Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 101–110

УДК 517.927

Є. В. Гнип

(Інститут математики НАН України, Київ)

Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач у просторах Слободецького

evgeniyagnyp27@gmail.com

We find sufficient conditions under which solutions to multi-point boundary-value problems for systems of first order linear differential equations are continuous with respect to the parameter in the Slobodetsky space $W_p^{s+1}((a,b),\mathbb{C}^m)$.

Знайдено нові достатні умови, за яких розв'язки багатоточкових лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку неперервні за параметром у просторі Слободецького $W_p^{s+1}((a,b),\mathbb{C}^m)$

1. Вступ

Багатоточкові крайові задачі є класичним об'єктом дослідження теорії звичайних диференціальних рівнянь [1] – [5]. Неперервність за параметром їх розв'язків в рівномірній нормі $\|\cdot\|_\infty$ досліджувалась, наприклад, у роботах [1, 6], а в [7, 8] неперервність відносно норми $\|\cdot\|_{n,p}$ просторів Соболєва W_p^n, яка сильніша, ніж рівномірна норма простору $(C)^m$. Цікавими для вивчення є некласичні багатоточкові крайові задачі, які містять в собі похідні вищого порядку, ніж порядок диференціального рівняння. Наприклад, в роботі [2], [9] встановлено умови неперервної залежності розв'язку $y(\cdot)$ від параметра лінійної неоднорідної багатоточкової крайової задачі для систем диференціальних рівнянь у просторі $C^{(n)}$ всіх n раз неперервно диференційованих функцій.

У цій роботі досліджується некласична багатоточкова лінійна крайова задача на відрізку $[a, b]$ для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Слободецького. Мета роботи — доповнити результати роботи [10], тобто, встановити конструктивні достатні умови неперервності розв'язків за малим параметром даної задачі.

2. Постановка задачі

Нехай задані числа $p \in (1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $s := [s] + \{s\}$, де $[s] \in \mathbb{N}, 0 \leq \{s\} < 1$ і скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Введемо позначення: $W_p^s := W_p^s((a,b), \mathbb{C})$, $\left(W_p^s\right)^m := W_p^s((a,b), \mathbb{C}^m)$, $\left(W_p^s\right)^{m\times m} := W_p^s((a,b), \mathbb{C}^{m\times m})$ є простори Слободецького на інтервалі (a, b) відповідно комплекснозначних функцій, вектор-функцій і матриць-функцій.

Простір Слободецького W_p^s з нецілим додатним s означається [11] (п.2.5.1, зауваж. 4) як простір функцій f, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int_a^b \int_a^b \frac{|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy\right)^{1/p} < +\infty,$$

де $\|f\|_{[s],p}$ норма в просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Тут, звісно, $W_p^0 := L_p$. Функціонал $\|f\|_{s,p}$ є нормою на просторі W_p^s.

Розглянемо на (a,b) неоднорідну багатоточкову крайову задачу для систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, яка залежить від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, де $\varepsilon_0 > 0$

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \qquad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{l=0}^{[s]+1}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2}$$

де матриця-функції $A(\cdot;\varepsilon) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in \left(W_p^s\right)^m$, вектори $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$, матриці $\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а точки $t_i \in [a,b]$ мають відповідну серію точок $t_{i,j}$, де $i \in \overline{0,p}$, $j \in \overline{1,k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $l \in \overline{0,[s]+1}$.

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (1) в кожній точці $[a,b]$ (при $[s]=0$, майже скрізь). Крім того, $y(\cdot)$ повинна задовольняти рівність (2).

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами i і j зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра i. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $i \in \overline{0,p}$ усі точки $t_{i,j}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача:

$$L(0)y(t;0) = f(t,0), \qquad t \in [a,b], \tag{3}$$

$$B(0)y(\cdot,0) \equiv \sum_{l=0}^{[s]+1}\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)}(0)y^{(l)}(t_i(0);0) = c(0), \tag{4}$$

де матриці $\alpha_i^{(l)}(0) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_i \in [a,b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y(\cdot, \varepsilon) \mapsto B(\varepsilon) y(\cdot, \varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{5}$$

Умова (2) є некласичною, бо містить в собі похідні шуканої вектор-функції до порядку $[s]+1$ включно, отже, вищого порядку, ніж порядок диференціального рівняння.

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то закономірно виникає питання про неперервність розв'язків $y(\cdot, \varepsilon)$ такої задачі за параметром ε в банаховому просторі $\left(W_p^{s+1}\right)^m$. Мета роботи полягає в тому, щоб знайти достатні умови існування єдиного розв'язку та виконання граничного співвідношення

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{s+1,p} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{6}$$

3. Результати

Крайовій задачі (1), (2) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ відповідає лінійний обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^{s}\right)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{7}$$

Оскільки дана задача є тотальною щодо простору $\left(W_p^{s+1}\right)^m$, то, як показано в [10], оператор (7) є фредгольмовим з індексом нуль для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Надалі вважатимемо, що виконується

Припущення 1. Однорідна гранична крайова задача

$$L(0)y(t, 0) = 0, \quad t \in [a, b], \quad B(0)y(\cdot, 0) = 0, \tag{8}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмів оператор (7) є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0)) : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

Тому крайова задача (3),(4) має один і тільки один розв'язок $y(t,0) \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$ для довільно вибраних правих частин $f(t,0) \in \left(W_p^s\right)^m$ і $c(0) \in \mathbb{C}^m$.

Сформулюємо основний результат

Теорема 1. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{s,p} \to 0$;

2) $t_{i,j}(\varepsilon) \to t_i$ *для будь-яких* $i \in \overline{1,p}$ *та* $j \in \overline{1,k_i}$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_i^{(l)}$ *для будь-яких* $l \in \overline{0,[s]+1}$ *та* $i \in \overline{1,p}$;

4) $|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)|\,|t_{i,j}(\varepsilon) - t_i| \to 0$ *та* $|\alpha_{i,j}^{([s]+1)}(\varepsilon)| = O(1)$ *для будь-яких* $l \in \overline{0,[s]}$, $i \in \overline{1,p}$ *та* $j \in \overline{1,k_i}$;

5) $\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$ *для будь-яких* $l \in \overline{0,[s]+1}$ *та* $j \in \overline{1,k_0}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ оборотний. Якщо, окрім того,

6) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0$ *і* $c(\varepsilon) \to c(0)$ *при* $\varepsilon \to 0+$,

то єдиний розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$ задачі (1), (2) *задовольняє граничне співвідношення* (6).

Таким чином встановлені конструктивні достатні умови неперервності розв'язків за малим параметром задачі (1), (2). Це досягається завдяки тому, що умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від параметра і мають спільну граничну точку.

4. Доведення

Позначимо $M(W_p^s) := \{\varphi : \varphi f \in W_p^s, \forall f \in W_p^s\}$ — простір мультиплікаторів на класі W_p^s. При $s \in (0, \frac{1}{p}]$ і $p > 1$ простір W_p^s містить необмежені функції, які не будуть мультиплікаторами в W_p^s. Тому для вказаних значень s і p простір W_p^s не є алгеброю відносно множення. Тоді в роботі [10] було встановлено наступне

Твердження 1. *Нехай $p > 1$, $s \in (0,1)$. Тоді $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ і виконується нерівність*

$$\|\varphi\|_{M(W_p^s)} \le c\|\varphi\|_{1,p},$$

де c — деяка стала.

Оскільки задача (1), (2) є тотальною щодо простору $(W_p^{s+1})^m$, то, як показано в [10], вона має наступну граничну властивість.

Твердження 2. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови 1), 6) і*

(∗) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожної вектор-функції $y \in \left(W_p^{n+1}\right)^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість (6).

Для доведення основної теореми достатньо показати, що умова (∗) є наслідком умов 2) – 5) теореми. Це показано у наступних двох лемах.

Лема 1. *Нехай для задачі (1) – (2) виконуються при $\varepsilon \to +0$ умови 1) – 4) теореми 1. Тоді для довільної функції $y \in (W_p^{s+1})^m$ і будь-яких чисел $l \in \overline{0, [s]+1}$ та $i \in \overline{1,p}$ виконується гранична властивість*

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Доведення. Довільно виберемо $y \in (W_p^{s+1})^m$, $l \in \overline{0,[s]+1}$ та $i \in \overline{1,p}$. Маємо:

$$\left\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i)\right\| +$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_i) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) \left(y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\right)\right\| +$$

$$+\left\|\left(\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i\right) y^{(l)}(t_i)\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| +$$

$$+\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)} \| \cdot \|y\|_{s+1,p}.$$

Далі оцінимо перший доданок. $\forall\, l \in \overline{0,[s]}, \exists\, C > 0$:

$$\|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \leq C|t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|.$$

Оскільки $y^{[s]+1}(\cdot) \in W_p^1$, можемо записати

$$\|y^{(l-1)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l-1)}(t_i)\| = \left|\int_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} y^{(l)}(s) ds\right| \leq \int_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} |y^{(l)}(s)| ds \leq$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{t_i}^{t_{i,j}(\varepsilon)} |y^{(l)}(s)|^p ds \Bigg)^{1/p} \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q} = o(1) \cdot |t_{i,j}(\varepsilon) - t_i|^{1/q}$$

при $\varepsilon \to +0$, де $1/p + 1/q = 1$. Тоді з умови 3) для будь-якого $l \in \overline{0, [s]+1}$ випливає, що

$$\sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_i)\| \to +0.$$

За умовою 2), у другому доданку $\forall l \in \overline{0, [s]+1}$:

$$\Bigg\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_i^{(l)} \Bigg\| \cdot \|y\|_{s+1,p} \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай задача* (1) – (2) *задовольняє при* $\varepsilon \to +0$ *умову 5) теореми 1. Тоді для довільної функції* $y \in (W_p^{s+1})^m$ *і будь-яких чисел* $l \in \overline{0, [s]+1}$ *та* $i \in \overline{1, p}$ *виконується гранична властивість*

$$\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Доведення. Виберемо довільно $y \in (W_p^{s+1})^m$, $l \in \overline{0, [s]+1}$ та $j \in \overline{1, k_i}$. За умовою леми,

$$\Bigg\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \Bigg\| \leq \sum_{j=1}^{k_i} \|\alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|y\|_{s+1,p} \to 0. \tag{9}$$

Запишемо

$$\|B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) - B(0)y(\cdot;0)\| \leq$$

$$\Bigg\| \sum_{l=0}^{[s]+1} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{[s]+1} \sum_{i=0}^{p} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \Bigg\| \leq$$

$$\left\| \sum_{l=0}^{n+r-1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{[s]+1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{l=0}^{[s]+1} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{[s]+1} \sum_{i=1}^{p} \left\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{[s]+1} \left\| \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{0,j}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{i,j}(\varepsilon)) \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

на підставі формули (9), що і треба було довести.

Як уже зазначалося, теорема 1 є негайним наслідком доведених лем.

Авторка дякує В. А. Михайлецю за керівництво роботою.

Література

[1] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2009. – 148 с.

[2] *Чеханова Г. А.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних: Дис. канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2015. – 122 с.

[3] *Кодлюк Т. І.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространстве Соболева // Доп. НАН України.– 2012.– № 11. – С. 15–19.

[4] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. –**10**, № 2. – С. 260–279.

[5] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалів і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.

[6] *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 5. – С. 1022–1025.

[7] *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболєва Дис. канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2013. – 155 с.

[8] *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 101–112.

[9] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.

[10] *Hnyp E. V.* Continuity with respect to a parameter of solutions of one-dimentional linear boundary value problem on the Slobodetsky space // Ukrainian Math. J. – 2016. – № 6.

[11] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.