Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 27–54

УДК 517.956.223

А. В. Аноп, О. О. Мурач

(Інститут математики НАН України, Київ)

Деякі напіводнорідні еліптичні крайові задачі у повній розширеній соболєвській шкалі

ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

We investigate a regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous elliptic equation given in a bounded Euclidean domain with infinitely smooth boundary. We prove that the operator of the problem is bounded and Fredholm in appropriate pairs of Hörmander inner product spaces. They are parametrized with an arbitrary radial function RO-varying at infifnity in the sense of V. Avakumović and form the extended Sobolev scale. We prove that the problem generates a complete collection of isomorphisms on this scale. We also establish a priori estimates for generalized solutions to the problem in these Hörmander spaces.

Досліджено регулярну еліптичну крайову задачу для однорідного еліптичного рівняння, заданого в обмеженій евклідовій області з нескінченно гладкою межею. Доведено, що оператор цієї задачі є обмеженим і нетеровим у підходящих парах гільбертових просторів Хермандера. Вони параметризовані довільною радіальною функцією, RO-змінною на нескінченності за В. Авакумовичем, та утворюють розширену соболєвську шкалу. Доведено що досліджувана задача породжує повний набір ізоморфізмів на цій шкалі. Встановлено також апріорні оцінки узагальнених розв'язків задачі у цих просторах Хермандера.

1. Вступ

Простори Соболєва відіграють ключову роль у сучасній теорії еліптичних диференціальних рівнянь. Фундаментальний результат цієї теорії полягає у тому, що еліптичні крайові задачі є нетеровими у підходящих парах гільбертових соболєвських просторів (див., наприклад, монографії [1 – 5], довідник [6] і огляд [7]). Тут простором розв'язків задачі служить простір Соболєва дійсного порядку $s \geq 2q$, де $2q$ — парний порядок еліптичного рівняння. У випадку довільного $s < 2q$ цей результат не є правильним.

Втім, для низки важливих застосувань (при дослідженні властивостей функції Гріна задачі, у теорії еліптичних задач зі степеневими особливостями у правих частинах, спектральній теорії еліптичних операторів) потрібні деякі версії цього результату у вказаному випадку. Вони були встановлені Ж.-Л. Ліонсом, Е. Мадженесом [3, 8 – 10] і Я. А. Ройтбергом [11 – 13]. Теореми Ліонса–Мадженеса і Ройтберга про нетеровість еліптичної крайової задачі у просторах з довільним показником регулярності $s \in \mathbb{R}$ є істотно різними. Вони використовують як простір розв'язків задачі або деяке звуження соболєвського простору порядку s (підхід Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса), або деяку модифікацію цього простору, яка складається з елементів іншої природи, ніж розподіли у евклідовій області (підхід Я. А. Ройтберга).

Проте, для напіводнорідних еліптичних крайових задач, у яких еліптичне рівняння є однорідним, зазначений фундаментальний результат залишається правильним для довільного дійсного $s < 2q$. Це випливає з теореми Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [3, с. 216, 217] (див. [14]). Саме такі задачі і досліджуються у даній статті.

Незважаючи на важливу роль у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, соболєвська шкала не є достатньо тонко градуйованою для ряду задач цієї теорії [5, 15 – 19]. Це спонукало Л. Хермандера [5, п. 2.2] ще у 1963 році ввести широке і змістовне узагальнення соболєвських просторів. Для просторів

Хермандера показником регулярності розподілів служить не число, як для просторів Соболєва, а досить загальний функціональний параметр, залежний від частотних змінних. Він дозволяє істотно тонше охарактеризувати регулярність розподілів за властивостями поведінки на нескінченності їх перетворення Фур'є. Л. Хермандер дав важливі застосування введених ним просторів у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними [5, 15].

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [20 – 25] виділили і дослідили важливі класи гільбертових просторів Хермандера, які отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Один з цих класів, названий розширеною соболєвською шкалою, складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для зазначених пар [24, 25]. Його важливий підклас — уточнена соболєвська шкала — утворена просторами Хермандера, для яких показник регулярності має числовий порядок змінення на нескінченності (є правильно змінною функцією за Й. Карамата [26, 27]). За допомогою вказаного методу інтерполяції В. А. Михайлець і О. О. Мурач побудували теорію загальних еліптичних крайових задач в уточненій соболєвській шкалі (див. монографії [17, 18] та огляди [28, 29]). Так, згадані вище результати про нетеровість задач були перенесені на цю шкалу.

Для розширеної соболєвської шкали така теорія побудована лише у випадку просторів Хермандера, які складаються з досить регулярних розподілів (утворюють так би мовити "позитивну" частину шкали). Доведено теореми про характер розв'язності еліптичних крайових задач у цих просторах Хермандера [30 – 34].

Мета даної роботи — встановити версії цих теорем для усієї (тобто повної) розширеної соболєвської шкали стосовно напіводнорідних регулярних еліптичних крайових задач, у яких є однорідним еліптичне рівняння.

Робота складається із семи розділів. Перший розділ — вступ. У розд. 2 розглянуто регулярну еліптичну крайову задачу для однорідного еліптичного рівняння, формулу Гріна і відповідну формально спряжену задачу. Розд. 3 присвячений просторам Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. У розд. 4 сформульовано основні результати статті. Серед них: теорема 1 про нетеровість операторів, які відповідають розглянутій задачі у розширеній соболєвській шкалі, теорема 2 про породжений задачею повний набір ізоморфізмів і теорема 3 про апріорну оцінку узагальнених розв'язків задачі у цій шкалі. Розд. 5 містить відомі результати, потрібні нам для доведення цих теорем. Доведення останніх наведено у розд. 6. Останній розд. 7 містить висновки до роботи.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, а її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим многовидом вимірності $n-1$. (Як звичайно вважаємо, що нескінченно гладка структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$.)

В області Ω розглядаємо таку крайову задачу:

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u(x) \equiv \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu u(x) = g_j(x), \quad x \in \Gamma, \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут A — лінійний диференціальний вираз парного порядку $2q \geq 2$, заданий на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$, а кожне B_j — крайовий лінійний диференціальний вираз порядку $m_j \leq 2q - 1$, заданий на Γ. Усі коефіцієнти цих виразів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями: $a_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$. Взагалі, у роботі усі функції та розподіли припускаємо комплекснозначними. Покладемо $B := (B_1, \ldots, B_q)$.

У формулах (1), (2) використано такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс з цілими невід'ємними компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_k := i\partial/\partial x_k$ при $k = 1, \ldots, n$, де i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ є довільна точка простору $\mathbb{R}^n$.

Відмітимо, що диференціальне рівняння (1) є однорідним. Отже, відповідна крайова задача (1), (2) є напіводнорідною.

Надалі припускаємо, що ця крайова задача є регулярною еліптичною в області Ω, тобто диференціальний вираз A правильно еліптичний на $\overline{\Omega}$, а набір B крайових диференціальних виразів нормальний і задовольняє умову накриття (або доповнювальності) щодо A на Γ (див., наприклад, [3, розд. 2, п. 1.4] або [6, розд. 3, § 6, п. 2]). Нагадаємо, що, згідно з умовою нормальності набору B, числа $m_j = \mathrm{ord} B_j$ усі різні.

Покладемо

$$C^\infty(\overline{\Omega}, A) := \bigl\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : Au = 0 \ \text{в} \ \Omega\bigr\}.$$

Пов'яжемо з напіводнорідною крайовою задачею (1), (2) лінійне відображення

$$u \mapsto Bu = (B_1 u, \ldots, B_q u), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A).$$

Ми досліджуємо його продовження за неперервністю у підходящих парах гільбертових функціональних просторів.

Для опису області значень цього продовження нам знадобиться формула Гріна

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, C_j^+ v)_\Gamma = (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (C_j u, B_j^+ v)_\Gamma,$$

правильна для будь-яких функцій $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (див., наприклад, [3, розд. 2, п. 2.2] або [6, гл. III, § 6, п. 3]). Тут

$$A^+ v(x) := \sum_{|\mu| \leq 2q} D^\mu(\overline{a_\mu(x)}\, v(x))$$

є лінійний диференціальний вираз, формально спряжений до A, а $\{B_j^+\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^+\}$ — деякі нормальні набори крайових лінійних диференціальних виразів з коефіцієнтами класу $C^\infty(\Gamma)$. Порядки цих виразів задовольняють умову

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2q - 1.$$

У формулі Гріна і далі через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ позначені скалярні добутки у просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно, а також продовження за неперервністю цих скалярних добутків.

Напіводнорідна крайова задача

$$A^+ v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$B_j^+ v(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q, \tag{4}$$

є формально спряженою до задачі (1), (2) відносно формули Гріна. Відмітимо, що крайова задача є регулярною еліптичною тоді і тільки тоді, коли формально спряжена до неї задача є регулярною еліптичною [3, розд. 2, п. 2.5].

Пов'яжемо із крайовими задачами (1), (2) і (3), (4) лінійні простори

$$N := \bigl\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \ Au = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ Bu = 0 \ \text{на} \ \Gamma\bigr\},$$
$$N^+ := \bigl\{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \ A^+ v = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ B^+ v = 0 \ \text{на} \ \Gamma\bigr\};$$

тут $B^+ := (B_1^+, \ldots, B_q^+)$. Оскільки ці задачі є регулярними еліптичними, простори N і N^+ скінченновимірні [3, розд. 2, п. 5.2]. Зауважимо, що простір N^+ не залежить від вибору спряженого набору B^+ крайових виразів, які задовольняють формулу Гріна [3, розд. 2, п. 2.5].

3. Розширена соболєвська шкала

Вона складається з гільбертових ізотропних просторів Хермандера H^α, для яких показником регулярності розподілів служить довільний функціональний параметр $\alpha \in \mathrm{RO}$. Дамо означення класу RO і просторів H^{α}.

За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для кожної з яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c \quad \text{для будь-яких} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \in [1, b]$$

(сталі b і c можуть залежати від α). Ці функції називають RO (або OR)-змінними на нескінченності. Клас RO введений В. Г. Авакумовичем [35] у 1936 р. і добре вивчений (див. монографії [26, додаток 1] і [27, пп. 2.0 – 2.2]).

Цей клас припускає простий опис [26, с. 87]:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \;\; \Leftrightarrow \;\; \alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_{1}^{t} \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \text{ для } t \geq 1,$$

де функції $\beta, \gamma : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ вимірні за Борелем і обмежені.

Відмітимо, що для кожної функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \geq 1 \tag{5}$$

(див., наприклад, [26, с. 88]). Покладемо

$$\begin{aligned} \sigma_0(\alpha) &:= \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність у (5)}\}, \\ \sigma_1(\alpha) &:= \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність у (5)}\}; \end{aligned}$$

тут $-\infty < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < \infty$. Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ [36] (див. також [27, п. 2.1.2]).

Наведемо деякі приклади RO-змінних функцій.

Приклад 1. Нехай неперервна функція $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ така, що

$$\alpha(t) := t^s (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ разів}} t)^{r_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1.$$

Тут довільно вибрані натуральний параметр k і дійсні параметри $s, r_1, \ldots, r_k$. Функція α належить до класу RO, причому $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = s$. Відмітимо, що вона є еталонним прикладом правильно змінної функції за Караматою на нескінченності порядку s (див., наприклад, [26, п. 1.1]).

Приклад 2. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0, 1]$. Розглянемо функцію

$$\alpha(t) := \begin{cases} t^{\theta + \delta \sin(\ln \ln t)^r} & \text{при } t > e, \\ t^{\theta} & \text{при } 1 \leq t \leq e. \end{cases}$$

Безпосередньо перевіряється, що вона належить до класу RO, причому $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. Перейдемо до означення простору Хермандера H^{α}. Спочатку розглянемо цей простір на $\mathbb{R}^n$, де $n \in \mathbb{N}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle \xi \rangle)\, |\widehat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір Л. Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, а $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ми трактуємо розподіли як *анти*лінійні функціонали на відповідному просторі основних функцій.

У просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ означено скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle \xi \rangle)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Він задає на $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і норму

$$\|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

Простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ сепарабельний. Він неперервно вкладається у $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; у ньому щільна множина $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

Простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [5, п. 2.2] (див також його монографію [15, п. 10.1]). А саме, $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Відмітимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [37, § 2].

Якщо функція α степенева: $\alpha(t) \equiv t^s$, то $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертів) простір Соболєва порядку $s \in \mathbb{R}$. Узагалі, якщо числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha) < s_1$, то

$$H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n),$$

причому обидва вкладення неперервні та щільні.

З огляду на [24] клас функціональних просторів

$$\{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{6}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Він виділений і досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [23] (див. також їх монографії [17, 18, п. 2.4.2] і статтю [25]).

Для крайових задач в Ω використовуються аналоги шкали (6) для області Ω та її межі Γ. Ці аналоги будуються стандартним чином за простором $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (див. [25, с. 139] та [17, с. 139]). Дамо відповідні означення; тепер $n \geq 2$.

За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень на область Ω усіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Він наділений нормою

$$\|v\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} :\ w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),\ w = v \ \text{в}\ \Omega \,\bigr\},$$

де $v \in H^{\alpha}(\Omega)$. Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми. Він неперервно вкладається у лінійний топологічний простір $\mathcal{D}'(\Omega)$ усіх розподілів, заданих на області Ω. Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{\alpha}(\Omega)$.

Перейдемо до простору $H^{\alpha}(\Gamma)$. Коротко кажучи, він складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\varkappa}$ складають покриття многовиду Γ. Нехай також довільно вибрано функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, які утворюють розбиття одиниці на Γ і задовольняють умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$. Тоді, за означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Тут і далі $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ, а $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є зображення розподілу h у локальній карті π_j. У просторі $H^{\alpha}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\varkappa} ((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^{\alpha}(\Gamma)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний. Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [17, с. 139]. Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ неперервно вкладається у $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\alpha}(\Gamma)$.

Щойно означені функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали

$$\{H^{\alpha}(\Omega) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \quad \text{і} \quad \{H^{\alpha}(\Gamma) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{7}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\alpha}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є простори Соболєва порядку s на Ω і Γ відповідно.

Корисно відмітити деякі властивості шкал (7), пов'язані з вкладеннями просторів. Нехай $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Відношення функцій α_1/α_2 обмежене в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\alpha_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\Omega)$. Це вкладення неперервне і щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ця властивість зберігає силу, якщо в ній замінити Ω на Γ. Вона є прямим наслідком теорем 2.2.2 і 2.2.3 з монографії Л. Хермандера [5]. Окремим випадком цієї властивості є така:

$$\begin{gathered}(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(G) \hookrightarrow H^{\alpha}(G) \hookrightarrow H^{(s_0)}(G),\end{gathered} \tag{8}$$

де $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $G \in \{\Omega, \Gamma\}$. Ці вкладення компактні та щільні.

4. Основні результати

Сформулюємо результати статті про властивості регулярної еліптичної крайової задачі (1), (2) у розширеній соболєвській шкалі.

Для довільного $\alpha \in \mathrm{RO}$ покладемо

$$H^{\alpha}(\Omega, A) := \big\{u \in H^{\alpha}(\Omega) : Au = 0 \text{ в } \Omega\big\}.$$

Тут і далі образ Au розуміємо у сенсі теорії розподілів на Ω. Лінійний многовид $H^{\alpha}(\Omega, A)$ є замкненим у просторі $H^{\alpha}(\Omega)$. Справді, нехай послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset H^{\alpha}(\Omega, A)$ і розподіл $u \in H^{\alpha}(\Omega)$ такі, що $u_k \to u$ в $H^{\alpha}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Тоді $u_k \to u$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $k \to \infty$ на підставі неперервного вкладення $H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Звідси $0 = Au_k \to Au$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $k \to \infty$. Тому $Au \in H^{\alpha}(\Omega, A)$, тобто множина $H^{\alpha}(\Omega, A)$ замкнена. Ми розглядаємо $H^{\alpha}(\Omega, A)$ як підпростір (замкнений) гільбертового простору $H^{\alpha}(\Omega)$.

Оскільки диференціальний вираз A еліптичний на $\overline{\Omega}$, то $H^{\alpha}(\Omega, A) \subset C^{\infty}(\Omega)$ (див., наприклад, [3, розд. 2, теорема 3.2]). Проте $H^{\alpha}(\Omega, A) \not\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Покладемо

$$N_1^{+} := \big\{(C_1^{+}v, \dots, C_q^{+}v) : \, v \in N^{+}\big\}.$$

Звісно, $\dim N_1^+ \leq \dim N^+ < \infty$. Відмітимо, що може бути строга нерівність $\dim N_1^+ < \dim N^+$, як це випливає з [15, с. 257].

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. Тоді множина $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ щільна у просторі $H^\alpha(\Omega, A)$, а відображення $u \mapsto Bu$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого нетерового оператора*

$$B : H^\alpha(\Omega, A) \to \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\alpha\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{H}_\alpha(\Gamma). \tag{9}$$

Ядро цього оператора дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ таких, що

$$\sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \quad \textit{для усіх} \quad v \in N^+. \tag{10}$$

Індекс оператора (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N_1^+$ *й не залежить від α.*

У формулі (9) використано для зручності функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$. Отже,

$$(\alpha\varrho^{-m_j-1/2})(t) = \alpha(t)\, t^{-m_j-1/2} \quad \text{для довільного} \quad t \geq 1.$$

Будемо і надалі використовувати параметр ϱ у позначеннях просторів Хермандера для того, щоб не писати аргумент t у верхньому індексі, який служить показником регулярності для цих просторів.

З огляду на теорему 1 нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо оператор T нетерів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2 (див., наприклад, [38, лема 19.1.1]). Індекс нетерового оператора T означається за формулою

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1)).$$

Відмітимо також, що у формулі (10) величина $(g_j, C_j^+ v)_\Gamma$ є значенням розподілу $g_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на основній функції $C_j^+ v \in C^\infty(\Gamma)$.

Якщо $N = \{0\}$ і $N_1^+ = \{0\}$, то оператор (9) є ізоморфізм простору $H^\alpha(\Omega, A)$ на $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$. У загальному випадку ізоморфізм зручно будувати за цим оператором за допомогою такої леми.

Лема 1. *Нехай* $\alpha \in \mathrm{RO}$. *Тоді правильні такі розклади просторів, у яких діє оператор* (9), *у вигляді прямих сум підпросторів*

$$H^\alpha(\Omega, A) = N \dotplus \{u \in H^\alpha(\Omega, A) : (u, w)_\Omega = 0 \ \ \forall\, w \in N\}, \quad (11)$$

$$\mathcal{H}_\alpha(\Gamma) = N_1^+ \dotplus \{(g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_\alpha(\Gamma) : \textit{виконується}\ (10)\}. \quad (12)$$

У формулі (11) *півторалінійна форма* $(u, w)_\Omega$ *коректно означена на довільних функціях* $u \in H^\alpha(\Omega, A)$ *і* $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *за формулою* $(u, w)_\Omega := \lim\limits_{k\to\infty} (u_k, w)_\Omega$, *де* $(u_k)_{k=1}^\infty$ *є довільна послідовність, яка лежить у* $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ *і прямує до* u *у просторі* $H^\alpha(\Omega, A)$.

У зв'язку з цією лемою корисно відмітити таке. Нехай $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $\alpha \in \mathrm{RO}$. Якщо $\sigma_1(\alpha) < -1/2$, то відображення $u \mapsto (u, w)_\Omega$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна, взагалі кажучи, продовжити до обмеженого лінійного функціонала на просторі $H^\alpha(\Omega)$. Зокрема, для соболєвських просторів це випливає з їх властивостей [4, теореми 4.8.2(c) і 4.3.2/1(c)]. Втім, відображення $u \mapsto (u, w)_\Omega$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$, допускає продовження (за неперервністю) до обмеженого лінійного функціонала на підпросторі $H^\alpha(\Omega, A)$, яке б не було число $\sigma_1(\alpha)$. Це стверджує останнє речення леми.

Позначимо через P і P_1^+ проектори відповідно просторів $H^\alpha(\Omega, A)$ і $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ на другий доданок у сумах (11) і (12) паралельно першому доданку.

Теорема 2. *Для кожного* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *звуження відображення* (9) *на підпростір* $P(H^\alpha(\Omega, A))$ *є ізоморфізмом*

$$B : P(H^\alpha(\Omega, A)) \leftrightarrow P_1^+(\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)). \quad (13)$$

Ця теорема дає підстави говорити, що напіводнорідна еліптична крайова задача (1), (2) породжує *повний* набір ізоморфізмів (13), оскільки у ньому параметр α пробігає *увесь* клас RO.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $(g_1,\ldots,g_q) \in H_\alpha(\Gamma)$. Функцію $u \in H^\alpha(\Omega, A)$ називаємо (сильним) узагальненим розв'язком напіводнорідної крайової задачі (1), (2), якщо $Bu = (g_1,\ldots,g_q)$, де B позначає оператор (9). Цей розв'язок задовольняє таку апріорну оцінку.

Теорема 3. *Для будь-якої функції* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *і кожного числа* $\sigma > 0$ *існує число* $c = c(\alpha,\sigma) > 0$ *таке, що для довільної функції* $u \in H^\alpha(\Omega, A)$ *виконується нерівність*

$$\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq c\bigl(\|Bu\|_{\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)} + \|u\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)}\bigr). \tag{14}$$

Для уточненої соболєвської шкали, яка є важливим підкласом розширеної соболєвської шкали, теореми 1 і 3 доведено в [14, теореми 1.1 і 7.1] (див. також монографії [17,18, п. 3.3]). У випадку соболєвських просторів, коли $\alpha(t) \equiv t^s$ і $s \in \mathbb{R} \setminus \{1/2 - k : k \in \mathbb{N}\}$, теореми 1 і 3 містяться у результатах Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [3, с. 216 і 217]. Наскільки нам відомо, лема 1 і пов'язана з нею теорема 2 є новими навіть для соболєвських просторів.

Зауважимо, що теореми 1 і 2 можна вважати деякими версіями класичної теореми Ґарнака про достатні умови збіжності послідовності гармонічних функцій (див., наприклад, [39, п. 2.6]). При цьому замість рівномірної збіжності використовується збіжність у просторі Хермандера $H^\alpha(\Omega)$.

5. Допоміжні результати

Доведення теореми 1 буде спиратися на два результати, отриманих нами у статтях [30, 40]. Вони стосуються характеру розв'язності неоднорідних регулярних еліптичних крайових задач у просторах Хермандера, які належать до розширеної соболєвської шкали. Наведемо тут ці результати. З огляду на позначення, використані у зазначених статтях, будемо у цьому розділі подавати функціональний параметр α у вигляді $\alpha = \varphi\varrho^{2q}$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Твердження 1. *Нехай параметр* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *задовольняє умову* $\sigma_0(\varphi) > -1/2$. *Тоді відображення* $u \mapsto (Au, Bu)$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого і нетерового оператора*

$$(A, B) : H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega) \to H^\varphi(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\varphi\varrho^{2q}}(\Gamma). \tag{15}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, *а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^\varphi(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\varphi\varrho^{2q}}(\Gamma)$$

таких, що

$$(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \quad \text{для кожного} \quad v \in N^+. \tag{16}$$

Індекс оператора (15) *дорівнює* $\dim N - \dim N^+$ *й не залежить від* φ.

Це твердження доведено у статті [30, теорема 1].

Воно не є істинним у випадку, коли $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$. Зокрема, відображення $u \mapsto B_j u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного оператора $B_j : H^{(s+2q)}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$, якщо $s + 2q \leq m_j + 1/2$ (див. [3, теорема 9.5]). У цьому випадку нам знадобиться версія твердження 1, у якій простір $H^\varphi(\Omega)$ замінено на деякий більш вужчий простір $H^\eta(\Omega)$. Перед тим, як її сформулювати, введемо простір, що слугуватиме у ній областю визначення оператора (A, B).

Нехай $\varphi, \eta \in \mathrm{RO}$. Покладемо

$$D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) := \bigl\{u \in H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega) : \, Au \in H^\eta(\Omega)\bigr\}.$$

У лінійному просторі $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ означимо скалярний добуток розподілів u_1 і u_2 за формулою

$$(u_1, u_2)_{D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)} := (u_1, u_2)_{H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)} + (Au_1, Au_2)_{H^\eta(\Omega)}.$$

Останній задає на $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$ структуру гільбертового простору [40, с. 49, 50] (у цій роботі зроблено зайве припущення про те, що функція φ/η обмежена в околі нескінченності). Виконується неперервне вкладення $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varphi\varrho^{2q}}(\Omega)$.

Сформулюємо тепер потрібний нам результат. Нехай довільно вибрано функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ із $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$ і числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, які задовольняють умови $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ і $s_1 \geq 0$. Покладемо

$$\eta(t) := t^{-s_0 s_1/(s_1-s_0)}\varphi(t^{s_1/(s_1-s_0)}) \quad \text{при} \quad t \geq 1. \tag{17}$$

Функція η належить до класу RO, причому виконується неперервне вкладення $H^{\eta}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$.

Твердження 2. *У зроблених припущеннях множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega)$, а відображення $u \to (Au, Bu)$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого і нетерового оператора*

$$(A, B) : D^{\varphi\varrho^{2q}}_{A,\eta}(\Omega) \to H^{\eta}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\varphi\varrho^{2q}}(\Gamma). \tag{18}$$

Ядро цього оператора збігається з N, а область значень складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in H^{\eta}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{\varphi\varrho^{2q}}(\Gamma),$$

які задовольняють умову (16). *Індекс оператора* (18) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *й не залежить від φ і η.*

Це твердження доведено у статті [40, теорема 1].

Для доведення леми 1 знадобиться шкала $\{H^{s,(2q)}(\Omega) : s \in \mathbb{R}\}$ гільбертових просторів, уведена Я. А. Ройтбергом [11, 12]. Вона знайшла різні застосування у теорії еліптичних крайових задач [1, 13, 41, 42].

Попередньо введемо гільбертів простір $H^{s,(0)}(\Omega)$, за допомогою якого будується простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$. Покладемо $H^{s,(0)}(\Omega) :=$

$H^{(s)}(\Omega)$ у випадку, коли $s \geq 0$. Якщо $s < 0$, то $H^{s,(0)}(\Omega)$ позначає дуальний гільбертів простір до простору $H^{(-s)}(\Omega)$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. А саме, $H^{s,(0)}(\Omega)$, де $s < 0$, є поповненням множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,(0)}(\Omega)} := \\ := \sup\left\{ \frac{|(u,w)_\Omega|}{\|w\|_{H^{(-s)}(\Omega)}} : w \in H^{(-s)}(\Omega),\, w \neq 0 \right\}. \tag{19}$$

Тепер можемо означити гільбертів простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$. Покладемо $E_{2q} := \{1/2, 3/2, \ldots, 2q - 1/2\}$. Якщо $s \in \mathbb{R} \setminus E_{2q}$, то, за означенням, простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,(2q)}(\Omega)} := \\ := \left(\|u\|^2_{H^{s,(0)}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{2q} \|(\partial_\nu^{k-1} u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{(s-k+1/2)}(\Gamma)} \right)^{1/2}. \tag{20}$$

Тут ∂_ν — оператор диференціювання уздовж орта ν внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω. Якщо $s \in E_{2q}$, то простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$ означений за допомогою інтерполяції пари гільбертових просторів; а саме:

$$H^{s,(2q)}(\Omega) := \left[H^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(2q)}(\Omega)\right]_{1/2},$$

де $0 < \varepsilon < 1$. Права частина цієї рівності не залежить з точністю до еквівалентності норм від зазначеного вибору ε. Означення інтерполяційного простору $[E_1, E_2]_{1/2}$ для довільної пари гільбертових просторів E_1 і E_2 таких, що неперервно $E_2 \hookrightarrow E_1$, наведено, наприклад, у монографії [3, розд. 1, п. 2.1].

Нам потрібна така властивість простору $H^{s,(2q)}(\Omega)$.

Твердження 3. *Для будь-якого $s \in \mathbb{R}$ норми у просторах $H^{s,(2q)}(\Omega)$ і $H^{(s)}(\Omega)$ еквівалентні на $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$.*

Якщо $s > 2q - 1/2$, то твердження 3 випливає з еквівалентності зазначених у ньому норм на $C^\infty(\overline{\Omega})$ (див. [13, п. 2.1]). Якщо $s \leq 2q - 1/2$, то це твердження є прямим наслідком ізоморфізму (4.196) з монографії [17, п. 4.4.2], у якому покладаємо $\sigma + 2q := s$, $L := A$ і $X := \{0\}$ (а також рівності (4.198) цієї монографії у випадку напівцілих $s < 0$).

6. Доведення

Доведемо послідовно теорему 1, лему 1 і теореми 2 і 3.

Доведення теореми 1. З огляду на позначення, застосовані у попередньому розділі, покладемо $\varphi := \alpha\varrho^{-2q}$; тоді $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\alpha = \varphi\varrho^{2q}$. Скористаємося твердженням 1 у випадку $\sigma_0(\varphi) > -1/2$, або твердженням 2 у випадку $\sigma_0(\varphi) \leq -1/2$. Розглянемо звуження обмежених нетерових операторів (15) і (18) на простір $H^\alpha(\Omega, A)$. У кожному з цих випадків отримаємо обмежений оператор

$$(A, B) : H^\alpha(\Omega, A) \to \{0\} \oplus \mathcal{H}_\alpha(\Gamma).$$

Його друга компонента є обмеженим оператором (9). Покажемо, що цей оператор задовольняє висновок теореми 1.

Ядро $\ker B$ оператора (9) дорівнює N і тому скінченновимірне. Справді, $\ker B = N \cap H^\alpha(\Omega, A) = N$ за побудовою цього оператора і на підставі тверджень 1 і 2. Область значень оператора (9) складається з усіх векторів $(g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ таких, що вектор $(0, g_1, \ldots, g_q)$ належить до області значень оператора (15) або (18) у залежності від числа $\sigma_0(\varphi)$. Тому, згідно з цими твердженнями, область значень оператора (9) замкнена і складається з усіх векторів $(g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$, які задовольняють (10). Покажемо, що її ковимірність дорівнює $\dim N_1^+$. Розглядаємо N_1^+ як скінченновимірний підпростір простору $\mathcal{H}_{1/\alpha}(\Gamma)$. Останній є дуальним до простору $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$. (Це стандартним чином випливає з очевидної дуальності просторів $H^{1/\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ і $H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$ відносно скалярного добутку в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Зауважимо також, що, звісно, $\alpha \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\alpha \in \mathrm{RO}$.) Тому простір, дуальний до підпростору N_1^+, збігається з фактор-простором

$$\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)/\bigl\{(g_1,\dots,g_q) \in \mathcal{H}_\alpha(\Gamma) : \text{ виконується умова (10)}\bigr\}.$$

Отже, ковимірність області значень оператора (9) дорівнює $\dim N_1^+$ і тому скінченна. Таким чином, цей оператор нетерів, причому його індекс дорівнює $\dim N - \dim N_1^+$.

Залишається показати, що множина $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ щільна у просторі $H^\alpha(\Omega, A)$, а обмежений оператор (9) є продовженням відображення $u \to Bu$, заданого на функціях $u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$. Друга з цих властивостей виконується за побудовою цього оператора і на підставі тверджень 1 і 2. Обґрунтуємо зазначену щільність. Будемо міркувати подібно до роботи [14, с. 1551 – 1553].

Нетерів обмежений оператор (9) породжує у канонічний спосіб (топологічний) ізоморфізм

$$B : H^\alpha(\Omega, A)/N \leftrightarrow \mathcal{R}_\alpha(\Gamma). \tag{21}$$

Тут і далі через $\mathcal{R}_\alpha(\Gamma)$ позначено область значень оператора (9), яка розглядається як підпростір простору $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$. Розглянемо ізоморфізм B^{-1}, обернений до (21). Він кожному вектору $g = (g_1,\dots,g_q) \in \mathcal{R}_\alpha(\Gamma)$ ставить у відповідність клас суміжності

$$B^{-1}g = [u] = \{u + w : w \in N\} \in H^\alpha(\Omega, A)/N$$

елемента $u \in H^\alpha(\Omega, A)$ такого, що $Bu = g$.

Відмітимо, що

$$\begin{gathered} g \in \mathcal{R}_\alpha(\Gamma) \cap \bigl(C^\infty(\Gamma)\bigr)^q \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigl(B^{-1}g = [u] \text{ для деякого } u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)\bigr). \end{gathered} \tag{22}$$

Справді, якщо виконується посилка цієї імплікації, то напіводнорідна еліптична крайова задача (1), (2) має розв'язок $u \in$

$H^{(2q)}(\Omega)$ на підставі твердження 1, розглянутого у випадку соболєвських просторів. Оскільки праві частини цієї задачі є нескінченно гладкими, то $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (див., наприклад, [3, с. 191]). Тому $u \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ і $Bu = g$ у сенсі оператора (9), тобто є правильним висновок імплікації (22).

Тепер не важко обґрунтувати щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ у просторі $H^\alpha(\Omega, A)$. Виберемо довільну функцію $u \in H^\alpha(\Omega, A)$ і покладемо

$$g := Bu = B[u] \in \mathcal{R}_\alpha(\Gamma) \subset \mathcal{H}_\alpha(\Gamma).$$

Оскільки множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна у кожному просторі $H^\chi(\Gamma)$, де $\chi \in \mathrm{RO}$, то існує послідовність $(g^{(k)})_{k=1}^\infty \subset (C^\infty(\Gamma))^q$ така, що $g^{(k)} \to g$ в $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ при $k \to \infty$. Оскільки підпростори $\mathcal{R}_\alpha(\Gamma)$ і N_1^+ простору $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$ задовольняють умови

$$\mathcal{R}_\alpha(\Gamma) \cap N_1^+ = \{0\} \quad \text{і} \quad \operatorname{codim} \mathcal{R}_\alpha(\Gamma) = \dim N_1^+ < \infty,$$

то

$$\mathcal{H}_\alpha(\Gamma) = N_1^+ \dotplus \mathcal{R}_\alpha(\Gamma). \tag{23}$$

На підставі цієї прямої суми запишемо $g = 0 + g$ і $g^{(k)} = \omega^{(k)} + h^{(k)}$ для довільного номера k, де кожне $\omega^{(k)} \in N_1^+$ і $h^{(k)} \in \mathcal{R}_\alpha(\Gamma)$. Звідси, використовуючи властивості послідовності $(g^{(k)})_{k=1}^\infty$, робимо висновок, що послідовність векторів

$$h^{(k)} = g^{(k)} - \omega^{(k)} \in \mathcal{R}_\alpha(\Gamma) \cap \big(C^\infty(\Gamma)\big)^q$$

прямує до вектора g у просторі $\mathcal{H}_\alpha(\Gamma)$. Тому $B^{-1}h^{(k)} = [u_k]$ для деякої функції $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ на підставі властивості (22). Окрім того,

$$[u_k] = B^{-1}h^{(k)} \to B^{-1}g = [u],$$

тобто $[u_k - u] \to 0$ у факторпросторі $H^\alpha(\Omega, A)/N$ при $k \to \infty$. Отже, $u_k - u + w_k \to 0$ у просторі $H^\alpha(\Omega, A)$ при $k \to \infty$ для деякої послідовності $(w_k)_{k=1}^\infty \subset N$. Таким чином, $u_k + w_k \to u$ в $H^\alpha(\Omega, A)$ при $k \to \infty$, де кожне $u_k + w_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, A)$. З огляду на довільність вибору функції $u \in H^{\alpha}(\Omega, A)$ ми встановили щільність множини $C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ у просторі $H^{\alpha}(\Omega, A)$.

Теорема 1 доведена.

Доведення леми 1. Обґрунтуємо спочатку останнє її речення. Нехай від'ємне число $s < \sigma_0(\alpha)$. Виберемо довільним чином функцію $w \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Застосувавши послідовно формули (19), (20), твердження 3 і праве неперервне вкладення (8), отримаємо для будь-якої функції $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ такі нерівності:

$$
\begin{aligned}
|(u, w)_{\Omega}| \leq \|u\|_{H^{s,(0)}(\Omega)} \|w\|_{H^{(-s)}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^{s,(2q)}(\Omega)} \|w\|_{H^{(-s)}(\Omega)} \leq \\
\leq c_1 \|u\|_{H^{(s)}(\Omega)} \|w\|_{H^{(-s)}(\Omega)} \leq c_1 c_2 \|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \|w\|_{H^{(-s)}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Тут c_1 і c_2 — деякі додатні числа, незалежні від u і w. Отже, існує число $c = c(w) > 0$ таке, що для довільної функції $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ правильна нерівність

$$
|(u, w)_{\Omega}| \leq c \, \|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)}.
$$

Звідси негайно випливає, що лінійний функціонал $(u, w)_{\Omega}$, заданий на функціях $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$, продовжується за неперервністю до лінійного обмеженого функціоналу $(\cdot, w)_{\Omega}$ на просторі $H^{\alpha}(\Omega, A)$. Тим самим обґрунтоване останнє речення леми.

Доведемо тепер формулу (11). Попередньо відмітимо, що другий доданок у її правій частині є підпростором з огляду на неперервність функціоналу $(\cdot, w)_{\Omega}$ на $H^{\alpha}(\Omega, A)$. Скористаємося таким розкладом простору $H^{s,(0)}(\Omega)$ у пряму суму підпросторів:

$$
H^{s,(0)}(\Omega) = N \dotplus \big\{ v \in H^{s,(0)}(\Omega) : \, (v, w)_{\Omega} = 0 \ \ \forall \, w \in N \big\}. \tag{24}
$$

Ця рівність правильна, оскільки підпростори у її правій частині, звісно, мають лише тривіальний перетин і, окрім того, ковимірність другого з них дорівнює скінченній вимірності першого. Останнє обґрунтовується так: якщо розглядати N як підпростір простору $H^{(-s)}(\Omega)$, то простір, дуальний до N відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$, є факторпростором простору $H^{s,(0)}(\Omega)$ за другим доданком у формулі (24), і тому вимірність цього факторпростору дорівнює $\dim N$.

Звісно, підпростори у правій частині потрібної нам формули (11) теж мають лише тривіальний перетин, проте обґрунтування того, що ковимірність другого з них дорівнює $\dim N$ не проходить у запропонований щойно спосіб. Втім, можна використати розклад (24). Довільно виберемо функцію $\omega \in H^{\alpha}(\Omega, A)$. Нам треба показати, що її можна зобразити у вигляді $\omega = w^{\circ} + v^{\circ}$, де $w^{\circ} \in N$, а $v^{\circ} \in H^{\alpha}(\Omega, A)$ задовольняє умову $(v^{\circ}, w)_{\Omega} = 0$ для довільного $w \in N$. Нехай послідовність $(\omega_k)_{k=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ така, що $\omega_k \to \omega$ у просторі $H^{\alpha}(\Omega, A)$ при $k \to \infty$. Згідно з правим неперервним вкладенням (8) ця послідовність збігається у соболєвському просторі $H^{(s)}(\Omega)$. Тому вона фундаментальна у просторі $H^{s,(2q)}(\Omega)$ на підставі твердження 3. Отже, вона фундаментальна і у просторі $H^{s,(0)}(\Omega)$ з огляду на формулу (20). На підставі розкладу (24) запишемо $\omega_k = w_k + v_k$ для кожного номера k; тут $w_k \in N$, а $v_k \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ задовольняє умову

$$(v_k, w)_{\Omega} = 0 \quad \text{для довільного} \quad w \in N. \tag{25}$$

З фундаментальності послідовності $(\omega_k)_{k=1}^{\infty}$ у просторі $H^{s,(0)}(\Omega)$ випливає фундаментальність послідовностей $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset N$ і $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ у ньому ж. Оскільки простір N скінченновимірний, то на ньому усі норми еквівалентні. Отже, послідовність $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна у просторі $H^{\alpha}(\Omega, A)$ і тому збігається у ньому до деякої функції $w^{\circ} \in N$. Покладемо $v^{\circ} := \omega - w^{\circ} \in H^{\alpha}(\Omega, A)$. Відмітимо, що

$$v_k = \omega_k - w_k \to \omega - w^{\circ} = v^{\circ} \quad \text{в} \quad H^{\alpha}(\Omega, A) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тому, перейшовши до границі у формулі (25), отримуємо потрібну нам властивість функції v°:

$$(v^{\circ}, w)_{\Omega} = \lim_{k \to \infty} (v_k, w)_{\Omega} = 0 \quad \text{для довільного} \quad w \in N.$$

Тим самим ми обґрунтували розклад (11).

Другий розклад у цій лемі — формулу (12) — встановлено у доведенні теореми 1 як розклад (23).

Лема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За теоремою 1 звуження обмеженого оператора (9) на підпростір $P(H^{\alpha}(\Omega, A))$ є обмеженим оператором

$$B : P(H^{\alpha}(\Omega, A)) \to P_1^{+}(\mathcal{H}_{\alpha}(\Gamma)). \tag{26}$$

Покажемо, що останній оператор бієктивний. Він ін'єктивний. Справді, якщо $Bu = 0$ для деякої функції $u \in P(H^{\alpha}(\Omega, A))$, то $u \in N$. Звідси на підставі розкладу (11) з леми 1 робимо висновок, що $u = 0$.

Доведемо, що оператор (26) сюр'єктивний. Виберемо довільним чином вектор $g \in P_1^{+}(\mathcal{H}_{\alpha}(\Gamma))$. За теоремою 1 існує функція $u \in H^{\alpha}(\Omega, A)$ така, що $Bu = g$. Скориставшись розкладом (11), запишемо $u = u_1 + u_2$, де $u_1 \in N$ і $u_2 \in P(H^{\alpha}(\Omega, A))$. Тоді

$$g = Bu = Bu_1 + Bu_2 = Bu_2.$$

Отже, оператор (26) сюр'єктивний.

Таким чином, лінійний обмежений оператор (26) є бієктивним. Отже, він є ізоморфізмом (13) за теоремою Банаха про обернений оператор.

Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. Довільно виберемо функцію $\alpha \in \mathrm{RO}$ і число $\sigma > 0$. Для доведення потрібної оцінки (14) скористаємося теоремою 2 і проектором P. Для довільної функції $u \in H^{\alpha}(\Omega, A)$ маємо такі нерівності:

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{H^{\alpha}(\Omega)} + \|u - Pu\|_{H^{\alpha}(\Omega)}, \tag{27}$$

$$\|Pu\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \leq c_1 \, \|BPu\|_{\mathcal{H}_{\alpha}(\Gamma)} = c_1 \, \|Bu\|_{\mathcal{H}_{\alpha}(\Gamma)}. \tag{28}$$

Тут c_1 — норма оператора, оберненого до ізоморфізму (13). Відмітимо, що остання рівність правильна, оскільки

$$Bu = BPu + B(u - Pu) = BPu,$$

де $u - Pu \in N$.

Оцінимо останню норму у формулі (27). Оскільки простір N скінченновимірний, то на ньому усі норми еквівалентні, зокрема, норми у просторах $H^{\alpha}(\Omega)$ і $H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)$. Тому існує число $c_2 > 0$ таке, що для довільного $u \in H^{\alpha}(\Omega, A)$ правильна нерівність

$$\|u - Pu\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \leq c_2 \, \|u - Pu\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)} \leq$$
$$\leq c_2 \left(\|u\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)} + \|Pu\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)} \right) \leq c_2(1 + c_3) \|u\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)}.$$

Тут c_3 — норма проектора

$$P : H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega, A) \to H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega, A).$$

Отже,

$$\|u - Pu\|_{H^{\alpha}(\Omega)} \leq c_2(1 + c_3) \|u\|_{H^{\alpha\varrho^{-\sigma}}(\Omega)}. \tag{29}$$

Тепер потрібна оцінка (14) є прямим наслідком нерівностей (27) – (29).

Теорема 3 доведена.

7. Висновки

У гільбертових просторах Хермандера досліджено регулярну еліптичну крайову задачу (1), (2) для однорідного еліптичного рівняння, заданого в обмеженій евклідовій області з нескінченно гладкою межею. Доведено, що оператор, відповідний цій задачі, є обмеженим і нетеровим у підходящих парах просторів Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу (теорема 1). Показником регулярності для простору Хермандера, який служить областю визначення цього оператора, є довільна функція класу RO. Доведено, що зазначений оператор породжує повний набір ізоморфізмів між підпросторами скінченної ковимірності відповідних просторів Хермандера (теорема 2). Встановлено апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі у просторах Хермандера (теорема 3).

Література

[1] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 800 с.

[2] *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.

[3] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[4] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

[5] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с. (Перевод англоязычного издания: *Hörmander L.* Linear Partial Differential Operators. — Berlin etc., Springer–Verlag, 1963).

[6] *Функциональный анализ* / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[7] *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. **79**. Partial differential equations, IX. – Berlin: Springer–Verlag, 1997. – P. 1–144.

[8] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, V // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). – 1962. – **16**. – P. 1–44.

[9] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, VI // J. Anal. Math. – 1963. – **11**. – P. 165–188.

[10] *Мадженес Э.* Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, 2. – С. 169–218.

[11] *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, 4. – С. 798–801.

[12] *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, 5. – С. 122–129.

[13] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996. – xii+415 p.

[14] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, 11. – С. 1536–1555.

[15] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.

[16] Paneah B. The oblique derivative problem. The Poincaré problem.— Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

[17] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[18] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p.

[19] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean Spaces. – Basel: Birkhäser, 2010. – x+306 p.

[20] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. матем. журн. – 2005. – **57**, № 5 – С. 689–696.

[21] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, 3. – С. 352–370.

[22] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, 1. – P. 81–100.

[23] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, 1. – С. 205–226.

[24] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, 3. – С. 368–380.

[25] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, 1. – P. 135–152.

[26] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[27] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[28] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Простори Хермандера та еліптичні задачі // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, 1–2. – С. 129–144.

[29] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, 2. – P. 211–281.

[30] *Аноп А. В., Мурач А. А.* Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, 7. – С. 867–883.

[31] *Anop A. V., Murach A. A.* Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, 2. – P. 103–116.

[32] *Аноп А. В.* Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. – 2014. – 4. – С. 7–14.

[33] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі // Диференціальні рівняння та суміжні питання аналізу / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, 2. – С. 37–59.

[34] *Аноп А. В.* Еліптичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у просторах узагальненої гладкості // Диференціальні рівняння та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, 2. – С. 7–34.

[35] *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167–186.

[36] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 271–279.

[37] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, 1. – С. 3–74.

[38] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.

[39] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

[40] *Аноп А. В., Мурач О. О.* До теорії еліптичних крайових задач у просторах Хермандера // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, 2. – С. 39–64.

[41] *Roitberg Ya. A.* Boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1999. – x+276 p.

[42] *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. — Providence: American Mathematical Society, 1997. – ix+414 p.