Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 88–100

УДК 517.956.223

Г. М. Власик

(Інститут математики НАН України, Київ)

Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік

annawlasik@gmail.com

We obtain exact order estimates of the norms of generalized derivatives of the Dirichlet type kernels with an arbitrary choice of harmonics in the space L_q.

Отримано точні за порядком оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік у просторі L_q.

1. Вступ

У роботі досліджуються можливості тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік по відношенню до відомої проблеми Літтлвуда, а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Більш детальніше на цьому зупинимося нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення, які будуть нами використовуватися.

Нехай L_q — простір 2π–періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), функцій f на відрізку $[-\pi, \pi]$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|\,, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Далі нехай $\psi(\tau) \neq 0, \tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \beta \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 25] (див. також [2, Т.І, с. 132]), назвемо (ψ, β)–похідною функції f і позначимо f_β^ψ. Зауважимо, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (ψ, β)–похідна функції f співпадає з її (r, β)–похідною (позначення f_β^r) в сенсі Вейля–Надя.

Через Ψ позначимо множину функцій $\psi(\tau), \tau \in \mathbb{N}$, що задовольняють умови:

1) $\psi(\tau)$ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \le C.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\frac{1}{\tau^r}, r > 0;\ \frac{\ln^\gamma(\tau+1)}{\tau^r},\ \gamma \in \mathbb{R},\ r > 0, \tau \in \mathbb{N}$, та ін.

Надалі, для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо тільки $B \leq C_2 A$ ($B \geq C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$).

Зупинимося коротко на історії досліджуваного питання. У 1948 р. Дж. Літтлвуд висловив гіпотезу [3]:

для будь-якого набору цілих чисел $j_1, ..., j_m$ справедлива нерівність

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right\|_1 \gg \ln m.$$

Зазначимо, що для класичного ядра Діріхле добре відомо (див., наприклад, [4, с. 25]), що

$$\|D_m\|_1 = \left\| \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \right\|_1 \gg \ln m.$$

Позитивний розв'язок гіпотези Літтлвуда незалежно і майже одночасно було одержано С. В. Конягіним [5] та Мак-Гі, Піно і Смітом [6] у 1981 р. Згодом В. М. Тихомиров у огляді [7] запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини виду

$$L_m(r,q) = \inf_{j_n \in K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^r \right\|_q, \tag{1}$$

де K_m — довільний набір різних цілих чисел $j_1, ..., j_m$, а похідна порядку $r \geq 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Величину (1), наслідуючи В. Є. Майорова, далі будемо називати константою Лебега–Літтлвуда. Перші оцінки величини $L_m(r,q)$ були отримані В. Є. Майоровим [8]. Згодом Е. С. Белінським [9] було доповнено результати з [8]. Також дослідження величини (1) було поширено і на багатовимірний випадок у роботах [10, 11].

Зауважимо, що раніше порядкові оцінки норм похідних класичного ядра Діріхле D_m у просторі L_q, $1 < q < \infty$, як в одновимірному, так і в багатовимірному випадку було отримано Е. М. Галєєвим [12].

Природно звернути увагу на порядкові оцінки норм класичного ядра Діріхле та ядра типу Діріхле, гармоніки якого беруться в довільному порядку. Із робіт [8] та [9] для ядра типу Діріхле випливає, що

$$L_m(0,1) \asymp \ln m;$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q \leq 2;$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1/2}, \quad 2 < q < \infty.$$

У той же час, для класичного ядра Діхріхле добре відомо (див., наприклад, [4, с. 25.]), що

$$\|D_m\|_1 \asymp \ln m;$$

$$\|D_m\|_q \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q < \infty; \tag{2}$$

$$\|D_m\|_\infty \asymp m.$$

Метою нашої роботи є встановлення порядкових оцінок величини

$$L_m(\psi,\beta,q) = \inf_{j_n \in K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)_{\beta}^{\psi} \right\|_q$$

при $1 < q < \infty$ і певних умовах на послідовність $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$.

2. Допоміжні твердження

У цьому пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які будуть нами використовуватися при доведенні отриманих результатів.

Нехай $T(m)$ — множина поліномів t виду

$$T(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Тоді має місце твердження.

Твердження А [2, Т.II, с. 115]. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi(\tau), \tau \in \mathbb{N}$, — *довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел. Тоді для довільного полінома* $t \in T(m)$ *справедлива оцінка*

$$\|t_\beta^\psi\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_q.$$

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{ k \in \mathbb{Z} : \ [2^{s-1}] \le |k| < 2^s \right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема А (Літтлвуда–Пелі) (див., наприклад, [4, с. 17]). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_3(q), C_4(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_3(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_4(q)\|f\|_q.$$

Теорема Б (Хаусдорфа–Юнга) (див., наприклад, [4, с. 16]). *Нехай* $1 < q \le 2$ *і* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L_q$

$$\|f\|_q \ge \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^{q'} \right)^{1/q'}.$$

Якщо послідовність $\{c_k\}$ *є такою, що*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^q < \infty,$$

то тоді існує функція $f \in L_{q'}$ для якої $\hat{f}(k) = c_k$ і

$$\|f\|_{q'} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^q \right)^{1/q}.$$

3. Основні результати

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — додатня і незростаюча послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$ і $2 < q < \infty$. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, \beta, q) \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}. \tag{3}$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$ не зростає, то

$$L_m(\psi, \beta, q) \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху в (3) у більш загальному випадку, а саме для незростаючих функцій $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, і $1 < q < \infty$.

Розглянемо ядро Діріхле $D_m(x) = \sum\limits_{|k| \leq m} e^{ikx}$ й оцінимо зверху величину $\|(D_m)^{\psi}_{\beta}\|_q$. Оскільки функція $D_m(x)$ — тригонометричний поліном із множини $T(m)$, то, скориставшись твердженням A, отримаємо

$$\|(D_m)^{\psi}_{\beta}\|_q \ll \psi^{-1}(m) \|D_m\|_q.$$

Звідси, згідно зі співвідношенням (2), будемо мати

$$L_m(\psi, \beta, q) \ll \|(D_m)^{\psi}_{\beta}\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Тепер встановимо відповідну оцінку знизу. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$,

$0 < j_1 < ... < j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тоді, використовуючи теорему А та нерівність

$$\left(\sum_l |a_l|^2 \right)^{1/2} \geq \left(\sum_l |a_l|^q \right)^{1/q}, \quad 2 \leq q < \infty, \tag{4}$$

отримаємо

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} e^{ij_k x} \right)_\beta^\psi \right\|_q \geq$$

$$\geq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_k \in K_m} \psi^{-1}(j_k) e^{ij_k x} \right|^q dx \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right|^2 \right)^{q/2} dx \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right|^q dx \right)^{1/q}. \tag{5}$$

Далі, покладемо

$$\Delta_s = [\pi 2^{-(s+3)}, \pi 2^{-(s+2)}]$$

і зауважимо, що оскільки $j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)$ і $x \in \Delta_s$, то $\cos j_{k_s} x \geq \frac{1}{2}$. Тоді для співвідношення (5) маємо

$$L_m(\psi, \beta, q) \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) \cos(j_{k_s} x) \right|^q dx \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \int_{\Delta_s} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) \cos j_{k_s} x \right|^q dx \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\Delta_s| \Bigg| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) \Bigg|^q \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s-1}) 2^{-s} m_s^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s}) 2^{-s} m_s^q \right)^{1/q}. \tag{6}$$

Нехай

$$I_1 = \psi^{-q}(2^s) 2^{-s} m_s^q, \tag{7}$$

де $m_s \le 2^s$ і

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \le m \le 2^{\mu}$ і

$$\sum_{s \le \mu} m_s \le \sum_{s \le \mu} 2^s \le C_5 2^{\mu} \le \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{s > \mu} m_s \ge C_6 \frac{m}{2}. \tag{8}$$

Крім цього, безпосередньо з (7) випливає, що

$$m_s = I_1^{1/q} \psi(2^s) 2^{s/q} \tag{9}$$

і тому, згідно з (8) і (9), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримаємо

$$m \ll \sum_{s > \mu} m_s = I_1^{1/q} \sum_{s > \mu} \psi(2^s) 2^{s/q} =$$

$$= I_1^{1/q} \sum_{s > \mu} \psi(2^s) 2^{s/q} 2^{s\varepsilon} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_1^{1/q}\psi(2^\mu)2^{\mu/q}2^{\mu\varepsilon}\sum_{s>\mu}2^{-s\varepsilon}\ll$$

$$\ll I_1^{1/q}\psi(2^\mu)2^{\mu/q}2^{\mu\varepsilon}2^{-\mu\varepsilon}=$$

$$=I_1^{1/q}\psi(2^\mu)2^{\mu/q}. \tag{10}$$

З (10) знаходимо

$$I_1\gg\psi^{-q}(2^\mu)2^{-\mu}m^q$$

або

$$I_1\gg\psi^{-q}(m)m^{-1}m^q=\psi^{-q}(m)m^{q-1}. \tag{11}$$

Таким чином, співставивши (6), (7) і (11), приходимо до шуканої оцінки знизу:

$$L_m(\psi,\beta,q)\gg\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\psi^{-q}(m)m^{q-1}\right)^{1/q}\gg\psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\psi(\tau)$, $\tau\in\mathbb{N}$, — додатня і незростаюча послідовність, $\beta\in\mathbb{R}$ і $1<q\le 2$. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi,\beta,q)\ll\psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi(\tau)\in\Psi$, $\tau\in\mathbb{N}$, і, крім того, існує таке $\varepsilon>0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^\varepsilon$ не зростає, то

$$L_m(\psi,\beta,q)\asymp\psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху встановлена при доведенні попередньої теореми в більш загальному випадку, а саме для $1<q<\infty$.

Одержимо відповідну оцінку знизу. При цьому, як і при доведенні оцінки знизу в теоремі 1, будемо вважати, що

$K_m = \{j_1, ..., j_m\}$, $0 < j_1 < ... < j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тоді, використовуючи теорему А та нерівність (4), отримаємо

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} e^{ij_k x} \right)^{\psi}_{\beta} \right\|_q \geq$$

$$\geq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_k \in K_m} \psi^{-1}(j_k) e^{ij_k x} \right|^q dx \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right|^2 \right)^{q/2} dx \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right|^q dx \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left\| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right\|_q^q \right)^{1/q}. \qquad (12)$$

Далі, використовуючи теорему Б, з (12) отримаємо

$$L_m(\psi, \beta, q) \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left\| \sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(j_{k_s}) e^{ij_{k_s} x} \right\|_q^q \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{j_{k_s} \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-q'}(j_{k_s}) \right)^{q/q'} \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left(\psi^{-q'}(2^{s-1}) m_s \right)^{q/q'} \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s-1}) m_s^{q/q'} \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s}) m_s^{q/q'} \right)^{1/q}. \tag{13}$$

Нехай

$$I_2 = \psi^{-q}(2^s) m_s^{q/q'}, \tag{14}$$

де $m_s \le 2^s$ і

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \le m \le 2^{\mu}$ і

$$\sum_{s\le\mu} m_s \le \sum_{s\le\mu} 2^s \le C_7 2^{\mu} \le \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинне виконуватися співвідношення

$$\sum_{s>\mu} m_s \ge C_8 \frac{m}{2}. \tag{15}$$

Крім цього, безпосередньо з (14) випливає, що

$$m_s = I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^s). \tag{16}$$

і тому, згідно з (15) і (16), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримаємо

$$m \ll \sum_{s>\mu} m_s = I_2^{q'/q} \sum_{s>\mu} \psi^{q'}(2^s) =$$

$$= I_2^{q'/q} \sum_{s>\mu} \psi^{q'}(2^s) 2^{s\varepsilon} 2^{-s\varepsilon} \ll I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^{\mu}) 2^{\mu\varepsilon} \sum_{s>\mu} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^{\mu}) 2^{\mu\varepsilon} 2^{-\mu\varepsilon} = I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^{\mu}). \tag{17}$$

З (17) знаходимо

$$I_2 \gg \psi^{-q}(2^\mu)m^{q/q'}$$

або

$$I_2 \gg \psi^{-q}(m)m^{q/q'}. \tag{18}$$

Таким чином, співставивши (13), (14) і (18), приходимо до шуканої оцінки знизу:

$$L_m(\psi, \beta, q) \gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(m)m^{q/q'} \right)^{1/q}$$

$$\gg \psi^{-1}(m)m^{1/q'} = \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $\beta = 0$, $r > 1/q$ при $2 < q < \infty$ і $r > 0$ при $1 < q \leq 2$, то оцінки відповідних величин встановлено у роботі [8].

Зауваження 2. З одержаних результатів у теоремах 1 – 2 випливає, що норми (ψ, β)–похідних у метриці простору L_q, $1 < q < \infty$, при відповідних обмеженнях на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, як для класичного ядра Діріхле, так і для ядра типу Діріхле з довільним вибором гармонік мають однакові порядки.

Література

[1] *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Т. I. — 427 с.; Т. II. — 468 с.

[3] *Hardy G. H., Littlewood J. A.* A new proof of a theorem of rearrangements // Jour. of the L. M. Soc. — 1948. — **23**, no. 91. — P. 163–168.

[4] *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.

[5] *Конягин С. В.* О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — **45**, № 2. — С. 243–265.

[6] *McGehe O. C., Pigno L., Smith B.* Hardy inequality and L^1-norm of exponential sums // Ann. Math. — 1981. — **113**, № 3. — P. 613–618.

[7] *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. — 1987. — **14**. — С. 103–260.

[8] *Майоров В. Е.* Неравенства Бернштейна–Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам // Мат. заметки. — 1990. — **47**, № 6. — С. 55–61.

[9] *Белинский Э. С.* Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Мат. заметки. — 1991. — **49**, № 1. — С. 12–18.

[10] *Galeev E. M.* Approximation of periodic functions of one and several variables // Constructive theory of Functions'87. — Sofia. — 1988. — P. 138 – 144.

[11] *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешаных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех. — 1991. — **2**. — С. 3–7.

[12] *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α–ядра Дирихле в смешаной норме // Матем. сб. — 1982. — **117(159)**, № 1. — С. 32–43.