)\frac{\cos(\pi n x)}{32\pi^3 n^3}.$$

Аналітичні перетворення та чисельні розрахунки згідно з FD-методом здійснювались за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple 17 (з Digits=128). Поправки до власних значень по абсолютній величині та абсолютні похибки наближень FD-методу $\Delta_{n,l}(N) = |\lambda_{n,l}^{ex} - \overset{N}{\lambda}_{n,l}|$ рангу $N = 0, 2, 4, 6$ до власних значень $\lambda_{n,l}^{ex}, l = \overline{1,3}$ з номерами $n = \overline{1,4}, 8$ наведені в таблиці 2. В таблиці 3 наведено норми поправок до власних векторів $u_{n,l}^{(j)}(x)$, $l = 1, 2, 3$, $j = \overline{0,5}$ з номерами

$n = \overline{1,4}, 8$:

$$||u_{n,l}^{(j)}|| = \max\left\{\max_{x\in[0,1]}|u_{n,l}^{(j)}[1](x)|, \max_{x\in[0,1]}|u_{n,l}^{(j)}[2](x)|, \max_{x\in[0,1]}|u_{n,l}^{(j)}[3](x)|\right\}.$$

Як видно з таблиць 2, 3, чисельні розрахунки ілюструють доведені теореми 4.1, 4.2 (див. оцінки (44), (51)) щодо суперекспоненціальної швидкості збіжності запропонованого алгоритму FD-методу як відносно власних значень, так і відносно власних векторів.

[1] *Allgower E. L., Georg K.* Introduction to Numerical Continuation Methods. – Colorado State University, Colorado, 1990. – P. 397.

[2] *Armstrong M. A.* Basic Topology. – Springer-Verlag New York Inc., 1983. – P. XII+251.

[3] *Bandyrskii B. I., Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L.* Functional-discrete method (FD-method) for matrix Sturm-Liouville problems // CMAM. – 2005. – **5**, 4. – P. 362–386.

[4] *Bogoliouboff N. N., Kryloff N. M.* Sopra il metodo dei coefficienti constanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della fisica matematica // Boll. Unione mat. ital. – 1928. – **7**, 2. – P. 72–77.

[5] *Dähnn J.* Anwendung eines direkten Verfahrens zur numerischen Behandlung von selbstadjungierten, positiv definiten Eigenwertaufgaben bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit stückweise stetigen Koeffizientenfunktionen // ZAMM – J. Appl. Math. & Mech. — 1982. — **62**, 12. — P. 687–695.

[6] *El-Daou M. K.* Exponentially weighted Legendre–Gauss Tau methods for linear second-order differential equations // Comp. & Math. Appl. — July 2011. — **62**, 1. — P. 51-–64.

[7] *El-Daou M. K., Al-Matar N. R.* An improved Tau method for a class of Sturm–Liouville problems // Appl. Math. & Comp. — June 2010. — **216**, 7. — P. 1923–1937.

[8] *Dwyer H. I., Zettl A.* Eigenvalue Computations for Regular Matrix Sturm-Liouville Problems [Електронний ресурс] // El. J. Diff. Eq. — 1995. — **1995**, 05. — P. 1–13. — Режим доступу: http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/1995/05/Dwyer.pdf (дата звернення: 05.09.15).

[9] *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems in Hilbert spaces // Intern. conf. «Diff. eq. & appl. (DETA 2009)» [ed. V. Kleiza, S. Rutkauskas, A. Stikonas], September 10-12, 2009, Panevezys, Lithuania, Kaunas university of technology Panevezys institute, Vilnius university, Institute of mathematics and informatics. – Kaunas, Technologija, 2009. — P. 86–92.

[10] *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Popov A. M.* Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ODE's // J. Numer. & Appl. Math. — 2010. — **100**, 1. — P. 60–81.

[11] *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L., Romaniuk N. M.* Super-exponentially convergent algorithm for an abstract eigenvalue problem with applications to ODEs // Nonl. Osc. — 2015. — **18**, 3. — P. 332–356.

[12] *Gordon R. G.* New Method for Constructing Wave functions for Bound States and Scattering // J. Chem. Phys.— May 1969. — **51**, 1. — P. 14–25.

[13] *He J.-H.* Homotopy perturbation technique // Comp. Methods Appl. Mech. & Eng. — August 1999. — **178**, 3–4. — P. 257—262.

[14] *Liao Sh.* The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems: Ph.D. Thesis; Shanghai Jiao Tong Univ., 1992.

[15] *Pruess S.* Estimating the eigenvalues of Sturm-Liouville problems by approximating the differential equation // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, 1. — P. 55–68.

[16] *Pryce J. D.* Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems. — Oxford, New York, Tokyo: Clarendon Press, 1993. — P. 323.

[17] *Rach R.* A bibliography of the theory and applications of the Adomian decomposition method, 1961–2011 [Електронний ресурс]. — Kybernetes, 2012. — **41**, 7/8. — Режим доступу: http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/k.2012.06741gaa.007 (дата звернення: 31.08.2015), DOI: 10.1108/k.2012.06741gaa.007.

[18] Universiteit Gent. Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek. Onderzoek. Numerical Mathematics. The numerical solutions of Sturm-Liouville and Schrödinger equations. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://www.twist.ugent.be/index.php?page=onderzoek&ot=SLsoftware (дата звернення: 05.09.15).

[19] *Zhang Zhimin.* How Many Numerical Eigenvalues Can We Trust? // Springer US, J. Sci. Comp. — 2015, First online: 23 December 2014. — **65**, 2. — P. 455–466.

[20] *Бандирський Б. Й., Макаров В. Л., Уханьов О. Л.* FD-метод для задач Штурма-Ліувілля. Експоненційна швидкість збіжності // Ж. обч. прикл. матем. — 2000. — **1**, 85. — С. 1–60.

[21] *Василик В. Б., Драгунов Д. В., Ситник Д. О.* Функціонально-дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування. – К.: Наук. думка, 2011. — С. 176.

[22] *Макаров В. Л.* О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами // ДАН СССР.— 1991.— **320**, 1. — С. 34-39.

[23] *Макаров В. Л., Романюк Н. М.* Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма-Ліувілля // Доп. НАН України. — 2014. — № 2. — С. 26—31.

[24] *Макаров В. Л., Романюк Н. Н.* Новая реализация FD-метода для случая задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле-Неймана // Тр. Ин-та матем. НАН Белар. — 2014. — **22**, 1. — С. 98–106.

[25] *Макаров В. Л., Романюк Н. М.* FD-метод для задачі на власні значення в гільбертовому просторі з кратними власними значеннями базової задачі в особливому випадку // Доп. НАН України. — 2015. — № 5. — С. 26–35.

[26] *Макаров В. Л., Романюк Н. М., Лазурчак І. І.* FD-метод для задачі на власні значення з кратними власними значеннями базової задачі // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України, 2014. — **11**, 4. — С. 239–265.