Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 55–87

УДК 517.518, 519.62

Я. П. Василенко

(Тернопільський національний педагогічний університет, Тернопіль)

Про використання ітераційного процесу Ньютона-Канторовича в апроксимаційно-ітеративному методі

yava@tnpu.edu.ua

In the paper, we design and prove a way to use approximately-iterative method to receive uniform approximations for solutions to stiff problems for ordinary differential equations based on the iterative Newton-Kantorovich process. We receive an estimate for the deviation of approximative polynomials from the exact solution in the uniform metric.

У роботі розроблений і обґрунтований спосіб застосування апроксимаційно-ітеративного методу для отримання рівномірних наближень розв'язків жорстких задач для звичайних диференціальних рівнянь на базі ітераційного процесу Ньютона-Канторовича. Отримана оцінка відхилення наближаючих поліномів від точного розв'язку у рівномірній метриці.

У своїх працях Дзядик В. К. [1–3] запропонував та теоретично обґрунтував апроксимаційно-ітеративний метод (АІ-метод) побудови поліноміального наближення розв'язків задачі Коші виду

$$y' = f(x,y), \; y(x_0) = y_0, \; x \in [x_0, x_0 + h]. \tag{1}$$

В подальшому Дзядиком В. К. [1] та його учнями цей метод був розповсюджений на розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь, гіперболічних рівнянь другого порядку в $\mathbb{R}^2$, крайових задач [4] тощо.

Стосовно функції $f(x, y)$ будемо припускати, що вона:

i) визначена на деякому прямокутнику $P = [x_0, x_0 + h] \times [y_0 - H, y_0 + H]$;

ii) є аналітичною по обох змінних в $intP$ і неперервною на P;

iii) на деякому малому інтервалі із $[x_0, x_0 + h]$ її похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ є достатньо великою по абсолютній величині.

Як правило, задачі виду (1) з такими властивостями функції $f(x, y)$ називають жорсткими [5, 6] і в останні десятиліття їх відносять до числа найбільш важливих в теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [7, 8]).

У даному дослідженні до розв'язування жорстких задач виду (1) застосовується АІ-метод, в якому ітераційний процес Пікара подібно [9] замінюється на процес Ньютона-Канторовича (див., наприклад, [10–13]). Встановлена оцінка відхилення отриманих многочленних наближень від точного розв'язку в рівномірній метриці. Аналізуються результати тестових прикладів.

Ітераційний процес Ньютона-Канторовича

Для знаходження хорошого наближеного розв'язку задачі Коші (1) або, що те саме, рівносильного інтегрального рівняння Вольтера

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{2}$$

замість ітераційного процесу Пікара застосуємо ітераційний процес Ньютона-Канторовича. З цією метою розглянемо допоміжний нелінійний оператор $B : K(y_0, H) \to C[x_0, x_0 + h]$, що діє за формулою

$$(By)(x) = y(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \qquad (3)$$

де через $K(y_0, H)$ позначена куля в $C[x_0, x_0 + h]$ деякого радіуса H з центром в точці y_0, тобто

$$K = K(y_0, H) = \{y \in C[x_0, x_0 + h] :\| y(x) - y_0 \|_{C[x_0,x_0+h]} \leq H\}.$$

Оскільки оператор B володіє тією властивістю, що, якщо $y^*(x)$ є розв'язком рівняння (2), то $(By^*)(x) \equiv 0$, і навпаки, із того, що $By^* = 0$ слідує, що $y^*(x)$ є розв'язком рівняння (2), то замість інтегрального рівняння (2) розглядатимемо еквівалентне операторне рівняння

$$By = 0. \qquad (4)$$

Це рівняння, слідуючи Канторовичу Л. В. [10] (див. також [12, 13]), будемо розв'язувати наступним чином. Покладемо $y^0 = y^0(x) \equiv y_0$ і після цього кожне наступне наближення $y^\nu(x)$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ будуватимемо за формулою (яка узагальнює відому ітеративну формулу Ньютона $x_{n+1} = x_n - \varphi(x_n)/\varphi'(x_n)$ розв'язування рівняння $\varphi(x) = 0$):

$$y^{\nu+1} = y^\nu - [B'_{y^\nu}]^{-1} By^\nu = 0, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

де через B'_{y^ν} позначена похідна Фреше оператора B в точці y^ν.

Зауважимо, що в силу аналітичності функції $f(x, y)$ похідна Фреше B'_y оператора B існує $\forall y \in K(y_0, H)$ і задається на множині елементів $z \in C[x_0, x_0 + h]$ за допомогою рівності

$$(B'_y z)(x) = z(x) - \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t)) z(t)\, dt. \qquad (6)$$

Похідною Фреше оператора B (див., наприклад, [9–11]) в точці y називають лінійний оператор B'_y із $C[x_0, x_0 + h]$ в $C[x_0, x_0 + h]$ такий, що $\|B(y + z) - By - B'_y z\|_{C[x_0,x_0+h]} \to 0$ при $\|z\|_{C[x_0,x_0+h]} \to 0$.

Доведення цієї рівності випливає з того, що з згідно формулою скінчених приростів для довільних $y(x)$ і $z(x)$ таких, що $y \in K(y_0, H)$ і $y + z \in K(y_0, H)$,

$$f(x, y(x)+z(x)) - f(x, y(x)) = f'_y(x, y(x)+\theta z(x))z(x), \ (0 < \theta < 1).$$

Тому

$$B(y+z)(x) - B(y)(z) = y(x) + z(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t) + z(t))\, dt -$$

$$-(y(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt) = z(x) - \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t) + \theta z(t))\, dt.$$

І, отже,

$$\|B(y+z) - By - B'_y z\|_{C[x_0, x_0+h]} =$$

$$= \| \int\limits_{x_0}^{x} [f'_y(t, y(t)) - f'_y(t, y(t) + \theta z(t))]\, dt\|_{C[x_0, x_0+h]} \to 0$$

при $\|z\|_{C[x_0, x_0+h]} \to 0$.

В подальшому нам буде потрібна наступна лема.

Лема 1. *Лінійний неперервний оператор $B'_y : C[x_0, x_0 + h] \to C[x_0, x_0 + h]$ при $\forall y \in K(y_0, H)$ має неперервний обернений оператор $[B'_y]^{-1}$, норма якого обмежена числом e^q:*

$$\| \, [B'_y]^{-1} \, \| \leq e^q, \tag{7}$$

де $q := \| \, f'_y \, \|_{C(P)} \cdot h$.

Доведення. Позначимо через $I : C[x_0, x_0 + h] \to C[x_0, x_0 + h]$ оператор виду

$$(Iz)(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))z(t)\, dt, \tag{8}$$

де $y \in K(y_0, H)$ і z — довільний елемент із $C[x_0, x_0 + h]$. Тоді, в силу (6) бачимо, що

$$B'_y = E - I,$$

де E — одиничний оператор.

Тому, якщо розглянути операторний ряд

$$V = E + I + I^2 + I^3 + \dots, \tag{9}$$

для якого з врахуванням (8) маємо

$$V(z)(x) = z(x) + \int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))\, dt +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t)) \int_{x_0}^{t} f'_y(s, y(s)) z(s)\, dsdt + \dots .$$

Приймаючи до уваги очевидні нерівності

$$\|Iz\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \| f'_y \|_{C(P)} \cdot h \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]} =$$
$$= q \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]},$$
$$\|I^2 z\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \| f'_y \|^2_{C(P)} \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]} =$$
$$= \frac{q^2}{2!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]},$$
$$\|I^3 z\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \| f'_y \|^3_{C(P)} \cdot \frac{h^3}{3!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]} =$$
$$= \frac{q^3}{3!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]},$$
$$\dots$$
$$\|I^n z\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \| f'_y \|^n_{C(P)}\ 3 \cdot \frac{h^n}{n!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]} =$$
$$= \frac{q^n}{n!} \cdot \| z \|_{C[x_0,x_0+h]},$$

або, що теж саме, нерівності

$$\|I\| \leq q, \|I^2\| \leq \frac{q^2}{2!}, \dots, \|I^n\| \leq \frac{q^n}{n!}, \dots$$

бачимо, що ряд (9) по нормі простору лінійних неперервних операторів $L(C[x_0, x_0+h], C[x_0, x_0+h])$, які відображають $C[x_0, x_0+h]$ в $C[x_0, x_0+h]$, мажорується збіжним числовим рядом

$$I + q + \frac{q^2}{2!} + \dots + \frac{q^n}{n!} + \dots = e^q.$$

Тому в силу повноти простору $L(C[x_0, x_0+h], C[x_0, x_0+h])$ ряд (9) збігається і для його суми V виконується нерівність

$$\|V\| \leq e^q. \tag{10}$$

Оскільки

$$V \cdot (E - I) = (E + I + I^2 + \dots + I^n + \dots) \cdot (E - I) =$$
$$= (E + I + \dots + I^n + \dots) - (I + I^2 + \dots + I^{n+1} + \dots) = E$$

і аналогічно

$$(E - I) \cdot V = E,$$

то

$$V = [E - I]^{-1} = [B'_y]^{-1} \quad (y \in K(y_0, H))$$

і, отже, з врахуванням (10) дійсно має місце нерівність

$$\| [B'_y]^{-1} \| = \| V \| \leq e^q.$$

Цим лема 1 доведена. □

Для компактності подальшого викладу введемо позначення

$$L_0 := \| f \|_{C(P)}, \quad L_1 := \| f'_y \|_{C(P)}, \quad L_2 := \| f''_{yy} \|_{C(P)} .$$

Друга похідна Фреше оператора B в точці y, згідно з означенням [10], є білінійним оператором B''_y, який, як легко бачити, у нашому випадку для довільних $u, v \in C[x_0, x_0 + h]$ задається рівністю

$$(B''_y uv)(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f''_{yy}(t, y(t))u(t)v(t)\,dt. \tag{11}$$

Тому

$$\| B''_y \| \leq L_2 h. \tag{12}$$

Крім того, із врахуванням (7) і (3) маємо

$$\begin{gathered} \| [B'_{y^0}]^{-1} \cdot By^0 \|_{C[x_0, x_0+h]} \leq \\ \leq \| [B'_{y^0}]^{-1} \| \cdot \| By^0 \|_{C[x_0, x_0+h]} \leq e^q L_0 h. \end{gathered} \tag{13}$$

Доведення збіжності ітераційного процесу (5) до розв'язку рівняння (4) проведемо, слідуючи методу, запропонованому в роботах Канторовича Л. В. [10, 12] (див. також [9]) і використовуючи конкретний вигляд оператора B.

Попередньо розглянемо дві наступні визначені за індукцією послідовності $\{\eta_\nu\}$ і $\{\chi_\nu\}$

$$\begin{gathered} \eta_0 := e^q L_0 h \ \ (q = L_1 h), \ \ \chi_0 := e^q L_2 h \cdot \eta_0, \\ \eta_{\nu+1} := \frac{1}{2} \cdot \eta_\nu \chi_\nu, \ \ \chi_\nu := e^q L_2 h \cdot \eta_\nu, \ \ \nu = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{14}$$

Лема 2. *Для чисел* $\{\eta_\nu\}$, $\{\chi_\nu\}$ *при довільних* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливі співвідношення*

$$\eta_\nu = \frac{1}{2^{2^\nu - 1}} \cdot e^{(2^{\nu+1}-1)q} \cdot L_2^{2^\nu - 1} \cdot L_0^{2^\nu} h^{2^{\nu+1}-1}, \tag{15}$$

$$\chi_\nu = \frac{1}{2^{2^\nu - 1}} \cdot e^{2^{\nu+1} q} \cdot L_2^{2^\nu} \cdot L_0^{2^\nu} h^{2^{\nu+1}}, \tag{16}$$

$$\chi_{\nu+1} = \frac{\chi_\nu^2}{2},$$

$$\chi_\nu = \frac{\chi_0^{2^\nu}}{2^{2^\nu - 1}}, \tag{17}$$

$$\eta_\nu = 2\eta_0 \cdot \frac{\chi_0^{2^\nu - 1}}{2^{2^\nu}}. \tag{18}$$

Доведення справедливості цих рівностей легко встановлюється за допомогою математичної індукції.

Теорема 3. *Нехай в рівнянні* (2) *(або, що те саме, в задачі Коші* (1)*) функція*

$$f \in A(intP) \cap C(P)$$

і, крім того,

$$\chi_0 := e^{2q} \cdot L_2 L_0 \cdot h^2 < 1, \quad H > H_0 = 2\eta_0 = 2e^q \cdot L_0 h. \tag{19}$$

Тоді послідовні наближення (5) *сходяться до розв'язку рівняння* (4) *і ці розв'язки знаходяться в кулі* $K(y_0, H_0)$.

Доведення. Покладемо $H_\nu = 2\eta_\nu$ і покажемо, що при будь-яких $\nu = 1, 2, \ldots$ мають місце співвідношення

$$\| [B'_{y^0}]^{-1} \cdot By^0 \|_{C[x_0, x_0+h]} \leq \eta_\nu, \tag{20}$$

$$K(y^\nu, H_\nu) \subset K(y^{\nu-1}, H_{\nu-1}), \tag{21}$$

де $K(y^\nu, H_\nu) = \{y \in C[x_0, x_0+h] : \| y - y_\nu \|_{C[x_0,x_0+h]} \leq H_\nu\}$.

Справді, припустимо, що співвідношення (20) і (21) є вірними при $\nu = \mu$. Тоді, згідно з (5)

$$\| y^{\mu+1} - y^\mu \| \leq \| [B'_{y^\mu}]^{-1} \cdot By^\mu \| \leq \eta_\mu,$$

і $\eta_\mu = \dfrac{1}{2} \cdot H_\mu < H_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$, то $y^{\mu+1} \in K(y^\mu, H_\mu)$. Отже, тим більше $y^{\mu+1} \in K(y_0, H)$. Тому рівність (5) має зміст і при $\nu = \mu + 1$.

Із тотожності

$$By^{\mu+1} = By^{\mu+1} - By^\mu - B'_{y^\mu}(y^{\mu+1} - y^\mu)$$

і нерівності (див., наприклад, [10])

$$\| By^{\mu+1} - By^\mu - B'_{y^\mu}(y^{\mu+1} - y^\mu) \|_{C[x_0,x_0+h]} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \cdot \| B''_{y^\mu + \theta z^\mu} \| \cdot \| y^{\mu+1} - y^\mu \|_{C[x_0,x_0+h]},$$
$$(z^\mu = y^{\mu+1} - y^\mu, \quad 0 < \theta < 1).$$

із врахуванням (12) отримуємо

$$\| By^{\mu+1} \|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \frac{L_2 h}{2} \cdot \eta_\mu^2. \tag{22}$$

Зауважимо, що похідна $B''_{y^\mu+\theta z^\mu}$ існує в силу того, що

$$\| y^\mu + \theta z^\mu - y_0 \| = \| \theta y^{\mu+1} + (1-\theta) y^\mu - \theta y_0 - (1-\theta) y_0 \| \leq$$
$$\leq \theta H + (1-\theta) H = H$$

і, отже, $y^\mu + \theta z^\mu \in K(y_0, H_0)$.

На основі (10) і (22) робимо висновок, що

$$\| [B'_{y^{\mu+1}}]^{-1} \cdot By^{\mu+1} \|_{C[x_0,x_0+h]} \leq \frac{e^q \cdot L_2 h}{2} \cdot \eta_\mu^2 = \frac{\chi_\mu \cdot \eta_\mu}{2} = \eta_{\mu+1}.$$

Для доведення включення (21) зауважимо, що $H_\mu + \eta_\mu \leq H_{\mu-1}$. Справді,

$$H_\mu + \eta_\mu = 2\eta_\mu + \eta_{\mu-1} = (\chi_{\mu-1} + 1)\eta_{\mu-1} \leq 2\eta_{\mu-1} = H_{\mu-1}.$$

Тому включення (21) має місце в силу того, що

$$\forall y \in K(y^\mu, H_\mu) \quad \| y - y^{\mu-1} \| \leq \| y - y^\mu \| + \| y^\mu - y^{\mu-1} \| \leq$$
$$\leq H_\mu + \eta_\mu \leq H_{\mu-1}.$$

Таким чином, всі послідовні наближення, задані рівністю (5), мають зміст.

Далі, оскільки згідно з (14) і (17)

$$H_{\nu+1} = 2\eta_{\nu+1} = \eta_\nu \chi_\nu = \eta_\nu \cdot \frac{\chi_0^{2^\nu}}{2^{2^\nu - 1}} = 2\eta_\nu \cdot \frac{\chi_0^{2^\nu}}{2^{2^\nu}} <$$
$$< 2\eta_\nu \cdot \frac{1}{2^{2^\nu}} \leq \frac{H_\mu}{2},$$

то відповідно до теореми про вкладені кулі послідовні наближення y^ν сходяться до деякого елемента $y^* \in K(y^0, H_0)$.

Нарешті, переходячи у тотожності

$$By^{\nu} + B'_{y^{\nu}}(y^{\nu+1} - y^{\nu}) = 0,$$

яка рівносильна (5), до границі при $\nu \to \infty$, робимо висновок про те, що y^* є розв'язком рівняння (5). Теорему доведено. $\square$

Оцінимо похибку, яка отримується при наближенні розв'язку рівняння (4) за допомогою послідовних наближень (5).

Вводячи позначення

$$z^{\nu} = y^{\nu+1} - y^{\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

із врахуванням (5) отримаємо

$$z^{\nu} = -[B'_{y^{\nu}}]^{-1} \cdot By^{\nu} = -[B'_{y^{\nu}}]^{-1} \cdot B(y^{\nu-1} + z^{\nu-1}).$$

Використовуючи формулу Тейлора (див., наприклад, [15]), для функції $f(x, y^{\nu-1}(x) + z^{\nu-1}(x))$ по другому аргументу отримаємо

$$\begin{gathered}
(B(y^{\nu-1} + z^{\nu-1}))(x) = \\
= y^{\nu-1}(x) + z^{\nu-1}(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y^{\nu-1}(t) + z^{\nu-1}(t))\, dt = \\
= y^{\nu-1}(x) + z^{\nu-1}(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y^{\nu-1}(t))\, dt - \\
- \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y^{\nu-1}(t)) z^{\nu-1}(t)\, dt - \\
- \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f''_{yy}(t, y^{\nu-1}(t) + \theta z^{\nu-1}(t))[z^{\nu-1}(t)]^2\, dt = \\
= (By^{\nu-1})(x) + (B'_{y^{\nu-1}} z^{\nu-1})(x) + \frac{1}{2} \cdot (B''_{y^{\nu-1}+\theta z^{\nu-1}} z^{\nu-1} z^{\nu-1})(x) \\
(0 \le \theta \le 1),
\end{gathered}$$

а з врахуванням (5)

$$B(y^{\nu-1}+z^{\nu-1}) = \frac{1}{2}\cdot B''_{y^{\nu-1}+\theta z^{\nu-1}} z^{\nu-1} z^{\nu-1}. \tag{23}$$

Друга похідна Фреше оператора B в точці $y^{\nu-1}+\theta z^{\nu-1}$ існує, оскільки, міркуючи так само, як і при доведенні теореми 3, легко переконаємося, що $y^{\nu-1}+\theta z^{\nu-1} \in K(y_0, H)$.

Таким чином, елементи z^ν задовольняють рекурентні співвідношення

$$z^\nu = -\frac{1}{2}\cdot [B'_{y^\nu}]^{-1}\cdot B''_{y^{\nu-1}+\theta z^{\nu-1}} z^{\nu-1} z^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Використовуючи (24), рівність (5) при $\nu = 0$, а також лему 1 і введені раніше позначення, послідовно отримаємо

$$|z^0(x)| \le e^q \cdot L_0 \cdot |x - x_0| \le e^q \cdot L_0 h, \quad q = L_1 h,$$

$$|z^1(x)| \le \frac{1}{2}\cdot e^q \cdot |\int\limits_{x_0}^{x} f''_{yy}(t, y^0(t) + \theta z^0(t)) \cdot [z^0(t)]^2\, dt| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot e^{3q} \cdot L_2 L_0 \cdot \frac{|x - x_0|^3}{3} \le \frac{1}{2}\cdot e^{3q}\cdot L_2 L_0 \cdot \frac{h^3}{3},$$

$$|z^2(x)| \le \frac{1}{2}\cdot e^q \cdot |\int\limits_{x_0}^{x} f''_{yy}(t, y^1(t) + \theta z^1(t)) \cdot [z^1(t)]^2\, dt| \le$$

$$\le \frac{1}{2^3}\cdot e^{7q}\cdot L_2^3 L_0^4 \cdot \frac{|x-x_0|^7}{3^2\cdot 7} \le \frac{1}{2}\cdot e^{7q}\cdot L_2^3 L_0^4 \cdot \frac{|x-x_0|^7}{3!\cdot 4!} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot e^{7q}\cdot L_2^3 L_0^4 \cdot \frac{h^7}{3!\cdot 4!},$$

$$|z^3(x)| \le \frac{1}{2^7}\cdot e^{15q}\cdot L_2^7 L_0^8 \cdot \frac{|x-x_0|^{15}}{(3!)^2\cdot 4!\cdot 5!} \le$$

$$\le \frac{1}{2^7}\cdot e^{15q}\cdot L_2^7 L_0^8 \cdot \frac{h^{15}}{(3!)^2\cdot 4!\cdot 5!}.$$

По індукції легко отримуємо, що

$$|z^\nu(x)| \le \frac{1}{2^{2^{\nu-1}-1}} \cdot e^{(2^{\nu+1}-1)q} \cdot L_2^{2^\nu-1} L_0^{2^\nu} \cdot$$
$$\cdot \frac{|x-x_0|^{2^{\nu+1}-1}}{(3!)^{2^{\nu-2}} \cdot (4!)^{2^{\nu-3}} \cdot \ldots \cdot (\nu!)^2 \cdot (\nu+1)! \cdot (\nu+2)!} \le$$
$$\le \frac{1}{2^{2^{\nu-1}-1}} \cdot e^{(2^{\nu+1}-1)q} \cdot L_2^{2^\nu-1} L_0^{2^\nu} \cdot \frac{h^{2^{\nu+1}-1}}{\alpha_\nu}, \qquad (25)$$

де $\alpha_\nu := (3!)^{2^{\nu-2}} \cdot (4!)^{2^{\nu-3}} \cdot \ldots \cdot (\nu!)^2 \cdot (\nu+1)! \cdot (\nu+2)!, \quad \nu = 3, 4, \ldots,$

$$\alpha_2 := 3! \cdot 4!, \quad \alpha_1 := 3!.$$

Таким чином, з врахуванням (15) (18) отримуємо

$$|z^\nu(x)| \le \frac{\eta_\nu}{\alpha_\nu} \cdot 2^{2^{\nu-1}} = 2 \cdot \frac{\eta_0 \cdot \chi_0^{2^\nu-1}}{\alpha_\nu \cdot 2^{2^\nu}} \cdot 2^{2^{\nu-1}} =$$
$$= 2 \cdot \frac{\eta_0 \cdot \chi_0^{2^\nu-1}}{\alpha_\nu \cdot 2^{2^{\nu-1}}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \qquad (26)$$

Розглядаючи тепер фукнціональний ряд

$$y^0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu(x),$$

бачимо, що він рівномірно збігається на сегменті $[x_0, x_0+h]$, бо послідовність його часткових сум $y^\nu(x)_{\nu=0}^{\infty}$ відповідно до теореми 1 сходиться рівномірно на $[x_0, x_0+h]$ до $y(x)$. Тому, із врахуванням (25), (26), (16) і (17) отримуємо оцінку відхилення

$$|y(x) - y^{\nu}(x)| \leq |z^{\nu}(x)| + |z^{\nu(x)+1}| + \ldots \leq$$

$$\frac{1}{2^{2^{\nu-1}-1}} \cdot L_2^{2^{\nu}-1} L_0^{2^{\nu}} \cdot e^{(2^{\nu+1}-1)q} \cdot \frac{h^{2^{\nu+1}-1}}{\alpha_{\nu}} \cdot$$

$$\cdot \{1 + \frac{1}{2^{2^{\nu-1}}} \cdot \frac{L_2^{2^{\nu}} L_0^{2^{\nu}} \cdot e^{(2^{\nu+1})q} \cdot h^{2^{\nu+1}}}{(3!)^{2^{\nu-2}}(4!)^{2^{\nu-3}} \cdot \ldots \cdot (\nu!)^2(\nu+1)!(\nu+2)!} + \frac{1}{(2^{2^{\nu-1}})^3} \cdot$$

$$\cdot \frac{(L_2^{2^{\nu}} L_0^{2^{\nu}} \cdot e^{(2^{\nu+1})q} \cdot h^{2^{\nu+1}})^3}{((3!)^{2^{\nu-2}}(4!)^{2^{\nu-3}} \cdot \ldots \cdot (\nu!)^2 \cdot (\nu+1)!)^3 \cdot (\nu+2)!(\nu+3)!(\nu+4)!} +$$

$$+ \ldots\} \leq 2 \cdot \frac{\eta_0 \chi_0^{2^{\nu}-1}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \cdot \{1 + \frac{2^{2^{\nu-1}} \cdot \chi_{\nu}}{\alpha_{\nu}} + \frac{(2^{2^{\nu-1}} \cdot \chi_{\nu})^3}{\alpha_{\nu}^3 \cdot 2!} + \ldots\} \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\eta_0 \chi_0^{2^{\nu}-1}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \cdot \{1 + \frac{\chi_0^{2^{\nu}}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} + \frac{(\chi_0^{2^{\nu}})^2}{(2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu})^2 \cdot 2!} + \ldots\} \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\eta_0 \cdot \chi_0^{2^{\nu}-1}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \cdot e^{\frac{\chi_0^{2^{\nu}}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \qquad (27)$$

Оскільки, в силу (13) $|z^0(x)| \leq \eta_0$, то, поклавши $\alpha_0 := \sqrt{2}$ таким чином, що $2 \cdot \dfrac{\chi_0^{2^0-1}}{2^{2^{-1}} \cdot \alpha_0} = 1$, бачимо, що нерівності (26) і (27) є справедливими і при $\nu = 0$.

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 4. *За умов теореми 3 для відхилення наближеного розв'язку $y^{\nu}(x)$, який визначається за рекурентними співвідношеннями (5), від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (4) (або, що те саме, рівняння (2) чи задачі Коші (1)) справедлива оцінка*

$$\|y(x) - y^{\nu}(x)\|_{C[x_0, x_0+h]} \leq 2 \cdot \frac{\eta_0 \cdot \chi_0^{2^{\nu}-1}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}} \cdot exp\{\frac{\chi_0^{2^{\nu}}}{2^{2^{\nu-1}} \cdot \alpha_{\nu}}\}, \qquad (28)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

, де $\alpha_{\nu} := (3!)^{2^{\nu-2}} \cdot (4!)^{2^{\nu-3}} \cdot \ldots \cdot (\nu!)^2 \cdot (\nu+1)! \cdot (\nu+2)!, \quad \nu = 3, 4, \ldots,$

$$\alpha_2 := 3! \cdot 4!, \quad \alpha_1 := 3!, \quad \alpha_0 := \sqrt{2},$$

$$\eta_0 = e^q \cdot L_0 h, \quad \chi_0 := e^q \cdot L_2 h \eta_0, \quad (q = L_1 h),$$

а величини $L_i,\ i = 0, 1, 2$ *задаються співвідношеннями*

$$L_0 :=\| f \|_{C(P)}, \quad L_1 :=\| f'_y \|_{C(P)}, \quad L_2 :=\| f''_{yy} \|_{C(P)},$$
$$P = [x_0, x_0 + h] \times [y_0 - H, y_0 + H].$$

Зауваження 1. Твердження теореми 4 залишається вірним, якщо в ній константу L_2 замінити на константу Ліпшиця L для оператора B'_y:

$$\|B'_{y^1} - B'_{y^2}\| \le L \cdot \|y^1 - y^2\|, \quad \forall y^1, y^2 \in K(y_0, H).$$

Апроксимаційно-ітеративні наближення

Ітераційний процес (5) містить операцію інтегрування, і його на практиці, як правило, важко реалізувати. Тому, слідуючи працям Дзядика В. К. [1, 2], для наближення розв'язків рівняння (2) (а, отже, і задачі Коші (1)) було розглянуто і досліджено операторне рівняння виду

$$y(n, x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, y(n, \cdot)); t)\, dt, \tag{29}$$

в якому A_n — деякий суматорний оператор, діючий на множині функцій із $C[x_0, x_0 + h]$, а $y(n, x)$ — многочлен степеня не вище $n + 1$.

Зокрема, був досліджений інтерполяційний оператор, побудований при деякому фіксованому n по вузлах

$$\{x_j\}_{j=0}^{n} : \ x_j = x_0 + \frac{h}{2} \cdot (\xi_j + 1), \quad \xi_j = -\cos\frac{j\pi}{n}, \quad j = \overline{0, n}.$$

З метою наближення розв'язків неявного відносно $y(n, x)$ рівняння (29) замість простих ітерацій використовується ітераційний процес Ньютона-Канторовича. Для цього розглянемо рівняння виду

$$C\widetilde{y} = 0, \tag{30}$$

в якому $\widetilde{y}(x) := y(n;x)$, а оператор C задається рівністю

$$(C\widetilde{y})(x) = \widetilde{y} - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, y(n,\cdot));t)\,dt.$$

Наближений розв'язок рівняння (30) будемо шукати за допомогою наступного ітераційного процесу

$$\widetilde{y}^{\nu+1} = \widetilde{y}^{\nu} - [C'_{\widetilde{y}^{\nu}}]^{-1}C\widetilde{y}^{\nu} = 0, \quad \widetilde{y}^{0} = y_0, \quad \nu = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

де через $C'_{\widetilde{y}^{\nu}}$ позначена похідна Фреше оператора C в точці $\widetilde{y}^{\nu}$. В силу умов, накладених на функцію $f(x,y)$, похідна Фреше $C'_{\widetilde{y}^{\nu}}$ існує і її дія на довільний елемент $z \in C[x_0, x_0+h]$ задається рівністю

$$(C'_{\widetilde{y}^{\nu}}z)(x) = z(x) - \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot, y(n,\cdot));t)z(t)\,dt.$$

Аналогічно до леми 1 доводиться наступна лема.

Лема 5. *Лінійний неперервний оператор* $C'_y : C[x_0, x_0+h] \to C[x_0, x_0+h]$ *при* $\forall y \in K(y_0, H)$ *має неперервний обернений оператор* $[C'_y]^{-1}$*, норма якого обмежена числом* e^{q_1}*:*

$$\| [C'_y]^{-1} \| \le e^{q_1}, \tag{32}$$

де $q_1 := \| A_n \|_{C(P)} \cdot q$.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 6. *Якщо*

$$f \in A(intP) \cap C(P),$$

$$\widetilde{\eta}_0 := e^{q_1}\|A_n\| \cdot L_0 h, \quad \widetilde{\chi}_0 := e^{q_1}\|A_n\| \cdot L_2 h \widetilde{\eta}_0 < 1, \tag{33}$$

і

$$H > \widetilde{H}_0 := 2\widetilde{\eta}_0, \tag{34}$$

то послідовні наближення (31) *сходяться до розв'язку рівняння* (30) *і ці розв'язки знаходяться в кулі* $K(y_0, \widetilde{H}_0)$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 3.

Для оцінки похибки AI-методу при використанні ітераційного процесу Ньютона-Канторовича побудуємо еліпс Жуковського (відштовхуючись від сегмента $[x_0, x_0+h]$ і деякого $r>1$)

$$\partial\mathfrak{E}_r = \{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2 :$$
$$z_1 = x_0 + \frac{h}{2} + a_r\cdot\cos t, \quad z_2 = b_r\cdot\sin t, \quad t\in[-\pi,\pi],$$

$$a_r = \frac{h}{2}\cdot(r+r^{-1}), \quad b_r = \frac{h}{2}\cdot(r-r^{-1})\}$$

і розглянемо множину $\mathfrak{E}_r$, обмежену еліпсом $\partial\mathfrak{E}_r$,

$$\mathfrak{E}_r = \{z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C} : \quad \left(\frac{z_1 - (x_0 + \frac{h}{2})}{a_r}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{b_r}\right)^2 \le 1\},$$

круг $\widetilde{K} = \widetilde{K}(y_0,H) = \{w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C} : \ |w-y_0| \le H\}$ і біциліндр $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}_r \times \widetilde{K}$.

Якщо розглянути функцію $f(z,w)$ таку, що $f \in A(int\mathfrak{D}) \cap C(\mathfrak{D})$ і $f'_w \in A(int\mathfrak{D}) \cap C(\mathfrak{D})$, то, згідно з теоремою С.Н. Бернштейна (див., наприклад, [1]),

$$E_n(f(z,w(z))_{C[x_0,x_0+h]} \le \| f \|_{C(\mathfrak{E}_r)} \cdot \frac{2}{(r-1)\cdot r^n}, \qquad (35)$$

$$E_n(f'_w(z,w(z))_{C[x_0,x_0+h]} \le \| f'_w \|_{C(\mathfrak{E}_r)} \cdot \frac{2}{(r-1)\cdot r^n}, \qquad (36)$$

де $E_n(f)_{C[x_0,x_0+h]}$ — величина найкращого наближення функції f на сегменті $[x_0, x_0+h]$ многочленами степеня не вище n.

Теорема 7. *(про оцінку похибки апроксимаційно-ітеративного методу при застосуванні ітераційного процесу Ньютона-Канторовича).*

При наближенні розв'язку задачі Коші (1) *многочленами* $y(n;x)$ *степеня не вище* $n+1$, *які задовольняють операторне рівняння* (29), *яке розв'язується за методом Ньютона-Канторовича* (31), *при дотриманні умов теореми 6 має місце оцінка відхилення*

$$\|\widetilde{y}(x)-\widetilde{y}^{\nu}(x)\|_{C[x_0,x_0+h]}\leq$$

$$\leq e^{q_1}h\cdot(\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot\left(\widetilde{L}_1\eta_0+\widetilde{L}_0\right)\cdot\frac{1-\beta_2^{\nu}}{1-\beta_2}+$$

$$+L_2^{2^{\nu}-1}L_0^{2^{\nu}}\cdot e^{(2^{\nu+1}-1)q}\cdot\frac{h^{2^{\nu+1}-1}}{2^{2^{\nu-1}}\cdot\alpha_{\nu}}\cdot exp\{\frac{\chi_0^{2^{\nu}}}{2^{2^{\nu-1}}\cdot\alpha_{\nu}}\},\qquad(37)$$

де $\alpha_{\nu}:=(3!)^{2^{\nu-2}}\cdot(4!)^{2^{\nu-3}}\cdot\ldots\cdot(\nu!)^2\cdot(\nu+1)!\cdot(\nu+2)!,\quad \nu=3,4,\ldots,$

$$\alpha_2:=3!\cdot 4!,\quad \alpha_1:=3!,\quad \alpha_0:=\sqrt{2},$$
$$\widetilde{L}_0:=\|\ f\ \|_{C(\mathfrak{D})},\quad \widetilde{L}_1:=\|\ f'_y\ \|_{C(\mathfrak{D})},\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{E}_r\times\widetilde{K},$$
$$L_0:=\|\ f\ \|_{C(P)},\quad L_1:=\|\ f'_y\ \|_{C(P)},\quad L_2:=\|\ f''_{yy}\ \|_{C(P)},$$
$$P=[x_0,x_0+h]\times[y_0-H,y_0+H],\quad q=L_1h,\quad q_1=\|A_n\|L_1h,$$

$$\beta_2=e^{q_1}h\cdot\left((\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot\widetilde{L}_1+L_2\eta_0+2L_1\right),$$

$$\eta_0:=e^{q}L_0h,\quad \chi_0:=e^{2q}\cdot L_2L_0h^2.$$

Доведення. Враховуючи позначення $\widetilde{y}^{\nu}(x):=y^{\nu}(n;x)$ із (5) і (31) отримаємо рівності

$$\widetilde{y}^{\nu+1}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}A_n(f'_y(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)(\widetilde{y}^{\nu+1}(t)-\widetilde{y}^{\nu}(t))\,dt+$$

$$+y_0+\int\limits_{x_0}^{x}A_n(f(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)\,dt,$$

$$y^{\nu+1}(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t,y^{\nu}(n,t))(y^{\nu+1}(t)-y^{\nu}(t))\,dt+$$

$$+y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y^{\nu}(t))\,dt.$$

Віднявши другу рівність від першої, матимемо

$$\widetilde{y}^{\nu+1}(x)-y^{\nu+1}(x)=\int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)(\widetilde{y}^{\nu+1}(t)-\widetilde{y}^{\nu}(t))\,dt+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t,y^{\nu}(t))(y^{\nu+1}(t)-y^{\nu}(t))\,dt-\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y^{\nu}(t))\,dt=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)(\widetilde{y}^{\nu+1}(t)-y^{\nu+1}(x)+y^{\nu+1}(x)-\widetilde{y}^{\nu}(t))\,dt+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t,y^{\nu}(t))(y^{\nu+1}(t)-y^{\nu}(t))\,dt-\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y^{\nu}(t))\,dt.$$

Звідси випливає, що

$$\widetilde{y}^{\nu+1}(x)-y^{\nu+1}(x)-\int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot,\widetilde{y}^{\nu}(\cdot));t)(\widetilde{y}^{\nu+1}(t)-y^{\nu+1}(x))\,dt=$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f'_y(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t)(y^{\nu+1}(x) - \widetilde{y}^{\nu}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t)\, dt -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y^{\nu}(t))(y^{\nu+1}(t) - y^{\nu}(t))\, dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y^{\nu}(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \left[A_n(f'_y(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t) - f'_y(t, \widetilde{y}^{\nu}(t)) + f'_y(t, \widetilde{y}^{\nu}(t))\right] \cdot$$

$$\cdot (y^{\nu+1}(x) - y^{\nu}(t) + y^{\nu}(t) - \widetilde{y}^{\nu}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left[A_n(f(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t) - f(t, \widetilde{y}^{\nu}(t)) + f(t, \widetilde{y}^{\nu}(t))\right] dt -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, y^{\nu}(t))(y^{\nu+1}(t) - y^{\nu}(t))\, dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y^{\nu}(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \left[A_n(f'_y(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t) - f'_y(t, \widetilde{y}^{\nu}(t))\right] \cdot$$

$$\cdot (y^{\nu+1}(x) - y^{\nu}(t) + y^{\nu}(t) - \widetilde{y}^{\nu}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left[f'_y(t, \widetilde{y}^{\nu}(t)) - f'_y(t, y^{\nu}(t))\right] (y^{\nu+1}(t) - y^{\nu}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} f'_y(t, \widetilde{y}^{\nu}(t))(y^{\nu}(t) - \widetilde{y}^{\nu}(t))\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left[A_n(f(\cdot, \widetilde{y}^{\nu}(\cdot)); t) - f(t, \widetilde{y}^{\nu}(t))\right] dt +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left[f(t, \widetilde{y}^{\nu}(t)) - f(t, y^{\nu}(t))\right] dt.$$

Враховуючи той факт, що у лівій частині отриманої рівності стоїть вираз виду $C'_{\widetilde{y}^\nu}(\widetilde{y}^{\nu+1}-y^{\nu+1})$, ми, скориставшись нерівністю (32), отримаємо:

$$\|\widetilde{y}^{\nu+1}-y^{\nu+1}\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq$$
$$\leq e^{q_1}\Big[h\cdot(\|A_n\|+1)\cdot E_n(f'_y(x,\widetilde{y}^\nu(x)))_{C[x_0,x_0+h]}\cdot$$
$$\cdot(\|y^{\nu+1}-y^\nu\|+\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|)+h\|f''_{yy}\|_{C(P)}\cdot\|y^{\nu+1}-y^\nu\|\cdot\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|+$$
$$+h\|f'_y\|_{C(P)}\cdot\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|+h\cdot(\|A_n\|+1)\cdot E_n(f'_y(x,\widetilde{y}^\nu(x)))_{C[x_0,x_0+h]}+$$
$$+h\|f'_y\|_{C(P)}\cdot\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|\Big].$$

Далі, враховуючи (35) і (36) і той факт, що $\|y^{\nu+1}-y^\nu\|\leq\eta_0$ (випливає із доведення теореми 3), матимемо

$$\|\widetilde{y}^{\nu+1}-y^{\nu+1}\|_{C[x_0,x_0+h]} \leq$$
$$\leq e^{q_1}h\cdot\Big[(\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot(\widetilde{L}_1\eta_0+\widetilde{L}_0)+$$
$$+\Big((\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot\widetilde{L}_1+L_2\eta_0+2L_1\Big)\cdot\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|\Big]\leq$$
$$\leq\beta_1+\beta_2\cdot\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|\leq\beta_1+\beta_2\cdot(\beta_1+\beta_2\cdot\|\widetilde{y}^{\nu-1}-y^{\nu-1}\|)\leq$$
$$\leq\ldots\leq\beta_1\cdot(1+\beta_2+\ldots+\beta_2^\nu)=\beta_1\cdot\frac{1-\beta_2^{\nu+1}}{1-\beta_2}, \tag{38}$$

де

$$\beta_1:=e^{q_1}h\cdot(\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot(\widetilde{L}_1\eta_0+\widetilde{L}_0),$$
$$\beta_2:=e^{q_1}h\cdot\Big((\|A_n\|+1)\cdot\frac{2}{(r-1)\cdot r^n}\cdot\widetilde{L}_1+L_2\eta_0+2L_1\Big).$$

Тепер на основі (38), (19) і нерівності $\|\widetilde{y}^\nu-y\|\leq\|\widetilde{y}^\nu-y^\nu\|+\|y^\nu-y\|$ отримаємо (37). □

Про обчислювальну схему розв'язування задачі

Відштовхуючись від описаних вище апроксимаційно-ітеративних наближень $\widetilde{y}^\nu=y(n;x)$ (многочленів степеня не вище $n + 1$), побудуємо чисельну схему для знаходження значень $y^{\nu}(n; x_j)$, $j = \overline{0, n}$ у вузлах інтерполяції x_j, по яких сам многочлен $y(n; x)$ відновлюється однозначно.

Слідуючи працям [1, 2], проведемо дискретизацію операторного рівняння (29)

$$y(n, x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} A_n(f(\cdot, y(n, \cdot)); t)\, dt,$$

поклавши в ньому $x = x_j$, $j = \overline{1, n}$, де $x_j = x_0 + \dfrac{h}{2} \cdot (\xi_j + 1)$, $j = \overline{0, n}$ — вузли інтерполяції, які є результатом лінійної пересадки вузлів $\xi_j = -\cos \dfrac{j\pi}{n}$, $j = \overline{0, n}$ (екстремальних точок многочлена Чебишева II роду $T_n(\xi) = \cos n \arccos \xi$) з сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[x_0, x_0 + h]$. A_n, як і раніше, інтерполяційний оператор по системі вузлів $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, який діє на довільну функцію $\varphi \in C[x_0, x_0 + h]$ за формулою

$$A_n(\varphi(\cdot); x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) l_i(x),$$

в якій $l_i(x)$ — фундаментальні многочлени Лагранжа, побудовані по системі вузлів $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ на сегменті $[x_0, x_0 + h]$. Після підстановки отримаємо

$$y(n, x_j) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_j} \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y(n, x_i)) \cdot l_i(t)\, dt =$$

$$= y_0 + \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y(n, x_i)) \cdot \int\limits_{x_0}^{x_j} l_i(t)\, dt.$$

Враховуючи, що $\int\limits_{x_0}^{x_j} l_i(t)\, dt = \dfrac{h}{2} \cdot \int\limits_{-1}^{\xi_j} l_i^*(\xi)\, d\xi$, де $l_i^*(\xi)$ — фундаментальні многочлени Лагранжа, побудовані на $[-1, 1]$ по системі вузлів $\{\xi_j\}_{j=0}^n$, і позначивши $y_j := y(n;x_j)$, а $\int\limits_{-1}^{\xi_j} l_i^*(\xi)\,d\xi$, як і в роботі [3], через a_{ij}, остаточно маємо

$$y_j = y_0 + \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot f(x_i, y_i), \quad j = \overline{1,n}. \tag{39}$$

Явні формули для коефіцієнтів a_{ij}, $i,j = \overline{0,n}$ і вирази для многочленів $l^*(\xi)$ отримані в роботі [2] (див. також [1]). Наведемо ці формули

$$\begin{aligned} a_{ij} =& \frac{\varepsilon_i}{n} \cdot \Big[1 - c_j + \frac{c_i}{2}(1 - c_{2j}) + \\ &+ \sum_{\nu=2}^{n} \varepsilon_\nu c_{i\nu} \cdot \big(\frac{c_{j(\nu-1)}}{\nu-1} - \frac{c_{j(\nu+1)}}{\nu+1} - \frac{2}{\nu^2-1}\big)\Big], \end{aligned} \tag{40}$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon_n = \dfrac{1}{2}$, $\varepsilon_j = 1$ при $j = \overline{1, n-1}$ і $c_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$,

$$\begin{aligned} &l_i^*(\xi) = l_i^*(n;\xi) = \\ &= \frac{\varepsilon_i}{n} \cdot \Big[1 + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \cos\frac{\nu i \pi}{n} \cdot T_\nu(\xi) + (-1)^{n+j} T_n(\xi)\Big] \end{aligned} \tag{41}$$

(ε_i набуває тих самих значень).

Для зручності подальшого викладу введемо позначення

$$\begin{gathered} \overline{y} := (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad \overline{y}_0 := (y_0, \ldots, y_0)^T, \\ \overline{a}_j := (a_{0,j}, \cdots, a_{0,j})^T, \quad j = \overline{1,n}, \\ \overline{f}(\overline{y}) := \big(f(x_0, y_0), \ldots, f(x_n, y_n)\big)^T, \\ \overline{\beta}(\overline{y}) := \big(\overline{a}_1 \times \overline{f}(\overline{y}), \ldots, \overline{a}_n \times \overline{f}(\overline{y})\big)^T, \end{gathered}$$

де $\overline{\beta}(\overline{y})$ — вектор, складений із скалярних добутків векторів $\overline{a}_j$ і $\overline{f}(\overline{y})$, $j = \overline{1,n}$.

Тоді система рівнянь (39) у векторному вигляді запишеться таким чином

$$\overline{y} = \overline{y}_0 + \frac{h}{2} \cdot \overline{\beta}(\overline{y}). \tag{42}$$

З метою наближеного розв'язання рівняння (42) скористаємося методом Ньютона-Канторовича-Рафсона (див. [9, 10, 18]), замінивши попередньо (42) еквівалентним йому операторним рівнянням

$$\overline{\alpha}(\overline{y}, \overline{y}_0) = 0, \tag{43}$$

де

$$\overline{\alpha}(\overline{y}, \overline{y}_0) = \overline{y} - \overline{y}_0 - \frac{h}{2} \cdot \overline{\beta}(\overline{y}).$$

Наближений розв'язок рівняння (43) за допомогою методу Ньютона знаходиться за наступними рекурентними формулами

$$\begin{gathered} \overline{y}^0 := \overline{y}_0, \\ \overline{y}^{\nu+1} = \overline{y}_\nu - \big[E - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \overline{\beta}(\overline{y}^\nu)\big]^{-1} \cdot \overline{\alpha}(\overline{y}, \overline{y}_0), \end{gathered} \tag{44}$$

де

$$\begin{gathered} E - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \overline{\beta}(\overline{y}^\nu) = \frac{\partial}{\partial y} \overline{\alpha}(\overline{y}, \overline{y}_0) = \\ = E - \frac{h}{2} \cdot A_0^T \cdot diag\big(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1), \cdots \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n), \big) =: D(\overline{y}), \end{gathered}$$

$D(\overline{y}) = D\big((x_1, \ldots, x_n); \overline{y}; \frac{h}{2}; A_0\big)$ — матриця розмірності $n \times n$,

$$A_0 = \big[a_{i,j}\big]_{i=1, j=1}^{n \quad n}.$$

Із (44) слідує, що

$$D(\overline{y}^\nu)(\overline{y}^{\nu+1} - \overline{y}^\nu) = -\overline{\alpha}(\overline{y}^\nu, \overline{y}_0). \tag{45}$$

Зауважимо, що матричне рівняння (45) є безпосередньою дискретизацією операторного рівняння (31) в квазічебишевських вузлах $\{x_j\}_{j=0}^{n}$. Побудову обчислювальної схеми (алгоритму) можна було би розпочати, відштовхуючись від рівняння (45), отриманого із (31) в результаті підстановки $x = x_j(n)$. Але далі розглядається спосіб виведення розрахункових формул, який дозволяє поступово (покроково) виконувати обчислення за формулою (45), зразу ж використовуючи апарат матричного числення, що, безумовно, надає певні зручності при алгоритмізації і складанні відповідної комп'ютерної програми.

З метою підвищення ефективності обчислювальних робіт доцільно ітераційний процес (44) подати у вигляді двох взаємопов'язаних ітераційних процесів. Для цього запишемо рівняння (45) на попередній $(\nu-1)$-й ітерації

$$D(\overline{y}^{\nu-1})(\overline{y}^{\nu} - \overline{y}^{\nu-1}) = -\overline{\alpha}(\overline{y}^{\nu-1}, \overline{y}_0)$$

і віднімемо останнє рівняння від (45). В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} D(\overline{y}^{\nu})(\overline{y}^{\nu+1} - \overline{y}^{\nu}) = \frac{h}{2} \cdot \Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{\beta}(\overline{y}^{\nu-1}) - \\ - \frac{\partial}{\partial y}\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu-1})(\overline{y}^{\nu} - \overline{y}^{\nu-1}) \Big]. \end{aligned}$$

Якщо ввести позначення

$$\overline{d}^{\nu} := \overline{\beta}(\overline{y}^{\nu-1}) - \frac{\partial}{\partial y}\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu-1})(\overline{y}^{\nu} - \overline{y}^{\nu-1}),$$

то із попереднього рівняння будемо мати, що

$$D(\overline{y}^{\nu})(\overline{y}^{\nu+1} - \overline{y}^{\nu}) = \frac{h}{2} \cdot \Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu} \Big] \tag{46}$$

або ж

$$\overline{y}^{\nu+1} = \overline{y}^{\nu} - \frac{h}{2} \cdot D^{-1}(\overline{y}^{\nu}) \Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu} \Big]. \tag{47}$$

Рівняння (47) є основним рівнянням для обчислення ньютонівських наближень при розв'язуванні неявної схеми (39). Паралельно до нього потрібно робити обчислення векторів $\overline{d}^{\nu}$. Щоб отримати рекурентні співвідношення для $\overline{d}^{\nu}$, виразимо $\overline{d}^{\nu+1}$ через $\overline{d}^{\nu}$

$$\overline{d}^{\nu+1} = \overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \frac{\partial}{\partial y}\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu})(\overline{y}^{\nu+1} - \overline{y}^{\nu}) =$$
$$= \overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \frac{\partial}{\partial y}\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) \cdot \frac{h}{2} \cdot D^{-1}(\overline{y}^{\nu})\Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu}\Big] =$$
$$= \overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) + D^{-1}(\overline{y}^{\nu})\Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu}\Big] - D^{-1}(\overline{y}^{\nu})D^{-1}(\overline{y}^{\nu})\Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu}\Big] =$$
$$= \overline{d}^{\nu} + D^{-1}(\overline{y}^{\nu})\Big[\overline{\beta}(\overline{y}^{\nu}) - \overline{d}^{\nu}\Big] \tag{48}$$

Для обчислення компонент вектора $\overline{d}^{0}$ покладемо в (45) $\nu = 0$. Отримаємо

$$D(\overline{y}^{0})(\overline{y}^{1} - \overline{y}^{0}) = -(\overline{y}^{0} - \overline{y}_{0} - \frac{h}{2} \cdot \overline{\beta}(\overline{y}^{0})),$$

звідки випливає, що

$$\overline{y}^{1} = \overline{y}^{0} + \frac{h}{2} \cdot (\overline{\beta}(\overline{y}^{0}) - \overline{0}),$$

де $\overline{0} = (0, \cdots, 0)$.

Порівнюючи останню рівність із (47), отримуємо, що

$$\overline{d}^{0} = (0, \cdots, 0).$$

Таким чином, рівняння (47), (48) — це рекурентні співвідношення для реалізації методу Ньютона-Канторовича-Рафсона, застосованого до чисельної схеми (39). Ці рівняння, як відзначалося раніше, задають паралельний процес чисельної реалізації рівняння (45), яке є безпосередньою дискретизацією рівняння (31).

Зупинимося на оцінці похибки чисельної схеми (39).

Згідно з введеним раніше позначенням числа y_j, $j = \overline{0, n}$ є значеннями наближаючого многочлена $y(n;x)$ в вузлах x_j, які є результатом лінійної пересадки вузлів $\xi_j = -\cos\dfrac{j\pi}{n}$ із відрізка $[-1,1]$ на відрізок $[x_0, x_0+h]$, яка здійснюється за формулою

$$x_j = x_0 + \frac{h}{2}\cdot(\xi_j + 1).$$

Тому, чисельна схема (39) є дискретизацією у вузлах x_j операторного рівняння наступного виду (еквівалентного рівнянню (29))

$$y(n,x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n} f(x_i, y(n,x_i)) \cdot \int_{x_0}^{x} l_i(t)\,dt, \tag{49}$$

де $l_i(t)$ — інтерполяційні фундаментальні поліноми Лагранжа, пересаджені на відрізок $[x_0, x_0+h]$ за формулою

$$x = x_0 + \frac{h}{2}\cdot(\xi+1), \quad \xi \in [-1,1].$$

Далі будемо розглядати зсув аргумента x відносно x_0, який позначимо через τ, так що $x = x_0 + \tau$. При цьому многочлен $y(n;x) = y(n;x_0+\tau)$ буде задовольняти рівняння

$$\begin{aligned} y(n, x_0+\tau) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_0+\tau} \sum_{i=0}^{n} f(x_0+\tau_i, y(n;x_0+\tau_i)) \cdot l_i(\sigma)\,d\sigma = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x_0+\tau} \sum_{i=0}^{n} y'(n;x_0+\tau_i) \cdot l_i(\sigma)\,d\sigma, \end{aligned} \tag{50}$$

в якому $\tau_i = \dfrac{h}{2}\cdot(\xi_i+1)$, $i = \overline{0,n}$.

Введемо в розгляд оператор

$$E_\tau(y(x_0+\tau)) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+\tau} \sum_{i=0}^{n} y'(n;x_0+\tau_i)\cdot l_i(\sigma)\,d\sigma, \tag{51}$$

Відомо, що розв'язок задачі Коші (1) при вказаних відносно функції $f(x, y)$ умовах можна подати у вигляді

$$y(x_0+\tau) = p_k(\tau) + \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x_0+\tau} y^{(k+1)}(s)(x_0+\tau-s)\,ds =$$

$$= p_k(\tau) + \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{\infty} y^{(k+1)}(s)U_k(x_0+\tau-s)\,ds,$$

де $p_k(\tau)$ — поліном Тейлора для функції $y(x_0+\tau)$ k-го порядку, побудований в точці x_0,

$$p_k(\tau) = \sum_{i=0}^{k} y^{(i)}(x_0)\frac{\tau^i}{i!},$$

$$U_k(x_0+\tau-s) = \begin{cases} (x_0+\tau-s)^k, & s \le \tau; \\ 0, & s > \tau. \end{cases}$$

Оскільки $y(n; x_0+\tau) = E_\tau(y(x_0+\tau))$ і AI-алгоритм є точним на поліномах степеня не вище $n+1$, то при довільних $k \le n+1$ будемо мати

$$E_\tau(y(x_0+\tau)) = p_k(\tau) + \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{\infty} y^{(k+1)}(s)E_\tau(U_k(x_0+\tau-s))\,ds.$$

При цьому

$$y(x_0+\tau) - y(n; x_0+\tau) =$$

$$= \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{\infty} y^{(k+1)}(s)\big[U_k(x_0+\tau-s) - E_\tau(U_k(x_0+\tau-s))\big]\,ds =$$

$$= \frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} y^{(k+1)}(s)\big[U_k(x_0+\tau-s) - E_\tau(U_k(x_0+\tau-s))\big]\,ds =$$

$$= \frac{y^{(k+1)}(s_\tau)}{k!} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \big[U_k(x_0+\tau-s) - E_\tau(U_k(x_0+\tau-s))\big]\, ds, \quad (52)$$

де s_τ — деяка точка із сегмента x_0, x_0+h. Дія оператора E_τ на функцію $U_k(x_0+\tau-s)$ згідно з (51) буде здійснюватися наступним чином:

$$E_\tau(U_k(x_0+\tau-s)) = \int\limits_{x_0-s}^{x_0+\tau-s} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial\tau} U_k(x_0+\tau-s)\Big|_{\tau=\tau_i} \cdot l_i(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} k \cdot U_k(x_0+\tau_i-s) \int\limits_{x_0-s}^{x_0+\tau-s} l_i(\sigma)\, d\sigma.$$

Після заміни $\sigma = x_0 - s + \frac{h}{2}\cdot(\theta+1) : [-1,1] \to [x_0-s, x_0+h-s]$, в силу якої при $\sigma = x_0 - \tau - s$

$$x_0 - \tau - s = x_0 - s + \frac{h}{2}\cdot(\theta+1) \to \theta = \frac{2\tau}{h} - 1,$$

з врахуванням того, що $\tau_j = \frac{h}{2}\cdot(\xi_j+1) \to \theta = \xi_j$, будемо мати

$$E_\tau(U_k(x_0+\tau-s)) = \frac{h}{2}\cdot \sum_{i=0}^{n} k \cdot U_k(x_0+\tau_i-s) \int\limits_{-1}^{\frac{2\tau}{h}-1} l_i^*(\sigma)\, d\sigma.$$

Отже

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} E_\tau(U_k(x_0+\tau-s))\, ds =$$

$$= k\cdot\frac{h}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n}\left[\int\limits_{-1}^{\frac{2\tau}{h}-1} l_i^*(\sigma)\, d\sigma \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+\tau_i} U_k(x_0+\tau_i-s)\, ds\right] =$$

$$= k \cdot \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n} \left[\int\limits_{-1}^{\frac{2\tau}{h}-1} l_i^*(\sigma)\, d\sigma \cdot \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\tau_i}{2} \right)^k \cdot (1-\sigma)^{k-1}\, d\sigma \right] =$$

$$= \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} (\xi_j + 1)^k \cdot \int\limits_{-1}^{\frac{2\tau}{h}-1} l_i^*(\sigma)\, d\sigma. \tag{53}$$

В останніх перетвореннях враховані співвідношення

$$s = x_0 + \frac{\tau}{2} \cdot (\sigma + 1),$$

$$x_0 + \tau_i - s = x_0 + \tau_i - x_0 - \frac{\tau_i}{2} \cdot (\theta + 1) = \frac{\tau_i}{2} \cdot (\theta + 1),$$

$$\tau_i = \frac{h}{2}(\xi_i + 1).$$

Крім того,

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} U_k(x_0 + \tau - s)\, ds = \int\limits_{x_0}^{x_0+\tau} (x_0 + \tau_i - s)^k\, ds =$$

$$= \left(\frac{\tau_i}{2} \right)^{k+1} \int\limits_{-1}^{1} (1-\sigma)^k\, d\sigma = \frac{1}{k+1} \cdot \tau^{k+1}, \tag{54}$$

$$(s = x_0 + \frac{\tau}{2}(\sigma + 1)).$$

Підставляючи (53) і (54) в (52), отримуємо

$$y(x_0 + \tau_j) - y(n; x_0 + \tau_j) = \frac{y^{(k+1)}(s_\tau)}{k!}.$$

$$\cdot\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}(\xi_i+1)^{k+1}-\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\cdot(\xi_i+1)^k\right]=$$

$$=\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}\cdot\left[\frac{(\xi_i+1)^{k+1}}{k+1}-\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\cdot(\xi_i+1)^k\right]\cdot\frac{y^{(k+1)}(s_\tau)}{k!}.$$

При цьому, поклавши $k=n+1$, остаточно отримуємо

$$\sum_{j=1}^{n}|y(x_0+\tau_j)-y(n;x_0+\tau_j)|\leq\frac{\max\limits_{s\in[x_0,x_0+h]}|y^{(n+2)}(s)|}{(n+1)!}\cdot$$

$$=\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\Big|\frac{(\xi_i+1)^{n+2}}{n+2}-\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\cdot(\xi_i+1)^{n+1}\Big|.$$

Остання нерівність в силу попередніх позначень дає оцінку зверху для суми відхилень отриманих наближень y_j у вузлах $x_j,\quad j=\overline{1,n}$ від їх точних значень, а саме:

$$\sum_{j=1}^{n}|y(x_0+\tau_j)-y(n;x_0+\tau_j)|\leq$$

$$\leq\|\, y^{(n+2)}(s)\,\|_{C[x_0,x_0+h]}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2}\frac{\gamma_n}{(n+1)!},\tag{55}$$

де

$$\gamma_n=\sum_{j=1}^{n}\Big|\frac{(\xi_i+1)^{n+2}}{n+2}-\sum_{i=0}^{n}a_{i,j}\cdot(\xi_i+1)^{n+1}\Big|.$$

Наприкінці зазначимо, що даний AI-алгоритм без труднощів переноситься на системи звичайних диференціальних рівнянь (у цьому випадку в нерівностях (28), (37) і (55) з'являться додаткові константи, які залежать від кількості рівнянь).

Описаний алгоритм тестувався на ряді прикладів (зокрема, на прикладах Слоневського Р. В. [19]) і результати порівнювалися з чисельними розв'язками, отриманими за допомогою програми, яка реалізує добре відомий метод Гіра (див., наприклад, [6]).

Після аналізу результатів з'ясувалось, що обидва методи мають невеликі відмінності за обчислювальними затратами, але АІ-метод володіє тією перевагою, що дає рівномірне наближення шуканого розв'язку на всьому проміжку з можливістю отримання наближаючих поліномів в деякій комплексній області, тоді як метод Гіра наближає шуканий розв'язок на дискретній множині точок. Крім того, програма, складена за АІ-алгоритмом, успішно працює на межі машинної точності.

Цікавою є перспектива заміни у даному підході похідної Фреше різницями Ейткена-Стефенсена, що потребує проведення подальших досліджень.

Література

[1] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988 – 304 с.

[2] *Дзядык В. К.* Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1986. — **26**, № 3. — С. 357–372.

[3] *Dzjadik V.* Polynomial approximation to the solutions of the Cauchy and Goursat problems with applications // Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai. —- Budapest (Hungary), 1980. — 35. Functions, series operators. —- P. 441–448.

[4] *Дзядык В. К., Басов А. М.* Об эффективном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев, 1990. — 21 с. — (Препр./АН Украины. Институт математики; 90.29).

[5] *Ракитский Ю. В., Устинов С. М.* Численные методы решения жестких задач. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.

[6] *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1979. – 208 с.

[7] *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 384 с.

[8] *Федоренко Р. П.* О жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1988. — С. 17–52.

[9] *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.

[10] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1981. – 544 с.

[11] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.

[12] *Канторович Л. В.* О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1949. — **28**. — С. 104–144.

[13] *Канторович Л. В.* Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона // Вестник Ленинград. ун-та. — 1957. — №7. — С. 68–103.

[14] *Захаров А. Ю., Турчанинов В. И.* STIFF-программа решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва, 1977. — 43 с. — (Препр./АН СССР. Институт прикладной математики).

[15] *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969.

[16] *Dzjadik V. K., Ivanov V. V.* On some asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polinomials corresponding to the Chebyshev nodal points // Anal. Math. – 1983. – **9**. – P. 85–97.

[17] *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной

переменной. Часть I. – Москва; Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. – 203 с.

[18] *Чуа Л. О., Лин Пен-Мин* Машинный анализ электронных схем. – Москва: Энергия, 1980. – 638 с.

[19] *Слоневский Р. В.* Явные дробно-рациональные и итерационные методы решения жестких дифференциальных уравнений. — Киев, 1986. — 12 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 19.04.1986, №644.