Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 175–192

УДК 517.956.4

В. М. Лось

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Умови класичності розв'язків другої крайової задачі для параболічних рівнянь

v_los@yahoo.com

Considering the initial-boundary value problem for the second order linear parabolic equation with the general boundary condition of first order, we obtain new sufficient conditions under which the generalized solution to the problem is classical. These conditions are formulated in terms of the belonging of the right-hand sides of the problem to certain 2-anisotropic Hörmander spaces. The classical solutions can be discontinuous on the junction of the lateral area and base of the cylinder in which the problem is considered.

Знайдено нові достатні умови класичності узагальнених розв'язків початково–крайової задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку із загальною крайовою умовою першого порядку. Умови сформульовано у термінах приналежності правих частин задачі деяким анізотропним просторам Хермандера. Класичні розв'язки можуть мати розрив на стику бічної поверхні і основи циліндра, у якому розглядається задача.

1. Вступ

Загальні параболічні початково–крайові задачі достатньо повно досліджені у класичних шкалах функціональних просторів Гельдера–Зігмунда та Соболєва [1 – 6]. Зокрема [2, 7 – 11], отримано відповідь на важливе питання, коли узагальнений розв'язок такої задачі є класичним, тобто коли диференціальні оператори застосовуються до розв'язків у термінах класичних похідних.

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоноване Л. Хермандером у [12]. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів служить вагова функція μ, залежна від кількох дуальних змінних. Такі простори знайшли різні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [12 – 21].

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [19 – 27] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера.

В роботах [28 – 39] досліджено мішані параболічні задачі у гільбертових просторах Хермандера. У [39] отримано достатні умови класичності узагальнених розв'язків мішаних задач для лінійних параболічних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці умови, зокрема, гарантують неперервність розв'язку у замкнутому циліндрі.

З точки зору застосувань (див., наприклад, [40, гл. 3, § 2, п. 3]) важливо розглянути класичні розв'язки, які не є неперервними на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра, у якому досліджується задача. З огляду на це у [41] для мішаної задачі для лінійного параболічного диференціального рівняння другого порядку з крайовою умовою Діріхле встановлено достатні умови того, що узагальнені розв'язки є класичними у щойно зазначеному сенсі. Ці умови сформульовано у термінах приналежності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Їх застосування дозволяє отримати більш тонкі достатні умови, ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва.

Ця робота є продовженням [41]. Мета цієї роботи – поширити результат [41] на випадок мішаної задачі для лінійного параболічного диференціального рівняння другого порядку із загальною крайовою умовою першого порядку.

Стаття складається з 6 пунктів. Пункт 1. є вступом. Пункт 2. містить постановку задачі, що досліджується. У п. 3. введено необхідні гільбертові простори Хермандера. У п. 4. сформульовано основний результат статті. Він доведений у п. 5. Пункт 6. містить висновки до статті.

2. Постановка задачі

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Для параболічного рівняння другого порядку, заданого в Ω, розглянемо початково-крайову задачу із загальною крайовою умовою першого порядку:

$$Au \equiv \partial_t u(x,t) + \sum_{|\alpha|\leq 2} a^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in G, \tag{2}$$

$$Bu\big|_S \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) D_j u(x,t) + b_0(x,t)u(x,t)\right)\Big|_S = g(x,t) \quad \text{для всіх} \quad x \in \Gamma,\ 0 < t < \tau. \tag{3}$$

Всі коефіцієнти диференціальних виразів A і B вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$

відповідно, тобто $a^\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$ та b_0, $b_j \in C^\infty(\overline{S})$. Використовуємо такі позначення для частинних похідних $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j := i\,\partial/\partial x_j$, $\partial_t := \partial/\partial t$. Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$ є довільною точкою простору $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ є мультиіндексом і $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Підсумовування у (1) здійснюється за цілими індексами $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0$, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо [1] (§ 9, п. 1), що рівняння (1) є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а крайовий диференціальний оператор B накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра. Це значить виконання таких двох умов.

Умова 1. Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, правильно

$$A^{(0)}(x, t, \xi, p) \equiv p + \sum_{|\alpha|=2} a^\alpha(x, t)\, \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Для формулювання другої умови довільно виберемо $x \in \Gamma$, $t \in [0, \tau]$, дотичний вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\eta| + |p| \neq 0$. Нехай $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x.

Умова 2. Для кожного такого вибору x, t, η та p виконуються дві властивості:

а) $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x, t)\nu_j(x) \neq 0$,

б) число $\zeta = -\big(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x, t)\eta_j\big)\big(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x, t)\nu_j(x)\big)^{-1}$ не є коренем полінома $A^{(0)}(x, t, \eta + \zeta\nu(x), p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$.

Відмітимо, з умови 1 випливає, що коли всі коефіцієнти $b_j(x, t)$, де $j = 1, \ldots, n$, є дійсними, то частина б) в умові 2 виконується автоматично.

3. Функціональні простори

Основний результат роботи будемо формулювати у термінах приналежності правих частин задачі гільбертовим функціональним просторам $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені і досліджені Л. Хермандером [12, п. 2.2]. Згодом ці простори дослідили також Л. Р. Волєвич і Б. П. Панеях [13, § 2, 3].

Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^l \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k.$$

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними). Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми $\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathbb{R}^k$. Лінійний простір $H^{\mu}(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} :\, w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k),\ u = w \restriction V\bigr\}.$$

Простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/2$. Надалі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\begin{aligned}\mu_{s;\varphi}(\xi',\xi_k) := \mu(\xi',\xi_k) :=& \\ \bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}&\varphi\bigl((1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr),\end{aligned} \tag{4}$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$.

За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме: $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [42]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{q_1}\,(\log\log r)^{q_2}\ldots(\underbrace{\log\ldots\log}_{k\text{ разів}} r\,)^{q_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково–крайової задачі (1)–(3) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n+1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x,t)$ по просторовій змінній $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in (0,\tau)$. У загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \quad (5)$$

У випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, нам будуть потрібні такі простори Хермандера, де $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. У зв'язку з цим відмітимо, що для довільної зростаючої (в нестрогому сенсі) функції $\varphi \in \mathcal{M}$ правильне неперервне та щільне вкладення $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma}(\Omega)$.

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0,\tau)$ циліндра Ω. До них буде належати права частина g крайової умови (3). Означимо ці простори, використовуючи спеціальні локальні карти на S (див. [34, п. 1]). Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (4), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,\lambda$, такі, що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda}\chi_j = 1$ на Γ.

За означенням, лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$ функція

$$v_j(y,t) := \chi_j(\theta_j(y))\, v(\theta_j(y),t)$$

аргументів $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$ належить до $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [34] (теорема 1).

Введемо простори, до яких належить права частина h початкової умови (2). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s;\varphi}(G) := H^{\mu}(G)$ з показником $\mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi((1+|\xi|^2)^{1/2})$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$. Їх виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [19, 20].

Нарешті, для формулювання основного результату введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s;\varphi}(G)$.

Нехай U є відкритою множиною в $\mathbb{R}^{n+1}$, такою, що $U \cap \Gamma = \varnothing$. Нехай $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$.

Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ – довільна вище згадана функція. Подібно до цього, позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v \mapsto \|\chi v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція. Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$ лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_3$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$w \mapsto \|\chi w\|_{H^{s;\varphi}(G)},$$

де χ – довільна тільки згадана функція.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними на Ω і S, або ізотропними на G). У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

4. Основний результат

Позначимо

$$\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0} := L_2(\Omega) \oplus H^{1/2,1/4}(S) \oplus H^1(G).$$

Із результату М. С. Аграновіча та М. І. Вішіка [1] (теорема 12.1) випливає, що для кожної вектор-функції (f, g, h) із соболєвського простору $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}$ задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною $(f, g, h) \in \mathcal{H}_{\mathrm{N}}^{0,0}$.

Дамо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Означення 1. *Узагальнений розв'язок* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *задачі* (1)–(3) *назвемо класичним, якщо*

$$u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega), \quad u \in C(\Omega \cup G)$$
$$u,\ \partial u/\partial x_j \in C(\Omega \cup S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Тут, як звичайно, $C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ – множина функцій, які є неперервно диференційовні на Ω разом зі своїми частинними похідними $\partial_t u$ і $D_x^\alpha u$, для яких $|\alpha| \le 2$.

Зауважимо, що, на відміну від означення класичного розв'язку задачі (1)–(3) у [39, означення 2], у цій роботі в означенні 1 не вимагається неперервність розв'язку у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай функція* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{aligned} f \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}(\Omega, \varnothing) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{n/2,\ n/4;\ \varphi_2}(\Omega, S) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2,\ -1/2+n/4;\ \varphi_3}(\Omega, G), \end{aligned} \tag{6}$$

$$g \in H_{\mathrm{loc}}^{1/2+n/2,\ 1/4+n/4;\ \varphi_2}(S), \tag{7}$$

$$h \in H_{\mathrm{loc}}^{n/2;\ \varphi_3}(G) \tag{8}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1, φ_2 і $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ такими, що

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{9}$$

При $n = 2$ додатково припускаємо, що φ_3 є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Тоді $u(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (1)–(3).

Відмітимо, для означення локальних просторів на $\Omega \cup S$ і на S можна покласти, наприклад, $U := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\overline{G} \cup \overline{G}_\tau)$, де $\overline{G}$ і $\overline{G}_\tau$ відповідно нижня і верхня основи циліндра $\overline{\Omega}$.

Зауваження 1. Якщо сформулювати аналог теореми 1 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови (6)–(8) цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення

$$\begin{aligned} f \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2+\varepsilon_1,\; 1/2+n/4+\varepsilon_1/2}(\Omega,\varnothing) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_2,\; n/4+\varepsilon_2/2}(\Omega,S) \cap \\ & H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2+\varepsilon_3,\; -1/2+n/4+\varepsilon_3/2}(\Omega,G), \\ g \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{1/2+n/2+\varepsilon_2,\; 1/4+n/4+\varepsilon_2/2}(S), \\ h \in\, & H_{\mathrm{loc}}^{n/2+\varepsilon_3}(G) \end{aligned}$$

для деяких $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ і $\varepsilon_3 > 0$.

5. Доведення

Доведення теореми 1 спирається на теорему про локальне підвищення регулярності розв'язку задачі (1)–(3) та деяку модифікацію теореми вкладання Хермандера [12] (теорема 2.2.7). Для зручності сформулюємо необхідні твердження.

Твердження 1 [38] (окремий випадок теореми 2)**.** *Нехай* $u \in H^{2,1}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3) *із правою частиною* $(f,g,h) \in \mathcal{H}^{0,0}_{\mathrm{N}}$. *Припустимо, що*

$$f \in H^{s-2,(s-2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{10}$$

$$g \in H^{s-3/2,(s-3/2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2), \tag{11}$$

$$h \in H^{s-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3) \tag{12}$$

для деяких $s > 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

Твердження 2 [37] (окремий випадок леми 8.1)**.** *Нехай* $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $s := p + 1 + n/2$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді правильні такі два твердження:*

(i) Якщо φ *задовольняє умову*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{13}$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *має таку властивість: всі її узагальнені частинні похідні* $D^\alpha_x \partial^\beta_t w(x,t)$ *з* $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq p$ *є неперервними на* $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) Нехай V *є непорожня відкрита підмножина* $\mathbb{R}^{n+1}$, *і нехай ціле* k *таке, що* $1 \leq k \leq n$. *Якщо кожна функція* $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *з* $\operatorname{supp} w \subset V$ *задовольняє умову* $\partial^j w/\partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ *для кожного* $j \in \mathbb{Z}$ *з* $0 \leq j \leq p$, *то* φ *задовольняє умову* (13).

Нам буде потрібний такий наслідок із твердження 2.

Наслідок 1. *Твердження 3(i) зберігає силу, якщо у ньому замінити* $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *на* $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ *і* $\mathbb{R}^{n+1}$ *на* $\overline{\Omega}$.

Справді, з означення простору $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з твердження 3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$ з $0 \le |\alpha| + 2\beta \le p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$.

Доведення теореми 1. Спочатку покажемо, що твердження 1 є правильним у випадку, коли $s = 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ є зростаючою (в нестрогому сенсі) функцією. Цей факт потрібний у випадку, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Нехай $u \in H^{2,1}(\Omega)$. Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Переставляючи кожний з диференціальних операторів A і B з оператором множення на χ, можемо записати

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi u) := (A(\chi u), &B(\chi u)\big|_S, \chi u\big|_{t=0}) \\ &= \chi(f,g,h) + (A'u, B'u\big|_S, 0),\end{aligned} \tag{14}$$

де

$$A'u = u\partial_t\chi + \sum_{|\alpha|\le 1} a_1^\alpha(x,t)\, D_x^\alpha u \in H^{1,1/2}(\Omega),$$

$$B'u\big|_S = u\sum_{j=1}^n b_j(x,t) D_j\chi\big|_S \in H^{3/2,3/4}(S).$$

З (14), умов (10)–(12) для $s = 2$, лівого вкладання (5) та його аналогу для просторів на S випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in H^{0,0;\varphi}(\Omega) \oplus H^{1/2,1/4;\varphi}(S) \oplus H^{1;\varphi}(G). \tag{15}$$

З (15) (див.[36, теорема 2]) випливає потрібне включення $\chi u \in H^{2,1;\varphi}(\Omega)$. Врахувавши довільність вибору функції χ, маємо $u \in H^{2,1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$.

Переходимо безпосередньо до доведення теореми 1. Спочатку покажемо, що $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$. З умов (6)–(8) маємо включення

$$\begin{aligned}&f \in H^{1+n/2,\ 1/2+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing),\\ &g \in \mathcal{D}'(S) = H^{3/2+n/2,\ 3/4+n/4;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing),\\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H^{2+n/2;\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing).\end{aligned}$$

З цих включень і твердження 1, де $s := 3 + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{3+n/2,\, 3/2+n/4;\, \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing). \tag{16}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини Ω. Знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $O(x_0) \subset \Omega$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (16) випливає включення $\chi u \in H^{3+n/2,\, 3/2+n/4;\, \varphi_1}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 2$, маємо включення

$$\partial_t(\chi u),\ D^\alpha_x(\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad |\alpha| \le 2.$$

З останніх включень випливає, що узагальнені частинні похідні $\partial_t u$ і $D^\alpha_x u$ з $|\alpha| \le 2$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою Ω, то $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$.

Подібним чином покажемо, що функція u і всі її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$, де $j \in \{1, \dots, n\}$, є неперервними на $\Omega \cup S$. З умов (6)–(8) маємо включення

$$\begin{aligned} &f \in H^{n/2,\, n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S), \\ &g \in H^{1/2+n/2,\, 1/4+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S), \\ &h \in \mathcal{D}'(G) = H^{1+n/2;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\varnothing). \end{aligned}$$

З цих включень і твердження 1, де $s := 2 + n/2$, випливає, що

$$u \in H^{2+n/2,\, 1+n/4;\, \varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S). \tag{17}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $O(x_0) \subset \Omega \cup S$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup S$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (17) випливає включення $\chi u \in H^{2+n/2,\, 1+n/4;\, \varphi_2}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 1$, маємо включення

$$\chi u,\ \partial(\chi u)/\partial x_j \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

З останніх включень випливає, що функція u і всі її узагальнені частинні похідні $\partial u/\partial x_j$, де $j \in \{1, \dots, n\}$, є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S$, то це правильно на всій множині $\Omega \cup S$.

Нарешті, покажемо, що $u \in C(\Omega \cup G)$. Справді, з умов (6)–(8) маємо включення

$$
\begin{aligned}
&f \in H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\, \varphi_3}(\Omega, G),\\
&g \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{-1/2+n/2,\, -1/4+n/4;\, \varphi_3}(\varnothing),\\
&h \in H_{\mathrm{loc}}^{n/2;\, \varphi_3}(G).
\end{aligned}
$$

З цих включень і твердження 1, де $s := 1 + n/2$, випливає, що

$$
u \in H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\, \varphi_3}(\Omega, G). \tag{18}
$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup G$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться окіл $O(x_0)$ цієї точки, такий, що $\operatorname{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (18) випливає включення $\chi u \in H^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\, \varphi_3}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 0$, маємо включення $\chi u \in C(\overline{\Omega})$. З останнього включення випливає, що функція u є неперервною в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup G$, то $u \in C(\Omega \cup G)$.

Теорема 1 доведена.

6. Висновки

У роботі отримано нові достатні умови того, що узагальнений розв'язок параболічної початково–крайової задачі (1) – (3) є класичним (теорема 1). В означенні класичного розв'язку не вимагається його неперервність на лінії з'єднання бічної поверхні і основи циліндра, у якому розглядається задача. Праві частини задачі належать певним анізотропним просторам Хермандера. Використання цих просторів дає змогу отримати більш тонкі достатні умови, ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва.

Література

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.

[2] *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.

[3] *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.

[4] *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.

[5] *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205–316.

[6] *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.

[7] *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97–154.

[8] *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 3. – С. 3–146.

[9] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.– Москва: Мир, 1968. – 428 с.

[10] *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**,№ 3. – С. 328–337.

[11] *Михайлов В. П.* Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем // Мат. энциклопедия. Т. 5 – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – 1248 с.

[12] *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.).

[13] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[14] *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // В кн.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.

[15] *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.

[16] *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäser, 2001. – xii+425 p.

[17] *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1–62.

[18] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – xi+306 p.

[19] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211–281.

[20] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoŕmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.

[21] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135–152.

[22] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukrainian Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244–262.

[23] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // Ukrainian Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398–417.

[24] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744–765.

[25] *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874–893.

[26] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukrainian Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574–597.

[27] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81–100.

[28] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146–160.

[29] *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219–234.

[30] *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23–31.

[31] *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24–32.

[32] *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і $2b$-анізотропні простори Хермандера // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 276–290.

[33] *Los V. M.* Mixed Problems for the Two-Dimensional Heat-Conduction Equation in Anisotropic Hormander Spaces // Ukrainian Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 735–747.

[34] *Los V. M.* Anisotropic Hörmander Spaces on the Lateral Surface of a Cylinder // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – **217**, № 4. – C. 456–467.

[35] *Лось В. М., Мурач О. О.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера // arXiv:1510.06270.

[36] *Лось В. М.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера: граничний випадок // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – Р. 786–799.

[37] *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // Communications on Pure and Applied Analysis (to appear), arXiv:1511.04688.

[38] *Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Загальні параболічні початково-крайові задачі у просторах Хермандера (у друці).

[39] *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічних початково-крайових задач і простори Хермандера // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9.

[40] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

[41] *Лось В. М.* Про достатні умови класичності узагальнених розв'язків деяких мішаних параболічних задач // Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 1. – С. 228–243.

[42] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.