Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 111–124

УДК 517.927

Є. В. Гнип, В. А. Михайлець, О. О. Мурач

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва

evgeniyagnyp27@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

For a broad class of parameter-dependent boundary-value problems, we obtain a constructive criterion under which their solutions are continuous with respect to the parameter in an appropriate Sobolev space.

Для широкого класу залежних від параметра крайових задач отримано конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у відповідному просторі Соболєва.

1. Вступ

Питання, пов'язані із обґрунтуванням граничного переходу у диференціальних рівняннях, залежних від параметра, виникають у багатьох задачах. Найкраще такі питання досліджені для задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. І. І. Гіхман [1], М. А. Красносельський і С. Г. Крейн [9], Я. Курцвейль і З. Ворел [10] отримали фундаментальні результати стосовно неперервної залежності за параметром розв'язків задач Коші для нелінійних систем. Для лінійних систем ці результати були уточнені й доповнені Левіним [11], Опялем [24], Рейдом [25] та Нгуен Тхе Хоаном [15].

Крайові задачі, що залежать від параметра, досліджено значно гірше, ніж задачі Коші. І. Т. Кігурадзе [4 – 6] та М. Ашордіа [17] представили та дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. І. Т. Кігурадзе та М. Ашордіа отримали умови, за яких розв'язки задач з цього класу, що залежать від параметра, є неперервними за параметром в $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. Нещодавно ці результати було уточнено і узагальнено для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь вищих порядків [8, 14, 22].

В [2, 13, 21] було представлено новий клас крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. В [2] ми дослідили крайові задачі з цього класу, що залежать від параметра, та встановили конструктивні достатні умови, за яких розв'язки таких задач є неперервними за параметром у просторі Соболєва. І тепер, у даній роботі, ми покажемо, що встановлені раніше умови є ще й необхідними. Крім того, ми даємо двобічну оцінку швидкості збіжності розв'язків незбуреної крайової задачі.

Зауважимо, що тотальні крайові задачі щодо просторів $C^{(n+r)}$ були представлені в [12, 16], де були встановлені достатні умови неперервної залежності їх розв'язків за параметром. Ці результати були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач [7], матриць Гріна [8, 22], та застосовані у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [3, 18, 19].

Підхід, представлений у даній роботі, може бути застосований до дослідження крайових задач тотальних щодо інших функціональних просторів [23].

2. Постановка задачі і результати

Нехай задані числа $n, m, r \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ і скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Через $W_p^n := W_p^n\left((a,b), \mathbb{C}\right)$, $\left(W_p^n\right)^m := W_p^n\left((a,b), \mathbb{C}^m\right)$, $\left(W_p^n\right)^{m\times m} := W_p^n\left((a,b), \mathbb{C}^{m\times m}\right)$ позначимо простори Соболєва відповідно функцій, вектор-функцій і матриць-функцій на інтервалі (a,b). Норма в банаховому просторі W_p^n задається рівністю

$$\|x\|_{n,p} := \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_a^b |x^{(j)}(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad W_p^0 := L_p.$$

Аналогічно простори $\left(W_p^n\right)^m$ и $\left(W_p^n\right)^{m\times m}$ будуть банаховими відносно норми $\|\cdot\|_{n,p}$, яка визначається як сума норм відповідних норм компонент вектор-функції або матриці-функції. З контексту завжди буде зрозуміло, якого простору (скалярних, вектор-функцій та матриць-функцій) норма стосується.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо параметризовану сім'ю неоднорідних крайових задач для систем m лінійних диференціальних рівнянь порядку r

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon) y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \qquad (2)$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, невідома вектор-функція $y(\cdot) \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$, матриці-функції $A_{r-j} \in \left(W_p^n\right)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot) \in \left(W_p^n\right)^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{n+r}\right)^m \to \mathbb{C}^{rm}. \qquad (3)$$

Крайова умова (2) з неперервним оператором $B(\varepsilon)$ є найбільш загальною для системи (1), бо коли її права частина $f(\cdot,\varepsilon)$ пробігає весь простір $(W_p^n)^m$, то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ цієї системи пробігає весь простір $(W_p^{n+r})^m$. Така умова містить в собі як усі класичні типи крайових умов, такі, як початкові умови задачі Коші, багатоточкові й інтегральні крайові умови, так і некласичні умови, які містять похідні шуканої функції $y^{(k)}(\cdot,\varepsilon)$, де $1 \le k \le n+r$. Тому природно називати крайову задачу (1), (2) тотальною щодо простору W_p^{n+r}.

Кожен з операторів (3) допускає однозначне аналітичне представлення (див., наприклад, [20, §0.1])

$$B(\varepsilon)y = \sum_{k=1}^{n+r} \alpha_k(\varepsilon) y^{(k-1)}(a) + \int_a^b \Phi(t,\varepsilon) y^{(n+r)}(t)dt, \tag{4}$$

де $\alpha_k(\varepsilon)$ — комплексні прямокутні матриці з $\mathbb{C}^{rm\times m}$, а матриця-функція $\Phi(\cdot,\varepsilon) \in (L_q)^{rm\times m}$ з показником $q \in (1,\infty]$, який визначається з рівності $1/p + 1/q = 1$.

Для кожного фіксованого ε крайова задача (1), (2) є фредгольмовою з індексом нуль.

Для крайової задачі (1), (2) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного $j \in \{1\dots r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^{rm}$ для кожного $y \in (W_p^{n+r})^m$;

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(W_p^n)^m$, $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$.

Розглядається також

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Введемо

Означення 1. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

(∗) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, функції $f(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^n)^m$ і вектора $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot, \varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$.

(∗∗) Граничні умови (III) тягнуть за собою збіжність

$$y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) \quad \text{в} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

Основним результатом роботи є

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II).

Цю теорему 1 доповнює такий результат.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2 такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\begin{aligned} &\gamma_1\big(\,\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{n,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}\big) \\ &\quad \le \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{n+r,p} \\ &\quad \le \gamma_2\big(\,\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{n,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}}\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Тут числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$.

Ми доведемо ці теореми у п. 3.

Зауваження 1. Зважаючи на представлення (4) та критерій слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів (3) на просторі L_p, умову (II) можна переписати у явній формі:

2a) для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n + r\}$ $\alpha_k(\varepsilon) \to \alpha_k(0)$;

2b) $\sup\limits_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)} \|\Phi(\cdot, \varepsilon)\|_{0,q} < \infty$;

2c) $\int\limits_a^t \Phi(s, \varepsilon) ds \to \int\limits_a^t \Phi(s, 0) ds$ для кожного $t \in (a, b]$.

При цьому умова $\|B(\varepsilon) - B(0)\| \to 0$ рівносильна умові 2a) і більш сильній, ніж умови 2b) і 2c), умові

2d) $\|\Phi(\cdot, \varepsilon) - \Phi(\cdot, 0)\|_{0,q} \to 0$.

Згідно з теоремою 2 похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) мають однаковий порядок.

3. Доведення

Доведення теореми 1. Достатність умов (0), (I) і (II) для того, щоб задача (1), (2) задовольняла означення 1 була доведена в [21, теорема 1.1] для $r = 1$ і в [2, теорема 3] для $r \geq 2$. Доведемо необхідність. Припускаємо, що ця задача задовольняє означення 1, тоді виконується умова (0). Залишається показати, що для цієї задачі виконуються умови (I) і (II). Розділимо це доведення на три кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (1), (2) задовольняє граничну умову (I).

Якщо $r \geq 2$, то зведемо крайову задачу (1), (2) до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього, як зазвичай, позначимо

$$x(\cdot, \varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(y(\cdot, \varepsilon), y'(\cdot, \varepsilon), \ldots, y^{(r-1)}(\cdot, \varepsilon)\bigr) \in (W_p^{n+1})^{rm},$$
$$\tilde{f}(\cdot, \varepsilon) := \operatorname{col}\bigl(0, f(\cdot, \varepsilon)\bigr) \in (W_p^n)^{rm}$$

та

$$\tilde{A}(\cdot,\varepsilon) :=$$

$$:= \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \dots & I_m \\ A_0(\cdot,\varepsilon) & A_1(\cdot,\varepsilon) & A_2(\cdot,\varepsilon) & \dots & A_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \in (W_p^n)^{rm\times rm},$$

де O_m й I_m позначають нульову та одиничну матриці розмірності $(m\times m)$ відповідно. З огляду на представлення (4), ми також позначимо

$$\tilde{B}(\varepsilon)\,x :=$$

$$:= \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k(\varepsilon)x_k(a) + \sum_{k=r}^{n+r} \alpha_k(\varepsilon)x_r^{(k-r)}(a) + \int_a^b \Phi(t,\varepsilon)x_r^{(n+1)}(t) \tag{7}$$

для довільної вектор-функції $x = \mathrm{col}(x_1,\dots,x_r)$, де $x_1,\dots,x_r \in (W_p^{n+1})^m$. Лінійне відображення $x\mapsto \tilde{B}x$ діє із $(W_p^{n+1})^{rm}$ в $\mathbb{C}^{rm}$.

Тоді отримаємо наступну крайову задачу

$$x'(t,\varepsilon) + \tilde{A}(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) = \tilde{f}(t,\varepsilon), \quad t\in(a,b), \tag{8}$$

$$\tilde{B}(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon). \tag{9}$$

У випадку $r = 1$, ми покладемо $x(\cdot,\varepsilon) := y(\cdot,\varepsilon)$, $\widetilde{f}(\cdot,\varepsilon) := f(\cdot,\varepsilon)$, $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) := A_0(\cdot,\varepsilon)$ і $\widetilde{B}(\varepsilon) := B(\varepsilon)$, тому задача (1), (2) збігається з задачею (8), (9).

Отже, між розв'язками задачі (1), (2) та (8), (9) існує взаємно однозначна відповідність. Зокрема кожному розв'язку $y(t,\varepsilon) \in \left(W_p^{n+r}\right)^m$ однорідного рівняння (1) відповідає розв'язок $x(t,\varepsilon) \in \left(W_p^{n+1}\right)^{rm}$ однорідного рівняння (8), і навпаки.

Гранична умова (I) еквівалентна збіжності $\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) \to \widetilde{A}(\cdot,0)$ в просторах $(W_p^n)^{rm\times rm}$ при $\varepsilon\to 0+$. Доведемо цю збіжність.

Спочатку зауважимо, що якщо $\tilde{f}(\cdot,\varepsilon)$ і $\tilde{c}(\varepsilon)$ не залежать від $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, то тоді $y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$ за умовою $(**)$ означення 1. Остання збіжність еквівалента тому, що $x(\cdot,\varepsilon) \to x(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+1})^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$.

Розглянемо матричну крайову задачу

$$X'(t,\varepsilon) + \widetilde{A}(t,\varepsilon)X(t,\varepsilon) = 0_{rm}, \quad t \in [a,b], \tag{10}$$

$$[\widetilde{B}(\varepsilon)X(\cdot,\varepsilon)] = I_{rm}. \tag{11}$$

де невідома матриця-функція $X(\cdot,\varepsilon) := (x_{j,k}(\cdot,\varepsilon))_{j,k=1}^{m}$ належить простору $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$, I_{rm} — одинична $rm \times rm$-матриця і

$$[\widetilde{B}(\varepsilon)X(\cdot,\varepsilon)] := \left(\widetilde{B}(\varepsilon)\begin{pmatrix} x_{1,1}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ x_{rm,1}(\cdot,\varepsilon)\end{pmatrix} \ \ldots\ \widetilde{B}(\varepsilon)\begin{pmatrix} x_{1,rm}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ x_{rm,rm}(\cdot,\varepsilon)\end{pmatrix}\right).$$

Крайова задача (10), (11) є сукупністю rm крайових задач (8), (9), праві частини яких не залежать від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $X(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ і він задовольняє умову $X(\cdot,\varepsilon) \to X(\cdot,0)$ в $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Відмітимо, що $\det X(t,\varepsilon) \neq 0$ для кожного $t \in [a,b]$, бо інакше функції стовпці $X(\cdot,\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечить (11). Оскільки $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ — банахова алгебра, тоді $(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to (X(\cdot,0))^{-1}$ в $(W_p^{n+1})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. І більше того, $X'(\cdot,\varepsilon) \to X'(\cdot,0)$ в $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, з (10) ми отримаємо наступну збіжність

$$\widetilde{A}(\cdot,\varepsilon) = -X'(\cdot,\varepsilon)(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -X'(\cdot,0)(X(\cdot,0))^{-1} = \widetilde{A}(\cdot,0)$$

в просторах $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Тут ми використовуємо той факт, що $(W_p^{n})^{rm\times rm}$ є банаховою алгеброю при $n \geq 1$, і, що $(X(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to (X(\cdot,0))^{-1}$ в $C([a,b],\mathbb{C}^{rm\times rm})$ при $n = 0$. Тому крайова задача (1), (2) задовольняє граничну умову (I). Крім того,

$$\begin{gathered}\|A_{r-j}(\varepsilon)\|_{n,p} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \\ \text{для кожного} \quad j \in \{1,\ldots,r\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Крок 2. Доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора (3). Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Для кожного номера k виберемо функцію $w_k \in (W_p^{n+r})^m$ таку, що

$$\|w_k\|_{n+r,p} = 1 \quad i \quad \|B(\varepsilon^{(k)})w_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1} w_k$, $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$ та $c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$. Оскільки $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^n)^m$, бо, за доведеним, $A(\cdot, \varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки $1/2 \leq \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in (W_p^{n+r})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k)})\, y(t, \varepsilon^{(k)}) = f(t, \varepsilon^{(k)}), \quad t \in [a, b],$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Тут, нагадаємо, $f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^{n+r})^m$ і $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0) \neq 0$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ означення 1 функція $y(\cdot, \varepsilon^{(k)})$ збігається у просторі $(W_p^{n+r})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot, 0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t, 0) = 0$, $t \in [a, b]$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot, 0) = c(0)$. Але $y(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0$ у тому ж просторі. Отже, $y(\cdot, 0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (II). За доведеним у попередніх двох кроках, існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для усіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon')$, де

$\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_p^{n+r})^m$ у простір $(W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо функцію $y \in (W_p^{n+r})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$ маємо

$$\begin{gathered}\big\|B(\varepsilon)y - B(0)y\big\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\ \leq \big\|(f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big\|_{(W_p^n)^m\times\mathbb{C}^m} \leq \\ \leq \gamma' \,\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),c(0))\big)\big\|_{n+r,p} = \\ = \gamma' \,\big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),c(0)) - \\ -(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),c(0))\big\|_{n+r,p} \to 0\end{gathered}$$

за умовою $(**)$ означення 1. Отже, крайова задача (1), (2) задовольняє умову (II).

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Спочатку доведемо ліву частину оцінки (6). Граничні умови (I) і (II) тягнуть сильну збіжність операторів $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))$ до $(L(0),B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$. Нагадаємо, що оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))$, де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, є обмеженим

$$(L(\varepsilon),B(\varepsilon)) : (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{13}$$

Тому існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що норма оператора $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. Справді, якби виконувалось зворотне, то існувала б послідовність додатних чисел $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ та $\|(L(\varepsilon^{(k)}),B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty$ при $k \to \infty$, що з огляду на теорему Банаха-Штейнгайза суперечило б попередній сильній збіжності. Тепер ми бачимо, що ліва частина двобічної оцінки (6) виконується для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon')$, де $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо тепер праву частину оцінки. Відповідно до теореми 1, крайова задача (1), (2) задовольняє означення 1. Тому оператор (13) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, і, більше того, його обернений оператор $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}$ збігається сильно до

$(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (W_p^n)^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$, за умовою $(**)$ означення 1 маємо

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, c) =: y(\cdot, \varepsilon) \to y(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, c)$$

в $(W_p^{n+r})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ і γ_2 такі, що норма оберненого оператора $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\| \leq \gamma_2$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$. Це випливає із теореми Банаха-Штейнгауза, так само, як це було показано раніше.

Теорема 2 доведена.

4. Прикінцеві зауваження.

Легко перевірити, що умови $(*)$ і $(**)$ означення 1 рівносильні відповідно умовам

($\star$) існує додатне $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ є оборотним;

($\star\star$) оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ збігається до оператора $(L(0), B(0))^{-1}$ в сильній операторній топології.

Можна також показати, що умови (I), (II) рівносильні такій умові:

Гранична умова (IV). Оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ в сильній операторній топології.

Таким чином, з теореми 1 випливає, що за умови (0) ми маємо еквівалентність граничної умови (IV) парі умов ($\star$) і ($\star\star$).

Це може здатися дещо несподіваним, бо якщо X і Y нескінченно вимірні банахові простори з базисом Шаудера, то множина необоротних операторів секвенціально щільна в $L(X, Y)$ в сильній топології. Крім того, в цьому випадку задане на множині оборотних операторів відображення $Inv : T \mapsto T^{-1}$ є скрізь розривним в сильній операторній топології.

Література

[1] *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215–219.

[2] *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584–591.

[3] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1190–1205.

[4] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[5] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[6] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференциальные уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198–209.

[7] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доповіді НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[8] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 70–81.

[9] *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153.

[10] *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Czechoslovak Math. J. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.

[11] *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доповіді НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[13] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доповіді НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[14] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доповіді НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[15] *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970—975.

[16] *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5 – С. 692–700.

[17] *M. Ashordia*, Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. – 1996. – **46**. – P. 385–404.

[18] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1–2. – P. 287–292.

[19] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Differential Equations. – 2013. – **2013**, No. 101. – P. 1—16.

[20] *A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov.* Theory of extremal problems. – Amterdam: Noth-Holland, 1979.

[21] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[22] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, No. 3. – P. 333–342.

[23] *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. (arXiv:1604.07029).

[24] *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Differential Equations. – 1967. – **3**, No. 4. – P. 571–579.

[25] *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Differential Equations. – 1967. – **3**, No. 3. – P. 423–439.