

О колебании физического маятника с многослойной идеальной жидкостью

Ю. Н. Кононов

*Донецкий национальный университет, Винница;
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com*

Planar oscillations of a physical pendulum with a cavity partially filled by a heavy multilayer ideal incompressible fluid is considered in a linear statement. When assuming the hydrostatic stratification, the structure of the spectrum is studied, the necessary and sufficient conditions for stability are discussed, the stratification effect on the stability of the rigid body equilibrium is evaluated. It is shown that the stratification reduces the stability margin.

У лінійній постановці розглянуто плоскі коливання фізичного маятника з порожниною, яка частково заповнена m -шаровою ідеальною нестисливою рідиною. У припущенні природної стратифікації, тобто коли більш важка рідина знаходиться нижче менш важкої, досліджено структуру спектра, отримано необхідні і достатні умови стійкості та оцінено вплив стратифікації рідини на стійкість положення рівноваги твердого тіла. Показано, що стратифікація призводить до зменшення запасу стійкості.

1. Введение

Физический маятник с полостью, частично заполненной однородной жидкостью, является хорошей физической и математической моделью для описания и исследования колебаний многих механических систем. Так, например, в теории корабля, перевозящего жидкие грузы, при строительстве высотных сооружений как стабилизационный элемент для амортизации резонансных колебаний (Tuned Liquid

Dampes или Active Liquid Dampes) и мн. др. Однако, в результате физических, химических, биологических и других воздействий однородная жидкость может стратифицироваться, т.е. разделяться на слои различной плотности, что приводит к увеличению степеней свободы системы, образованию внутренних волн, смещению центра тяжести и изменению моментов инерции механической системы. Таким образом, колебание физического маятника до стратификации может быть устойчивым, а после — стать неустойчивым. В этой связи возникает задача о влиянии стратификации на динамику и устойчивость движения твердого тела. В качестве простейшего закона стратификации обычно выбирается кусочно-постоянная плотность и рассматривается многослойная несмешивающаяся жидкость.

По-видимому, впервые задачу о колебании физического маятника с полостью, содержащей однородную идеальную тяжелую жидкость со свободной поверхностью, рассмотрел Н. Н. Моисеев в работах [1–3]. Наиболее полное решение этой задачи приведено в известной монографии Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [4]. Затем появилось достаточно большое число работ по этой тематике. Приведем только некоторые. Так, например, в работе [5], исходя из определения устойчивости по отношению к части переменных, для ряда форм полостей получены достаточные условия устойчивости равновесия физического маятника с идеальной жидкостью. В статье [6] учтена переменность массы идеальной однородной жидкости. В работе [7] из принципа Гамильтона–Остроградского получены и исследованы уравнения малых колебаний физического маятника с двухслойной идеальной жидкостью, а в статье [8] вводится мембрана, разделяющая эти жидкости. Устойчивость равновесия физического маятника с многослойной идеальной жидкостью, разделенной упругими пластинками, исследована в [9]. В кандидатской диссертации [10] разработан эффективный вариационный метод решения спектральных краевых задач, описывающих малые колебания физического маятника с идеальной жидкостью. На примере сферической полости с двухслойной идеальной жидкостью показана его эффективность. Исследованию малых колебаний физического маятника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, посвящено также достаточно много работ. В качестве основных можно отметить работы [4, 11–15]. В кандидатских диссертациях [14, 15] с позиции функционального анализа рассмотрены малые плоские колебания физического маятника с полостью, заполненной системой из идеальных или вязких, тяжелых или ка-

пильярных жидкостей.

В данной статье обобщаются результаты работ [4, 7] на случай m тяжелых идеальных несмешивающихся жидкостей.

2. Постановка задачи и вывод уравнений малых колебаний физического маятника с многослойной жидкостью

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тяжелого твердого тела с полостью, содержащей m тяжелых идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_i , частично заполняющих область τ ($\tau = \bigcup_{i=1}^m \tau_i$) до глубин h_i и совершающих безвихревое движение. Твердое тело совершает малые колебания вокруг неподвижной оси и жестким невесомым стержнем связано с неподвижной точкой O_1 . Начало неподвижной системы координат O_1XYZ поместим в точку подвеса, направив ось O_1Z противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Движение жидкостей будем рассматривать в связанной с твердым телом системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oxy совпадает со свободной поверхностью многослойной жидкости S_1 в состоянии покоя (рис. 1). Будем рассматривать плоские колебания маятника. Допустимость такого рассмотрения, как это отмечалось в монографии [4], требует дополнительных предположений о форме полости или свойствах подвеса.

Составим выражение для кинетической энергии рассматриваемой механической системы, считая движение жидкостей потенциальными

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_i} \left(\nabla \tilde{\Phi}_i + \dot{\theta} \nabla \Psi_{i1} \right)^2 dz. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{\Phi}_i = \Phi_i + l_0 \dot{\theta} y$, Φ_i — потенциал относительной скорости движения i -ой жидкости, $l_0 = OO_1$; Ψ_{i1} — первая компонента потенциала Стокса–Жуковского $\vec{\Psi}_i$ для τ_i полости с твердой границей $\tilde{\Sigma}_i = S_i \cup \Sigma_i \cup S_{i+1}$, где Σ_i — смачиваемая поверхность τ_i области, S_i — невозмущенная свободная ($i = 1$) или внутренняя плоская поверхность (поверхность раздела $i - 1$ и i -ой жидкости). В дальнейшем для удобства записи в функции Ψ_{i1} индекс 1 будем опускать. Предположим, что центры масс твердого тела и плоской фигуры S_i лежат на прямой Oz .

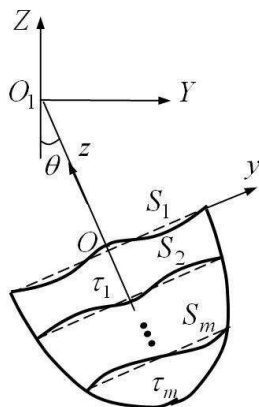


Рис. 1. Физический маятник с многослойной жидкостью.

Так как задача рассматривается в линейной постановке, то интегрирование в (1) будем проводить по объему, занятому жидкостями в положении равновесия. В этом случае кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i0}} \nabla \tilde{\Phi}_i \nabla \Psi_i d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i0}} (\nabla \tilde{\Phi}_i)^2 d\tau, \quad (2)$$

где $J = J_0 + \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i0}} (\nabla \Psi_i)^2 d\tau$ — момент инерции эквивалентного твердого тела; τ_{i0} — объем, занятый i -ой жидкостью в положении равновесия. Составим выражение для потенциальной энергии системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2. \quad (3)$$

Здесь $\Pi_1 = \frac{1}{2} \tilde{l}_0 m_0 g \theta^2$ — потенциальная энергия твердого тела; $\Pi_2 = g \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_i} z d\tau$ — потенциальная энергия многослойной жидкости; m_0 — масса твердого тела; \tilde{l}_0 — расстояние от центра масс твердого тела до точки O_1 .

В выражении (3) интегрирование должно быть распространено по всему объему, занятому многослойной жидкостью, так как замена области τ_i на τ_{i0} приводит к ошибкам не третьего, а второго порядка

малости [4]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_i} Z d\tau &= \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i0}} Z d\tau + \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i1}} Z d\tau = \\ &= Z^* \sum_{i=1}^m \rho_i \tau_{i0} + \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{\tau_{i1}} Z d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tau_i = \tau_{i0} \cup \tau_{i1}$; Z^* — аппликата центра тяжести многослойной жидкости в состоянии покоя. Предположив, что центр тяжести объема τ_{i0} лежит на продолжении прямой O_1O , получим

$$Z^* = \frac{1}{2} l^* \theta^2 + const + O(\theta^3).$$

Здесь $l^* = (\sum_{i=1}^m \rho_i \tau_{i0} l_{i0}) / M_2$, l_{i0} — расстояние от центра тяжести объема τ_{i0} до точки O_1 ; $M_2 = \sum_{i=1}^m m_i$ — масса многослойной жидкости.

Преобразуем интеграл в правой части выражения (4), замечая, что $Z = (z - l_0) \cos \theta + y \sin \theta$. Отбрасывая малые высшего порядка, будем иметь

$$\Pi = \frac{1}{2} k^2 \theta^2 + g\theta \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} y \zeta_i ds + \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} \zeta_i^2 ds. \quad (5)$$

Здесь $k^2 = (\tilde{l}_0 m_0 + l^* M_2) g$.

Используя формулу Грина и кинематические соотношения

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} \right|_{\Sigma_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \quad \text{на } S_i \ (i = \overline{1, m}), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \quad \text{на } S_i \ (i = \overline{2, m}), \quad (7)$$

перепишем кинетическую энергию (2)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Psi_i - \rho_{i-1} \Psi_{i-1}) \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i-1} \Phi_{i-1}) \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} ds, \end{aligned} \quad (8)$$

где $z = \zeta_i(x, y, t)$ — уравнение свободной ($i = 1$) или внутренней поверхности. Из условия несжимаемости и неразрывности i -ой жидкости следует, что $\int_{S_i} \zeta_i ds = 0$.

Из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона–Остроградского составим уравнения движения физического маятника, содержащего многослойную жидкость [4, 7]. Вариационная формулировка задачи дает обоснование необходимости и достаточности выводимых уравнений и граничных условий.

Вычислим δW , где $W = \int_0^{t_1} (T - \Pi) dt$,

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{t_1} \left\{ \left[J\dot{\theta} + \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Psi_i - \rho_{i-1} \Psi_{i-1}) \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} ds \right] \delta \dot{\theta} + \right. \\ & + \dot{\theta} \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Psi_{i1} - \rho_{i-1} \Psi_{i-1}) ds + \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i-1} \Phi_{i-1}) \delta \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} ds - \\ & - k^2 \theta \delta \theta - \delta \theta g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} y \zeta_i ds - \theta g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} y \delta \zeta_i ds - \\ & \left. - g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} \zeta_i \delta \zeta_i ds \right\} ds. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, принимая во внимание обращение вариаций в нуль на концах и используя произвольность и независимость вариаций $\delta \theta$ и $\delta \zeta_i$, приходим к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений

$$J\ddot{\theta} + k^2 \theta = - \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\rho_i \Psi_i - \rho_{i-1} \Psi_{i-1}) \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t^2} ds - g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \int_{S_i} y \zeta_i ds, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \rho_{i-1} \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t} + \Delta \rho_i \zeta_i = \\ & = - (\rho_i \Psi_i - \rho_{i-1} \Psi_{i-1} + \Delta \rho_i y l_0) \ddot{\theta} - \Delta \rho_i y \theta \quad (i = \overline{1, m}). \quad (10) \end{aligned}$$

Интегро-дифференциальные уравнения (9)–(10) можно свести к счетной системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Для этого следует решить краевую задачу о собственных колебаниях i -ой жидкости в τ_i полости, считая плоскую фигуру S_i свободной поверхностью, а S_{i+1} — абсолютно твердой плоской поверхностью. Затем следует представить Φ_i и ζ_i в виде обобщенных рядов Фурье [4, 7]

$$\begin{cases} \Phi_i = \sum_n p_{in}(t) \varphi_{in}(x, y, z), \\ \zeta_i = \sum_n \zeta_{in}(t) \psi_{in}(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

где φ_{in} — собственные функции для области τ_i , а ψ_{in} — значения функций φ_{in} на S_i . Функции ψ_{in} образуют полную и ортонормированную систему на S_i . Ввиду громоздкости данной задачи для произвольной области τ рассмотрим случай, когда эта область цилиндрическая ($S_1 = S_2 = \dots = S_m = S$, $\psi_{in} = \psi_n$) и случай двухслойной жидкости ($m = 2$) с цилиндрической полостью τ_1 ($S_1 = S_2 = S$) и произвольной τ_2 .

В первом случае представим функции $\Phi_i(x, y, z, t)$ и $\zeta_i(x, y, t)$ в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(x, y)$

$$\begin{cases} \Phi_i = \sum_n [A_{in}(t) \exp(k_n z) + B_{in}(t) \exp(-k_n z)] \psi_n(x, y), \\ \zeta_i = \sum_n \dot{\zeta}_{in}(t) \psi_n(x, y). \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя соотношения (12) в кинематические соотношения (6)–(7) и, воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n , получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A_{in}, B_{in}

$$\begin{cases} A_{mn} e^{-k_n H_{m+1}} - B_{mn} e^{k_n H_{m+1}} = 0, \\ (A_{i-1,n} - A_{in}) e^{-k_n H_i} - (B_{i-1,n} - B_{in}) e^{k_n H_i} = 0, \\ (A_{in} e^{-k_n H_i} - B_{in} e^{k_n H_i}) k_n = \dot{\zeta}_{in}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь

$$H_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k, \quad (H_1 = 0), \quad \zeta_{m+1} \equiv 0.$$

Система линейных уравнений (13) относительно A_{in} и B_{in} имеет решение

$$\begin{cases} A_{in} = \frac{e^{k_n H_i}}{2k_n \sinh \kappa_{in}} \left(e^{\kappa_{in}} \dot{\zeta}_{in} - \dot{\zeta}_{i+1,n} \right), \\ B_{in} = \frac{e^{-k_n H_i}}{2k_n \sinh \kappa_{in}} \left(e^{-\kappa_{in}} \dot{\zeta}_{in} - \dot{\zeta}_{i+1,n} \right), \\ (i = \overline{1, m}, \quad \zeta_{m+1n} = 0). \end{cases} \quad (14)$$

где $\kappa_{in} = k_n h_i$.

Подставив (12) в (9)–(10) с учетом (14), получим

$$J\ddot{\theta} + k^2\theta = - \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \sum_n D_n (\Omega_{in} \ddot{\zeta}_{in} + g\zeta_{in}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_{in} + \omega_{in}^2 \xi_{in} - \frac{1}{a_{in}} \left(b_{i-1,n} \ddot{\zeta}_{i-1,n} + b_{in} \ddot{\zeta}_{i+1,n} \right) = \\ = -\frac{\omega_{in}^2}{g} \beta_n \left(\Omega_{in} \ddot{\theta} + g\theta \right) \quad (i = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^m \left(m_i \left(\frac{h_i^2}{3} + l_0 h_i + l_0^2 \right) + \rho_i \sum_n \beta_n^2 N_n^2 (4f_{in} - 3h_i) \right), \beta_n = \frac{D_n}{N_n^2},$$

$$f_{in} = \frac{2}{k_n} \tanh \frac{\kappa_{in}}{2}, \quad D_n = \int_S y \psi_n ds, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 ds, \quad l_{0i} = l_0 + H_i,$$

$$k^2 = g \left[m_0 \tilde{l}_0 + \sum_{i=1}^n m_i \left(l_{0i} + \frac{h_i}{2} \right) \right], \quad \Omega_{in} = \frac{\rho_{i-1} f_{i-1,n} + \rho_i f_{in}}{\Delta \rho_i} + H_i + l_0,$$

$a_{in} = \rho_{i-1} \coth \kappa_{i-1,n} + \rho_i \coth \kappa_{in}$, $b_{in} = \rho_i / \sinh \kappa_{in}$, $\zeta_{m+1,n} \equiv 0$, $\rho_0 = 0$, $\omega_{in}^2 = g k_n \Delta \rho_i / a_{in}$ — частота колебаний внутренней поверхности ζ_i ($i \neq 1$) при $\zeta_{i-1} = \zeta_{i+1} \equiv 0$, т. е. при замене $i-1$ и $i+1$ внутренних поверхностей твердыми "крышками". При $i=1$ имеем $\omega_{1n}^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}$ — частота колебаний свободной поверхности ζ_1 ; l_{0i} и \tilde{l}_0 — расстояния соответственно от центра масс твердого тела и плоской фигуры S_i до оси вращения.

Во втором случае обозначим собственные функции для области τ_2 через $\varphi_{2n}(x, y, z)$ в предположении, что внутренняя поверхность ζ_2 является свободной поверхностью, а собственные значения — через λ_{2n} . Значение функции φ_{2n} на S_2 обозначим через $\psi_{2n}(x, y)$. Функции ψ_{2n} образуют на S_2 полную ортогональную систему [4, 7], причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial z} = \lambda_{2n} \psi_{2n} \quad \text{на } S_2, \\ \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma_2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции $\Phi_2(x, y, z, t)$ и $\zeta_2(x, y, t)$ представим в виде (11)

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \sum_n p_{2n}(t) \varphi_{2n}(x, y, z), \\ \zeta_2 &= \sum_n \zeta_{2n}(t) \psi_{2n}(x, y). \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом соотношений (17) — (18) система интегро-дифференциальных уравнений (9) — (10) запишется в виде счетной

системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & J\ddot{\theta} + k^2\theta = \\ & = -\sum_{i=1}^m \left[\rho_1 \gamma_{11n} \ddot{\zeta}_{1n} + (\rho_2 \gamma_{22n} - \rho_1 \gamma_{12n}) \ddot{\zeta}_{2n} + g(\rho_1 D_n \zeta_{1n} + \Delta \rho D_{2n} \zeta_{2n}) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\ddot{\zeta}_{1n} + \omega_{1n}^2 \zeta_{1n} - \frac{1}{\cosh \kappa_{1n}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{kn} \ddot{\zeta}_{2k} = -\frac{\omega_{1n}^2}{g} \beta_n (\Omega_{1n} \ddot{\theta} + g\theta), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\ddot{\zeta}_{2n}}{\lambda_{2n}} + \Delta \rho \zeta_{2n} - \frac{\rho_1}{N_{2n}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k^2 \mu_{kn}}{k_n} \left(\frac{\ddot{\zeta}_{1n}}{\sinh \kappa_{1k}} - \coth \kappa_{1n} \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{lk} \ddot{\zeta}_{2l} \right) = \\ = -\frac{1}{N_{2n}^2} \left[(\rho_2 \gamma_{22n} - \rho_1 \gamma_{12n} + \Delta \rho l_0 D_{2n}) \ddot{\theta} + \Delta \rho \theta D_{2n} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\gamma_{11n} = \int_S \Psi_1(x, y, 0) \psi_n(x, y) ds, \quad \gamma_{12n} = \int_S \Psi_1(x, y, -h_1) \psi_{2n}(x, y) ds,$$

$$\gamma_{22n} = \int_S \Psi_2(x, y, -h_1) \psi_{2n}(x, y) ds, \quad D_n = \int_S y \psi_n ds, \quad D_{2n} = \int_S y \psi_{2n} ds,$$

$$\mu_{kn} = \frac{1}{N_n^2} \int_S \psi_{2k} \psi_n ds, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 ds, \quad N_{2n}^2 = \int_S \psi_{2n}^2 ds, \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1.$$

Если полость τ_2 также будет цилиндрической высотой h_2 , тогда

$$\lambda_{2n} = k_n \tanh \kappa_{2n}, \quad \psi_{2n} = \psi_n, \quad \mu_{kn} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

и система уравнений (19)–(21) примет вид

$$J\ddot{\theta} + k^2\theta = -\sum_n D_n \left[\rho_1 (\Omega_{1n} \ddot{\zeta}_{1n} + g\zeta_{1n}) + \Delta \rho (\Omega_{2n} \ddot{\zeta}_{2n} + g\zeta_{2n}) \right], \quad (22)$$

$$\ddot{\zeta}_{1n} + \omega_{1n}^2 \zeta_{1n} - \frac{\ddot{\zeta}_{2n}}{\cosh \kappa_{1n}} = -\frac{\omega_{1n}^2}{g} \beta_n (\Omega_{1n} \ddot{\theta} + g\theta), \quad (23)$$

$$\ddot{\zeta}_{2n} + \omega_{2n}^2 \zeta_{2n} - \frac{\rho_1}{a_n \sinh \kappa_{1n}} \ddot{\zeta}_{1n} = -\frac{\omega_{2n}^2}{g} \beta_n (\Omega_{2n} \ddot{\theta} + g\theta), \quad (24)$$

где $\omega_{2n}^2 = gk_n \Delta \rho / a_n$, $\Delta \rho = \Delta \rho_2 = \rho_2 - \rho_1$, $\Omega_{1n} = f_{1n} + l_0$,
 $a_n = a_{2n} = \rho_2 k_n / \lambda_{2n} + \rho_1 \coth \kappa_{1n}$, $\Omega_{2n} = (\rho_1 f_{1n} + \rho_2 f_{2n}) / \Delta \rho + l_0 + h_1$.
 Уравнения (15)–(16) при $m = 2$ совпадают с уравнениями (22)–(24).

3. Устойчивость положения равновесия физического маятника с многослойной жидкостью

Рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия физического маятника с многослойной идеальной жидкостью. Для устойчивости положения равновесия необходимо и достаточно, чтобы в этом положении потенциальная энергия имела изолированный минимум, т.е. была положительно определенной [4].

По аналогии с работами [1, 4, 7] в выражении потенциальной энергии (5) сделаем замену переменных $\zeta_i = v_i - y\theta$ и запишем выражение потенциальной энергии в новых переменных

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}g \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i \int_{S_i} v_i^2 ds. \quad (25)$$

Здесь

$$\tilde{k} = k^2 - g \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i J_{S_i}, \quad J_{S_i} = \int_{S_i} y^2 ds.$$

Функционал (25) будет положительно определенным при

$$k^2 > g \sum_{i=1}^m \Delta\rho_i J_{S_i} \quad \text{и} \quad \Delta\rho_i > 0 \quad \forall i. \quad (26)$$

В этом случае положение равновесия $\theta \equiv 0$ устойчиво. Во всех остальных случаях положение равновесия физического маятника с многослойной жидкостью будет неустойчивым положением равновесия. Условия (26) показывают, что устойчивость (при прочих заданных параметрах) определяется величиной зеркала свободной и внутренних поверхностей и естественным условием, чтобы более тяжелая жидкость находилась ниже менее тяжелой.

В случае полного заполнения (свободная поверхность отсутствует $S_1 = \emptyset$ и $J_{S_1} = 0$) в первой формуле (26) суммирование следует начинать с $i = 2$.

Интересно отметить, что в случае цилиндрической полости произвольного поперечного сечения ($S_1 = S_2 = \dots = S_m = S$) первое условие (26) примет вид

$$k^2 > g\rho_m J_S, \quad (27)$$

а в случае полного заполнения —

$$k^2 > g(\rho_m - \rho_1) J_S. \quad (28)$$

Таким образом, в случае частичного заполнения цилиндрической полости многослойной идеальной жидкостью устойчивость определяется (при прочих заданных характеристиках) моментом инерции поперечного сечения относительно оси Ox , т.е. величиной зеркала свободной поверхности и только величиной плотности нижней жидкости, а в случае полного заполнения — величиной поперечного сечения и только разностью плотностей верхней и нижней жидкостей.

Для однородной жидкости ($m = 1$ или $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = \rho$) первое условие (26) совпадает с известным условием устойчивости [4], которое хорошо известно специалистам по теории корабля, перевозящего жидкие грузы.

Таким образом, обобщено известное условие устойчивости положения равновесия физического маятника с однородной идеальной жидкостью на случай многослойной идеальной жидкости. В качестве примера рассмотрим соотношение (27) для полости в виде прямоугольного параллелепипеда шириной $2b$, заполненного двухслойной жидкостью. Обозначим через a расстояние от оси вращения до дна полости ($a = l_0 + h_1 + h_2$).

Для оценки влияния двухслойной стратификации на устойчивость положения равновесия величину $m_0 \tilde{l}_0$ будем полагать равной нулю. Это означает, что либо масса сосуда равна нулю, либо центр тяжести сосуда находится на оси вращения.

В случае однородной жидкости ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $h_1 + h_2 = h$) условие (27) имеет вид [16]

$$h^2 - 2ah + \tilde{b}^2 < 0, \quad (29)$$

где $\tilde{b}^2 = \frac{2}{3}b^2$.

Следовательно, если $a < \tilde{b}$, то положение равновесия неустойчиво, а если $a > \tilde{b}$, то при $h_1^* < h < h_2^*$ положение устойчиво.

Здесь

$$h_1^* = a - \tilde{a}, \quad h_2^* = a + \tilde{a}, \quad \tilde{a} = \sqrt{a^2 - \tilde{b}^2}.$$

Таким образом, существует такое количество жидкости в сосуде, что при $0 < h_1^* < h < h_2^*$ положение равновесия физического маятника $\theta \equiv 0$ будет положением устойчивого равновесия. Если же жидкости в сосуде мало ($0 < h < h_1^*$), то положение равновесия физического маятника неустойчиво.

Обобщим эти соотношения для однородной жидкости [5, 16] на случай двух несмешивающихся жидкостей. Условие устойчивости (27) для рассматриваемого случая запишется следующим образом

$$h^2 - (2a + \varepsilon_1 h_1) h + (1 + \varepsilon_2) \tilde{b}^2 < 0, \quad (30)$$

где $\rho_1 = \rho(1 - \varepsilon_1)$, $\rho_2 = \rho(1 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_i \geq 0$, ($i = 1, 2$), $h = h_1 + h_2$;

$\tilde{h}_i = a + \frac{1}{2}\varepsilon_1 h_1 \pm \sqrt{(a + \frac{1}{2}\varepsilon_1 h_1)^2 - (1 + \varepsilon_2) \tilde{b}^2}$ (при $i = 1$ берется нижний знак).

Из неравенства (30) следует, что если

$$a < \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \tilde{b}^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 h_1,$$

то положение равновесия неустойчиво, а если

$$a > \sqrt{(1 + \varepsilon_2) \tilde{b}^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 h_1,$$

то при $\tilde{h}_1 < h < \tilde{h}_2$ положение равновесия будет устойчиво.

Если произошла малая стратификация ($\varepsilon_i \ll 1$, $i = 1, 2$), то условия устойчивости с точностью до ε_i принимают вид

$$a > \tilde{b} + \frac{1}{2}(\varepsilon_2 \tilde{b} - \varepsilon_1 h_1), \quad \tilde{h}_i = a \pm \tilde{a} + \frac{1}{2} \left[\left(1 \pm \frac{a}{\tilde{a}}\right) \varepsilon_1 h_1 \mp \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}} \varepsilon_2 \right].$$

Таким образом, в результате даже малой стратификации длина интервала устойчивости для однородной жидкости $h_2^* - h_1^*$ уменьшилась на величину $\varepsilon_2 \tilde{b}^2 / (2\tilde{a})$.

Пусть масса жидкости до стратификации и после остается постоянной ($\varepsilon_1 h_1 = \varepsilon_2 h_2$). Предположим также, что до стратификации положение равновесия было устойчивым, т. е. выполнены условия устойчивости (29), тогда достаточные условия выполнения условия (30) имеют вид

$$\tilde{b} < h < a + \tilde{a}.$$

При этих значениях параметров стратификация не нарушает устойчивости положения равновесия. Следует отметить, что при $\varepsilon_1 \ll 1$ и $h_1 \ll h_2$ будем иметь $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 h_1 / h_2 \approx \varepsilon_1^2$, т. е. в первом приближении влиянием малой стратификации с малой толщиной слоя стратификации на устойчивость положения равновесия физического маятника можно пренебречь.

4. Собственные частоты колебаний физического маятника с многослойной жидкостью

Представив функции θ и ζ_{in} в виде $\zeta_{in}(t) = \zeta_{in0}e^{i\sigma t}$, $\theta(t) = \theta_0e^{i\sigma t}$, запишем характеристическое уравнение для системы уравнений (19)–(21)

$$k^2 - \sigma^2 J = \frac{1}{g} \sum_n \frac{N_n^2 \beta_n^2}{\Delta_n} \left[\rho_1 \omega_{1n}^2 (\omega_{2n}^2 - \sigma^2) (\Omega_{1n} \sigma^2 - g)^2 + \right. \\ \left. + \Delta \rho \omega_{2n}^2 (\omega_{1n}^2 - \sigma^2) (\Omega_{2n} \sigma^2 - g)^2 - \frac{2\rho_1 \omega_{2n}^2}{\cosh \kappa_{1n}} (\Omega_{1n} \sigma^2 - g) (\Omega_{2n} \sigma^2 - g) \right]. \quad (31)$$

Здесь $\Delta_n = (\omega_{1n}^2 - \sigma^2) (\omega_{2n}^2 - \sigma^2) - \sigma^4 \frac{2\rho_1}{a_n \sinh 2\kappa_{1n}}$.

Следует заметить, что корни уравнения $\Delta_n = 0$ совпадают с собственными частотами колебаний двухслойной жидкости в неподвижном сосуде.

В случае полного заполнения ($\zeta_{1n} \equiv 0$) уравнение (31) запишется следующим образом

$$k^2 - \sigma^2 J = \frac{\Delta \rho}{g} \sum_n \frac{D_n^2 (\Omega_{2n} \sigma^2 - g)^2}{N_n^2 (\omega_{2n}^2 - \sigma^2)}. \quad (32)$$

При $\rho_1 = 0$ (однородная жидкость) уравнения (31)–(32) совпадают с уравнениями работ [1, 4].

Характеристическое уравнение (32) по форме совпадает с уравнением, полученным в [4] для однородной жидкости со свободной поверхностью. В этой работе дано графическое решение этого уравнения. По аналогии с [4] графическое решение (32) приведено на рис. 2. Искомые корни — это точки пересечения прямой $F_1(\sigma^2) = k^2 - J\sigma^2$ с кривой $F_2(\sigma^2)$

$$F_2(\sigma^2) = \frac{\Delta \rho}{g} \sum_n \frac{D_n^2 (\Omega_{2n} \sigma^2 - g)^2}{N_n^2 (\omega_{2n}^2 - \sigma^2)}.$$

Как видно из чертежа рис. 2, если в однородной жидкости при ее полном заполнении полости произошла двухслойная стратификация,

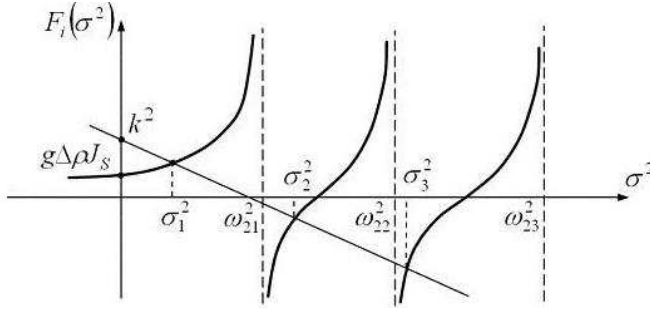


Рис. 2. Собственные частоты колебаний физического маятника с двухслойной жидкостью.

то это приводит к уменьшению запаса устойчивости, так как корни сдвигаются влево (при $\Delta\rho = 0$ имеем $\sigma^2 = k^2/J$).

Из рис. 2 следует, что кривые $F_1(\sigma^2)$ и $F_2(\sigma^2)$ не будут пересекаться в левой полуплоскости, когда

$$k^2 > F_2(0) = g\Delta\rho \sum_n \frac{D_n^2}{N_n^2} = g\Delta\rho J_S. \quad (33)$$

Уравнение (31) можно также исследовать графически, где в качестве $F_2(\sigma^2)$ полагается функция

$$F_2(\sigma^2) = \frac{1}{g} \sum_n \frac{D_n^2}{N_n^2 \Delta_n} \left[\rho_1 \omega_{1n}^2 (\omega_{2n}^2 - \sigma^2) (\Omega_{1n} \sigma^2 - g)^2 + \right. \\ \left. + \Delta\rho \omega_{2n}^2 (\omega_{1n}^2 - \sigma^2) (\Omega_{2n} \sigma^2 - g)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2\rho_1 \omega_{2n}^2}{\cosh \kappa_{1n}} (\Omega_{1n} \sigma^2 - g) (\Omega_{2n} \sigma^2 - g) \right]. \quad (34)$$

Функция (34) имеет счетное множество простых полюсов, являющихся корнями уравнения $\Delta_n = 0$. Как и ранее, из графического решения будет следовать, что кривые $F_1(\sigma^2)$ и $F_2(\sigma^2)$ не будут пересекаться в левой полуплоскости при

$$k^2 > F_2(0) = g\rho_2 \sum_n \frac{D_n^2}{N_n^2} = g\rho_2 J_S. \quad (35)$$

Следует отметить, что аналогичные исследования можно провести и для общего характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений (15)–(16) и показать, что кривые $F_1(\sigma^2)$ и $F_2(\sigma^2)$ не будут пересекаться в левой полуплоскости при

$$k^2 > F_2(0) = g \sum_{i=1}^m \Delta \rho_i \sum_n D_n \beta_n = g \rho_m J_S.$$

Из графического решения характеристических уравнений (31)–(32) и характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений (15)–(16) следует, что высокие частоты σ_n^2 мало отличаются от собственных частот колебаний многослойной идеальной жидкости в неподвижном сосуде ($\Delta_n = 0$).

Таким образом, необходимые условия устойчивости (33) и (35), полученные на основании исследований корней характеристических уравнений (31) и (32), совпали с достаточными условиями устойчивости (27) и (28), полученными из положительной определенности потенциальной энергии.

5. Выводы

1. В линейной постановке исследованы плоские колебания физического маятника, содержащего тяжелую m -слойную идеальную жидкость.

2. На основании характеристического уравнения получены необходимые условия устойчивости, которые совпали с достаточными, полученными из положительной определенности потенциальной энергии.

3. Условия устойчивости включают в себя условие естественной стратификации жидкости, т. е. когда более тяжелая жидкость находится ниже менее тяжелой. К этим условиям добавляется условие, определяющее в основном разностью плотностей многослойной жидкости и величиной зеркала свободной и внутренних поверхностей. Интересно отметить, что в случае полного заполнения цилиндрической полости необходимо учитывать только разность плотностей последней и первой жидкостей, а в случае частичного заполнения учитывается только плотность последней m -ой жидкости.

4. На примере полости в виде прямоугольного параллелепипеда оценено влияние стратификации на устойчивость положения равновесия физического маятника. Показано, что стратификация приводит к уменьшению запаса устойчивости.

5. Проведено графическое исследование структуры спектра, из которого следует, что высокие частоты колебаний физического маятника мало отличаются от собственных частот колебаний многослойной жидкости в неподвижном сосуде.

- [1] *Моисеев Н. Н.* О двух маятниках, наполненных жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1952. — **16**, 6. — С. 671–678.
- [2] *Моисеев Н. Н.* Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность // Матем. сборник.— 1953. — **32**, 1. — С. 61–96.
- [3] *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // Прикл. математика и механика. — 1957. — **21**, 2. — С. 169–174.
- [4] *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 439 с.
- [5] *Самсонов В. А.* Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью // Науч. тр. ин-та механики Моск. ун-та. — 1971. — № 16. — С. 3–54.
- [6] *Кононов Ю. Н.* О колебании физического маятника, содержащего идеальную жидкость переменной массы // Матем. физ. и нелинейная механика. — 1985. — Вып. 3. — С. 17–20.
- [7] *Кононов Ю. Н.* Задача о физическом маятнике, содержащем стратифицированную жидкость // Механика твердого тела. — 1999. — Вып. 28. — С. 145–153.
- [8] *Кононов Ю. Н.* Задача о физическом маятнике, содержащем двухслойную жидкость, разделенную упругой мембраной // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 105–110.
- [9] *Кононов Ю. Н.* Об устойчивости равновесия физического маятника, содержащего многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками // Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 203–207.
- [10] *Цебрій О. Р.* Малі коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною. Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. 01.02.01 // ІМ НАНУ — Київ, 2011. — 14 с.
- [11] *Краснощеков П. С.* О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1963. — **27**, 2. — С. 193–202.

- [12] *Барняк М. Я., Цебрый Р. И.* Приближенный метод исследования собственных колебаний маятника с цилиндрической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Приближенные методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем — К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. — С. 71–84.
- [13] *Цебрый Р. И.* Исследование свободных колебаний физического маятника с цилиндрической полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем: Сб. науч. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 48–55.
- [14] *Вадиаа Али.* Применение методов спектрального анализа оператор-функций в задаче о колебаниях маятника с полостью, заполненной жидкостью. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.01 // ИПММ НАНУ. — Донецк, 1994. — 16 с.
- [15] *Дудик О. А.* Малые движения маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.02 // ИПММ НАНУ. — Донецк, 2010. — 15 с.
- [16] *Самсонов В. А.* Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980. — 64 с.