Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 204–213

УДК 517.927

В. А. Михайлець, В. В. Новіков

(Інститут математики НАН України, Київ)

Принципи локалізації для одновимірного оператора Шрьодінгера з потенціалом-розподілом

mikhailets@imath.kiev.ua, vnovicov@kairosplanet.com

In the paper, we investigate the spectrum of Shrodinger' operator L with distribution potential from the space $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. We obtain a generalization of Ismagilov's principles of localizations which gives necessary and sufficient conditions for the spectrum of the operator L to be bounded from below and discrete.

В роботі досліджується спектр оператора Шрьодінгера L з потенціалом, що є розподілом з класу $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Отримано узагальнення принципів локалізації Ісмагілова, що дають необхідні та достатні умови обмеженості знизу та дискретності спектра оператора L.

1. Вступ та основні результати

Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y'' + q(t)y,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Якщо функція $q \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то з диференціальним виразом (1) можна пов'язати в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ предмінімальний оператор L'. Цей оператор заданий на щільній в просторі $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ множині

$$D(L') := C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Легко перевірити, що цей оператор є симетричний і тому допускає замикання до мінімального оператора $\tilde{L}$. Спряжений до оператора $L'(\tilde{L})$ максимальний диференціальний оператор L заданий на щільній в гільбертовому просторі множині

$$D(L) := \{y \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) | y,\ y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ l[y] \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})\},$$

де $AC_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ — простір локально абсолютно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

Теорія таких операторів, зокрема спектральна, добре розвинена (див., наприклад, [1, 2]). Зокрема відомо, що обмеженість знизу оператора L' тягне за собою самоспряженість оператора $\tilde{L}$, тобто рівність $\tilde{L} = L$. Тому природно постає питання про спектр оператора L, зокрема умови його дискретності, коли неперервна частина спектра $C(L)$ є порожньою множиною. Це питання досліджено досить повно (див., наприклад, [1, 2] і наведену там літературу).

В останні роки у зв'язку з задачами математичної фізики посилився інтерес до дослідження операторів Шрьодінгера з потенціалами, що є деякими узагальненими функціями (див., наприклад, [3, 4]). Зокрема з'ясувалося, що з диференціальним виразом (1) можна пов'язати оператори $\tilde{L}$ і L у більш загальному випадку, коли потенціал q належить простору Соболєва

$H_{loc}^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тобто $q = Q'$ в сенсі узагальнених функцій, де функція $Q \in L_{loc}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Наслідуючи [3, 4] введемо квазіпохідні:

$$y^{[0]} := y,\ y^{[1]} := y' - Qy,\ y^{[2]} := \left(y^{[1]}\right)' + Qy^{[1]} + Q^2 y,$$

і означимо максимальний оператор

$$Ly := -y^{[2]}$$

з областю визначення

$$D(L) := \left\{ y \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\ | y, y^{[1]} \in AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ Ly \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \right\}.$$

Предмінімальний оператор L' визначається як звуження максимального оператора L на підмножину фінітних функцій, а мінімальний оператор $\tilde{L}$ як замикання предмінімального. В роботі [4] доведено, що всі ці оператори щільновизначені в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ і $(L')^* = (\tilde{L})^* = L$.

Зауважимо, що у випадку, коли функція $q \in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, таке означення операторів збігається з класичним.

Мета цієї роботи полягає в узагальненні результатів Р.С. Ісмагілова [5] на випадок, коли потенціал $q \in H_{loc}^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Зокрема допускається, що q є (знакозмінна) міра Радона на локально компактному просторі $\mathbb{R}$.

Аби сформулювати основні результати, введемо деякі позначення. Нехай Ω – відкритий скінченний або нескінченний інтервал в $\mathbb{R}$,

$$\nu(\Omega) := \inf \left\{ \frac{(L'y, y)}{(y, y)} :\ y \in D(L') \setminus \{0\},\ \mathrm{supp} y \subset \Omega \right\}. \qquad (2)$$

Зафіксуємо число $h > 0$ і покладемо

$$\omega_n^h := \left(\frac{hn}{2}, h\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Основними результатами роботи є наступні дві теореми.

Теорема 1 (перший принцип локалізації)**.** *Предмінімальний оператор L' є обмеженим знизу тоді і лише тоді, коли числова послідовність $\{\nu(\omega_n^h)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ обмежена знизу.*

В. Михайлець та В. Молибога [3] встановили, що обмеженість знизу оператора $\tilde{L}$ (тобто L') тягне за собою його самоспряженість. Тому природно постає питання про умови дискретності його спектра. Відповідь на нього дає наступна теорема.

Теорема 2 (другий принцип локалізації)**.** *Для дискретності спектра напівобмеженого оператора $L = \tilde{L}$ необхідно та достатньо, аби виконувалося граничне співвідношення*

$$\nu(\omega_n^h) \to +\infty, \ |n| \to \infty.$$

2. Доведення теорем

Встановимо спочатку два попередні результати, з яких будуть випливати теореми 1 та 2.

Нехай $\theta_0(x) \in C^2[0,h]$, $\mathrm{supp}\theta_0 \subset [0,h]$,

$$\theta_0^2(x) + \theta_0^2(x - h/2) = 1 \tag{3}$$

при $h/2 \le x \le h$.

Позначимо

$$\theta_k(x) := \theta_0\left(x - hk/2\right), \ k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

$$u_k(x) := y(x)\theta_k^2(x), \ v_k(x) := y(x)\theta_k(x)\theta_{k+1}(x).$$

Лема 3. *Для будь-якого $y \in D(L')$ виконується рівність:*

$$\begin{aligned}(l[y], y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[u_k], u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[v_k], v_k) \\ -2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{kh}{2}+\frac{h}{2}}^{\frac{kh}{2}+h} |y|^2 (\theta_k'\theta_{k+1} - \theta_k\theta_{k+1}')^2 dx.\end{aligned} \tag{5}$$

Доведення леми 3. Ліву частину рівності (5) можемо переписати так:

$$(l[y], y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[-(y^{[1]})'\overline{y} - Qy^{[1]}\overline{y} - Q^2 y\overline{y}\Big]\,dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(y' - Qy\right)\overline{y}' - Q(y' - Qy)\overline{y} - Q^2|y|^2]dx \qquad (6)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[|y'|^2 - Qy\overline{y}' - Qy'\overline{y}\right] dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[|y'|^2 - Q\left(|y|^2\right)'\Big]\,dx.$$

Розглянемо праву частину рівності (5), покладаючи в (6) $y = u_k$ та $y = v_k$. Запишемо

$$(l[u_k], u_k) = \int\limits_{\frac{kh}{2}}^{\frac{kh}{2}+h} \Big[|u_k'|^2 - Q\left(|u_k|^2\right)'\Big]\,dx, \qquad (7)$$

$$2(l[v_k], v_k) = 2\int\limits_{\frac{kh}{2}+\frac{h}{2}}^{\frac{kh}{2}+h} \Big[|v_k'|^2 - Q\left(|v_k|^2\right)'\Big]\,dx, \qquad (8)$$

З формул (7) і (8) випливає

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[u_k], u_k) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[v_k], v_k) = \qquad (9)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{kh}{2}+\frac{h}{2}}^{\frac{kh}{2}+h} \Big[|u_k'|^2 + 2|v_k'|^2 + |u_{k+1}'|^2 - \qquad (10)$$

$$-Q\big(\left(|u_k|^2\right)' + 2\left(\left(|v_k|^2\right)' + \left(|u_{k+1}|^2\right)'\right)\Big]dx$$

Розглянемо в формулі (9) доданки під інтегралом

$$
\begin{gathered}
|u_k'|^2 = |y'\theta_k^2 + 2y\theta_k\theta_k'|^2 = \\
= |y_1'\theta_k^2 + iy_2'\theta_k^2 + 2y_1\theta_k\theta_k' + 2iy_2\theta_k\theta_k'|^2 \\
= (y_1'\theta_k^2 + 2y_1\theta_k\theta_k')^2 + (y_2'\theta_k^2 + 2y_2\theta_k\theta_k')^2 \\
= (y_1')^2\theta_k^4 + 4y_1y_1'\theta_k^2\theta_k\theta_k' + 4y_1^2\theta_k^2(\theta_k')^2 + \\
+ (y_2')^2\theta_k^4 + 4y_2'y_2\theta_k^2\theta_k\theta_k' + 4y_2^2\theta_k^2(\theta_k')^2 \\
= |y'|^2\theta_k^4 + 4|y|^2\theta_k^2(\theta_k')^2 + 2(|y|^2)'\theta_k^2\theta_k\theta_k'.
\end{gathered}
$$

Таким чином,

$$
|u_k'|^2 = |y'|^2\theta_k^4 + 4|y|^2\theta_k^2(\theta_k')^2 + 2(|y|^2)'\theta_k^2\theta_k\theta_k'. \tag{11}
$$

Окрім того,

$$
\begin{gathered}
|v_k'|^2 = |(y\theta_k\theta_{k+1})'|^2 = |y'\theta_k\theta_{k+1} + y(\theta_k\theta_{k+1})'|^2 = \\
= |y'|^2\theta_k^2\theta_{k+1}^2 + |y|^2((\theta_k\theta_{k+1})')^2 + (|y|^2)'\theta_k\theta_{k+1}(\theta_k\theta_{k+1})'.
\end{gathered} \tag{12}
$$

З формул (3) та (4) випливає, що

$$
\begin{gathered}
\theta_k^2(x) + \theta_{k+1}^2(x) = 1, \quad \text{якщо} \quad x \in [kh/2 + h/2,\ kh/2 + h], \\
\theta_k(x)\theta_k'(x) + \theta_{k+1}(x)\theta_{k+1}'(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad x \in [kh/2 + h/2,\ kh/2 + h].
\end{gathered}
$$

Таким чином, на підставі формул (11) і (12) маємо

$$
\begin{gathered}
|u_k'|^2 + 2|v_k'|^2 + |u_{k+1}'|^2 = \\
= |y'|^2(\theta_k^4 + 2\theta_k^2\theta_{k+1}^2 + \theta_{k+1}^4) + 2|y|^2[2\theta_k^2(\theta_k')^2 + \\
+ (\theta_k')^2\theta_{k+1}^2 + 2\theta_k\theta_k'\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + \theta_k^2(\theta_{k+1}')^2 + 2\theta_{k+1}^2(\theta_{k+1}')^2] + \\
+ 2(|y|^2)'(\theta_k^2\theta_k\theta_k' + \theta_k\theta_k'\theta_{k+1}^2 + \theta_k^2\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + \theta_{k+1}^2\theta_{k+1}\theta_{k+1}') = \\
= |y'|^2(\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2)^2 + 2|y|^2[2\theta_k^2(\theta_k')^2 + 4\theta_k\theta_k'\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + 2\theta_{k+1}^2(\theta_{k+1}')^2 + \\
+ (\theta_k')^2\theta_{k+1}^2 - 2\theta_k\theta_k'\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + \theta_k^2(\theta_{k+1}')^2] + \\
+ 2(|y|^2)'(\theta_k^2(\theta_k\theta_k' + \theta_{k+1}\theta_{k+1}') + \theta_{k+1}^2(\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + \theta_k\theta_k')) = \\
= |y'|^2 + 2|y|^2(2(\theta_k\theta_k' + \theta_{k+1}\theta_{k+1}')^2) + (\theta_k'\theta_{k+1} - \theta_k\theta_{k+1}')^2) = \\
= |y'|^2 + 2|y|^2(\theta_k'\theta_{k+1} - \theta_k\theta_{k+1}')^2.
\end{gathered}
$$

Отже,

$$|u_k'|^2 + 2|v_k'|^2 + |u_{k+1}'|^2 = |y'|^2 + 2|y|^2(\theta_k'\theta_{k+1} - \theta_k\theta_{k+1}')^2. \qquad (13)$$

Безпосередньо перевіряється, що

$$(|u_k|^2)' = (|y|^2)'\theta_k^4 + 4|y|^2\theta_k^3\theta_k', \qquad (14)$$

$$(|v_k|^2)' = (|y|^2)'\theta_k^2\theta_{k+1}^2 + |y|^2(2\theta_k\theta_k'\theta_{k+1}^2 + 2\theta_k^2\theta_{k+1}\theta_{k+1}'). \qquad (15)$$

Враховуючи (14) та (15), отримуємо:

$$\begin{aligned}(|u_k|^2)' + 2(|v_k|^2)' + (|u_{k+1}|^2)' &= (|y|^2)'(\theta_k^4 + 2\theta_k^2\theta_{k+1}^2 + \theta_{k+1}^4)\\ &+4|y|^2(\theta_k^3\theta_k' + \theta_k\theta_k'\theta_{k+1}^2 + \theta_k^2\theta_{k+1}\theta_{k+1}' + \theta_{k+1}^3\theta_{k+1}')\\ &= (|y|^2)'(\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2)^2\\ &+4|y|^2(\theta_k^2(\theta_k\theta_k' + \theta_{k+1}\theta_{k+1}') + \theta_{k+1}^2(\theta_k\theta_k' + \theta_{k+1}\theta_{k+1}')) = (|y|^2)'.\end{aligned}$$

Отже,

$$(|u_k|^2)' + 2(|v_k|^2)' + (|u_{k+1}|^2)' = (|y|^2)'. \qquad (16)$$

Тепер з формул (6), (9), (13) та (16) випливає, що є правильною рівність (5).

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай існує ціле число n_0 таке, що $\omega_{n_0}^h \subset \Omega$. Тоді знайдеться таке ціле число n, що $\omega_n^h \subset \Omega$ та виконується нерівність*

$$\nu(\omega_n^h) \leq \nu(\Omega) + \frac{32}{|\omega_n^h|^2}. \qquad (17)$$

Тут $|\omega_n^h|$ — довжина відрізка ω_n^h.

Доведення. Для будь-якого y з $D(L')$ за лемою 3 маємо рівність

$$(l[y], y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(l[u_k], u_k) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(l[v_k], v_k) -$$

$$-2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{kh}{2}+\frac{h}{2}}^{\frac{kh}{2}+h}|y|^2(\theta_k'\theta_{k+1} - \theta_k\theta_{k+1}')^2dx.$$

Можна вважати, що $|\theta_0'(x)| < 2/h$, що не суперечить (3). Тоді з останньої рівності випливає:

$$(l[y], y) \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[u_k], u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[v_k], v_k) - \frac{32}{|\omega_n|^2}(y, y). \quad (18)$$

Легко перевірити, що

$$(y, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u_k, u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (v_k, v_k). \quad (19)$$

Також, з означення величини ν (рівність (2)) випливає властивість

$$\forall \delta > 0 \; \exists y \in D(L'), \; \mathrm{supp} y \subset \Omega :$$
$$(L'y, y) < (\nu(\Omega) + \delta)(y, y). \quad (20)$$

Підставляючи (19) та (20) в (18), отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(l[u_k], u_k) - \left(\nu(\Omega) + \frac{32}{|\omega_n^h|^2} + \delta \right) (u_k, u_k) \right] + \\ &+2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(l[v_k], v_k) - \left(\nu(\Omega) + \frac{32}{|\omega_n^h|^2} + \delta \right) (v_k, v_k) \right] < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Тому хоча б один з доданків в (21) менший за 0. Наприклад, з індексом k_0. Тоді

$$\nu\left(\omega_{k_0}^h\right) \leq \nu(\Omega) + \frac{32}{|\omega_{k_0}^h|^2}.$$

Лему 4 доведено.

Доведення теореми 1. Нехай для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\nu\left(\omega_n^h\right) \geq \alpha$ для всіх натуральних n. Тоді $\forall y \in D(L')$

знайдеться компакт $\bar{\Omega}$ такий, що supp$y \subset \Omega$ та $\Omega \supset \omega_n$. За лемою 4 маємо

$$\nu(\Omega) \geq \nu(\omega_n^h) - \frac{32}{|\omega_n^h|^2} \geq \alpha - \frac{32}{|\omega_n^h|^2}.$$

Тобто $L' \geq \alpha - \frac{32}{|\omega_n^h|^2}$.

Зворотно, нехай для деякого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $L' \geq \beta$. З цього випливає, що $\nu\left(\omega_n^h\right) \geq \beta$ для всіх натуральних n.

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. *Необхідність.* Нехай спектр $S(L)$ дискретний. Припустимо, що існує таке число $m > 0$, що для будь-якого натурального n_m знайдеться такий номер $|n| > n_m$, що має місце нерівність: $\nu\left(\omega_n^h\right) < m$, тобто існує така функція $y \in D(L') \setminus \{0\}$, що

$$(Ly_n, y_n) < m(y_n, y_n), \text{ або } (Ly_n - my_n, y_n) < 0$$

звідки випливає [2, с. 31, теорема 13], що лівіше точки m знаходиться нескінченна кількість точок спектра оператора L.

Достатність. Нехай $\nu\left(\omega_n^h\right) \to +\infty$, $|n| \to \infty$. Це значить, що для будь-якого числа $m > 0$ існує таке натуральне число n_m, що для будь-якого номера $|n| > n_m$ виконується нерівність $\nu\left(\omega_n^h\right) > m$. Тоді в силу леми 4 для будь-якої функції $y \in D(L') \setminus \{0\}$, фінітної на $\left(-\infty, h\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$ буде

$$(Ly, y) > \left(m - \frac{32}{|\omega_n^h|^2}\right)(y, y),$$

а це значить, що [2, с. 31, теорема 12]

$$C(L) \cap \left(-\infty, m - 32/|\omega_n^h|^2\right) = \emptyset.$$

Внаслідок довільності m отримуємо потрібний результат.

Теорему 2 доведено.

Література

[1] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

[2] *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1963. – 340 с.

[3] *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Remarks on Schrodinger operators with singular matrix potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **19**, no. 2. – P. 161–167.

[4] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 6. – С. 897–912.

[5] *Исмагилов Р. С.* Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1961. – **140**, № 1. – С. 33–36.