

Метод побудови оптимальних траєкторій перельотів у сильному центральному гравітаційному полі

Б. М. Кіфоренко, Я. В. Ткаченко

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;
bkifor@ukr.net, yaroslavvt@ukr.net*

A novel method for constructing optimal flight trajectories of an electric propulsion spacecraft between far elliptical orbits in a central gravitational field is developed. An optimisation of the flight from the low Earth orbit to an almost geostationary orbit is done. For this maneuver, the payload mass increase affected by an energy storage in the engine system is estimated.

Разработан новый метод построения оптимальных траекторий перелетов космического аппарата с электрореактивной двигательной системой между удаленными эллиптическими орбитами в центральном гравитационном поле. Проведена оптимизация перелета с низкой монтажной орбиты на близкую к геостационарной орбиту. Для этого маневра проведена оценка увеличения массы полезной нагрузки аппарата с помощью включения накопителя энергии в состав двигательной системы.

1. Вступ

Електричні ракетні двигуни (ЕРД) відносяться до класу рушійних систем малої тяги і мають ряд переваг перед традиційними рідинними та твердопаливними ракетними двигунами: малу витрату робочої речовини на одиницю тяги, кращу керованість та здатність неперервно функціонувати протягом тривалого часу. Використання ЕРД як маршових при міжорбітальних перельотах дає змогу суттєво збільшити масу корисного навантаження космічного апарату (КА) при фіксованій початковій масі порівняно з традиційними ракетними двигунами [1, 2]. Сконцентрований аналіз переваг використання ЕРД наведений в роботі [3]. Однак рівень прискорення, яке ці двигуни можуть

надати КА, на декілька порядків нижчий від рівня гравітаційного прискорення на низьких навколосемних орбітах. Тому перельоти між геоцентричними орбітами можуть тривати протягом багатьох обертів. Це значно ускладнює розв'язування задач оптимізації такого типу маневрів.

Для знаходження оптимальних керувань та траєкторій у цих задачах найчастіше використовують два підходи. При першому, так званому прямому підході, дискретизуючи деяку початкову траєкторію, вихідну задачу оптимального керування зводять до задачі нелінійного або лінійного програмування з занадто великою кількістю (до сотень тисяч) невідомих [4]. Другий підхід базується на використанні принципу максимуму Понтрягіна, що дозволяє звести початкову задачу до нелінійної двоточкової крайової задачі звичайних диференціальних рівнянь, отримати чисельний розв'язок якої не завжди можливо. В роботах [5–7] наведено способи підвищення стійкості чисельного розв'язку вказаної крайової задачі. Однак, як перший, так і другий підходи для успішного отримання результату вимагають задання доволі точних початкових наближень.

В даній роботі представлено новий підхід, який базується на ідеях вказаних вище обидвох підходів. Шукана оптимальна траєкторія розбивається на N обертів. Для довільного оберту малість реактивного прискорення дозволяє лінеаризувати рівняння руху в околі орбіти з оскулюючими параметрами, що дорівнюють значенням на початку оберту. До лінійної задачі застосовується принцип максимуму, що дозволяє аналітично знайти вираз приросту значення критерія якості у вигляді функції від приростів оскулюючих параметрів орбіти. Приймаючи до уваги принцип оптимальності Белмана, оптимальне значення критерію якості висхідної задачі є сумою значень приростів критерію для всіх обертів і відповідно є функцією $5N$ змінних (що на порядки менше, ніж при використанні першого підходу). Отже, отримали задачу знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних зі зрозумілими обмеженнями. А саме: сума приростів орбітальних параметрів на кожному оберті повинна дорівнювати відомому сумарному приросту для заданого маневру. Також слід обмежити значення невідомих приростів на кожному оберті, для справедливості лінеаризації. На сьогоднішній день розроблені ефективні методи умовної оптимізації як унімодальних, так і неунімодальних функцій [8], а наведений нижче спосіб вибору початкових наближень забезпечує стійкість чисельних методів оптимізації.

2. Постановка задачі

У даній роботі вивчається керування рухом центру мас КА, рух апарату навколо центру мас не розглядається. Тому рух космічного апарату моделюємо рухом матеріальної точки змінної маси. Вважаємо, що початкова маса КА складається з маси корисного навантаження (до якої також віднесено масу баків робочої речовини та інших конструктивних елементів КА), маси електрореактивної рушійної системи та маси робочої речовини, необхідної для виконання заданого перельоту. Класична схема космічної рушійної установки з ЕРД включає два основних елементи: джерело потужності, що виробляє електроенергію для забезпечення роботи рушій, і власне рушій, що генерує реактивну тягу шляхом прискорення робочої речовини за рахунок підведеної енергії. Позначимо масу рушій через M_γ , масу джерела потужності — M_ν . Маси елементів рушійної системи залежать від їх енергетичних характеристик [9, 10]:

$$M_\nu = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_0, \quad (1)$$

тут N_0 — максимальне значення потужності бортового джерела енергії, α та γ питомі маси джерела потужності та рушій. Позначимо M_0 початкову масу КА, M_π — масу корисного навантаження, M_f масу робочої речовини, необхідну для виконання заданого маневру. Тоді

$$M_0 = M_\pi + M_\gamma + M_\nu + M_f. \quad (2)$$

Рушійну систему КА вважаємо ідеально керованою, для неї витрату робочої речовини q можна представити у вигляді [11]

$$q = \frac{M^2 W^2}{2N_\Gamma}, \quad (3)$$

де M — поточна маса КА, W — модуль прискорення КА від дії тяги, N_Γ — поточне значення потужності рушій. Джерело потужності вважаємо автономним, тобто його робота не залежить від зовнішніх факторів.

Як видно з формули (4), витрата робочої речовини обернено пропорційна поточній потужності джерела, отже, для зменшення необхідного запасу робочої речовини, що в свою чергу збільшить долю маси корисного навантаження в початковій масі апарату (див. (3)),

поточну потужність рушія потрібно підтримувати на її максимальній величині N_0 . Тоді рівняння зміни маси КА з ідеально керованою рушійною системою приймає вигляд

$$\dot{M} = -\frac{M^2 W^2}{2N_0}.$$

Всі подальші співвідношення записано в безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до характерної величини r^* , час t віднесено до T^* — періоду обертання КЛА по круговій орбіті радіусом r^* розділеного на 2π , прискорення — до прискорення вільного падіння на відстані r^* від гравітаційного центра W^* , потужність рушія та джерела — до N_0 , а введені нижче функціонали J та J_e — до величини $r^{*2}T^{*-3}$.

Згідно з роботою [11], розв'язок задачі про знаходження траєкторії та керування рухом, що забезпечує максимум маси корисного навантаження, при фіксованій початковій масі КА та заданих значеннях α та γ зводиться до мінімізації функціонала

$$J = (1 + \varepsilon) \int_0^T (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2) dt, \quad (4)$$

де $\varepsilon = \gamma/\alpha$, $W_i, i = \overline{1,3}$ — складові вектора реактивного прискорення, T — час виконання маневру.

Рух КА моделюємо рухом матеріальної точки в центральному гравітаційному полі під дією реактивного прискорення. Використаємо рівняння руху в оскулюючих змінних з наступним набором орбітальних параметрів: e — ексцентриситет, $\vartheta = \log \sqrt{a(1-e^2)}$ (тут a — велика піввісь), ω — кутова відстань перицентра, I — кут нахилу площини орбіти, Ω — довгота висхідного вузла, E — ексцентрична аномалія. Тоді безрозмірні рівняння руху згідно з [12] матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} W_k, \quad j = \overline{1,5}, k = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$, а F_{ij} розраховуються за формулами

$$\begin{aligned}
F_{11} &= 0; F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; F_{13} = 0; \\
F_{21} &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}; F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; F_{23} = 0; \\
F_{31} &= -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)} \sin E; \\
F_{33} &= -\cot I \left(\frac{\sin \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E \right); \\
F_{41} &= F_{42} = 0; F_{43} = \frac{\cos \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E; \\
F_{51} &= F_{52} = 0; F_{53} = F_{33} / \cos I; \\
F_{60} &= \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{\exp(3\vartheta)(1 - e \cos E)}; F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}; \\
F_{62} &= \frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)}; F_{63} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тепер, приймаючи до уваги (5)–(7), запишемо математичну постановку задачі про оптимальний (критерій оптимальності — максимум маси корисного навантаження) переліт КА з заданої початкової орбіти в задану кінцеву за час T

$$\begin{aligned}
J &= (1 + \varepsilon) \int_0^T (W_1^2 + W_2^2 + W_3^2) dt \rightarrow \min, \\
\frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W_k, x_j(0) = x_j^i, x_j(T) = x_j^f, \\
\frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} W_k, E(0) = E^i.
\end{aligned} \tag{7}$$

Положення на кінцевій орбіті не фіксується, а при необхідності прибуття в задану точку кінцевої орбіти додається умова $E(T) = E^f$. Застосування до задачі (8) принципу максимуму Понтрягіна дозволяє звести її до двоточкової нелінійної крайової задачі. Через те, що принцип максимуму являє собою лише необхідні умови оптимальності, отримана крайова задача може мати декілька гілок розв'язку,

серед яких тільки один істинний. Цей факт значно ускладнює чисельний розв'язок. В роботах [5, 6, 12] приведено методи, які дозволяють дещо покращити ситуацію, але й вони мають суттєві недоліки. Так, метод запропонований в [6] та [7] при великій кількості обертів втрачає стійкість, і автор цих робіт зазначає, що йому вдалося отримати розв'язок лише для 50 обертів [7]. Для стійкості чисельного розв'язку методів з робіт [5, 12] необхідне задання доволі точних початкових наближень [13].

В даній роботі запропоновано стійкий чисельно-аналітичний метод зі зрозумілим вибором початкових наближень.

Автор робіт [6], [7] для відсікання паразитних розв'язків фіксує куту дальність перельоту. Використаємо цю ідею і вважатимемо, що переліт відбувається протягом N обертів навколо гравітаційного центру.

Розглянемо рух КА на n -му оберті. Позначимо значення фазового вектора на початку цього оберту $\vec{x}_{n-1} = [\vartheta_{n-1}, e_{n-1}, \omega_{n-1}, I_{n-1}, \Omega_{n-1}]^T$, $n = \overline{1, N}$. Нехай протягом оберту фазовий вектор отримує приріст $\vec{\Delta}_n = [\Delta_n^\vartheta, \Delta_n^e, \Delta_n^\omega, \Delta_n^I, \Delta_n^\Omega]^T$. Введемо новий вектор $\vec{x}_n = \vec{x} - \vec{x}_{n-1}$.

Приймаючи до уваги малість реактивного прискорення і відповідно малість зміни кожного оскулюючого параметру орбіти протягом оберту (\vec{x}_n та Δ_n – малі величини), лінеаризуємо рівняння руху в околі орбіти зі значеннями оскулюючих змінних на початку кожного оберту $\vartheta_{n-1}, e_{n-1}, \omega_{n-1}, I_{n-1}, \Omega_{n-1}$ та перейдемо від незалежної змінної t до незалежної змінної E . Згідно з принципом оптимальності Белмана, будь-яка частина оптимальної траєкторії має бути також оптимальною. Тому для кожного оберту матимемо наступну лінійну задачу оптимального керування

$$J = (1 + \varepsilon) \int_{E_{n-1}}^{E_n} \widehat{F}_E(E, \vec{x}_{n-1}) (W_{n1}^2 + W_{n2}^2 + W_{n3}^2) dE \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{x}_{nj}}{dE} = F_E(E, \vec{x}_{n-1}) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \vec{x}_{n-1}) W_{nk},$$

$$\vec{x}_n(E_{n-1}) = 0, \quad \vec{x}_n(E_n) = \vec{\Delta}_n.$$

Задача (9) є лінійною задачею оптимального керування з квадратичним критерієм якості, розв'язок якої отримано за допомогою прин-

ципу максимуму Понтрягіна [9]

$$\begin{aligned} W_{n1} &= \exp(\vartheta_{n-1})(\lambda_{n2}F_{21} + \lambda_{n3}F_{31})/(2(1 + \varepsilon)), \\ W_{n2} &= \exp(\vartheta_{n-1})(\lambda_{n1}F_{12} + \lambda_{n2}F_{22} + \lambda_{n3}F_{32})/(2(1 + \varepsilon)) \\ W_{n3} &= \exp(\vartheta_{n-1})(\lambda_{n3}F_{33} + \lambda_{n4}F_{43} + \lambda_{n5}F_{53})/(2(1 + \varepsilon)), \\ J_n &= (\vec{\lambda}_n \vec{\Delta}_n)/2, \end{aligned} \quad (9)$$

де вектор невідомих констант $\vec{\lambda}_n = [\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}, \lambda_{n5}]$ визначається з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\lambda}_n = \left(\int_{E_{n-1}}^{E_n} \mathbf{A}(E, \vec{x}_{n-1}) dE \right)^{-1} \vec{\Delta}_n, \quad (10)$$

а матриця $\mathbf{A}(E, \vec{x}_{n-1})$ визначається зі співвідношень

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(E, \vec{x}_{n-1}) &= \exp(\vartheta_{n-1}) F_E(E, \vec{x}_{n-1}) \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{A}}^T / (1 + \varepsilon), \\ \widehat{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \vec{x}_{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \vec{x}_{n-1}) & F_{22}(E, \vec{x}_{n-1}) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \vec{x}_{n-1}) & F_{32}(E, \vec{x}_{n-1}) & F_{34}(E, \vec{x}_{n-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \vec{x}_{n-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \vec{x}_{n-1}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отже, формули (10)–(12) дозволяють отримати функціонал J_n як функцію п'яти невідомих $\Delta_n^\vartheta, \Delta_n^e, \Delta_n^\omega, \Delta_n^I, \Delta_n^\Omega$. Зрозуміло, що функціонал висхідної задачі (8)

$$J = \sum_{n=1}^N J_n(\Delta_n^\vartheta, \Delta_n^e, \Delta_n^\omega, \Delta_n^I, \Delta_n^\Omega), \quad (12)$$

є функцією $5N$ змінних, яку досліджуємо на мінімум чисельними методами, з врахуванням обмежень

$$\sum_{n=1}^N \vec{\Delta}_n = \vec{x}^f - \vec{x}^i, \quad |\vec{\Delta}_n^m| \leq \Delta_{max}, n = \overline{1, N}, m = \vartheta, e, \omega, I, \Omega. \quad (13)$$

Перша умова в (14) забезпечує виконання кінцевих умов в (8), або, що те саме, забезпечує вихід на задану кінцеву орбіту, а друга умова забезпечує справедливність лінеаризації. Вектор початкових наближень

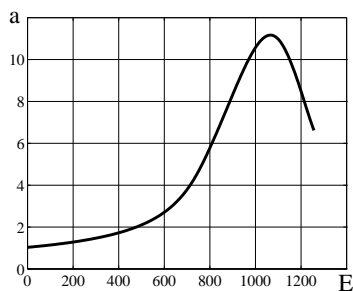
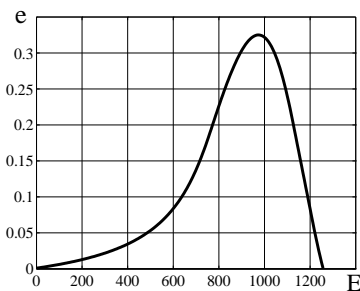
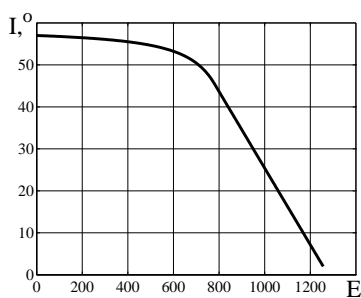
для чисельного розв'язку (13) – (14) цілком логічно вибирати наступним чином

$$\vec{\Delta}_n^0 = (\vec{x}^f - \vec{x}^i) / N, n = \overline{1, N}. \quad (14)$$

3. Переліт з низької монтажної орбіти на близьку до геостаціонарної орбіти

Застосуємо розроблену вище методику для побудови траєкторії перельоту з низької монтажної орбіти на геостаціонарну орбіту. Для початкової орбіти покладемо $a^i = 6578.16$ км, $e^i = 0.001$, $I^i = 57^\circ$, $\omega^i = \Omega^i = 0$. Кінцева орбіта має параметри $a^f = 42164.16$ км, $e^f = 0.001$, $I^f = 2^\circ$, $\omega^f = \Omega^f = 0$.

За характерний лінійний розмір приймемо екваторіальний радіус Землі $r^* = 6378.16$ км, тоді характерний час $T^* = \sqrt{r^{*3}/K} = 806.7252$ сек (K – гравітаційна стала Землі). Питома маса джерела потужності прийнята $\alpha = 20$ кг/КВт, що відповідає існуючим ядерним реакторам, а питома маса рушія – $\alpha = 1.5$ кг/КВт, що відповідає електрореактивному двигуну VASIMR. На рис.1–3 приведено графіки оптимальних залежностей $a(E)$, $e(E)$ та $I(E)$ для перельоту за 200 обертів навколо гравітаційного центру. При оптимізації цього перельоту можемо покласти $\Delta_n^\omega = \Delta_n^\Omega = 0$, $n = \overline{1, 200}$. Отже, мінімізацію функціонала (13) проведено в просторі 600 невідомих. Для запобігання проблем, пов'язаних з можливою неунімодалльністю цільової функції, використано метод Ψ перетворення [8]. Початкові значення невідомих вибрані згідно з (15). Прирости оскулюючих параметрів на кожному оберті обмежені величиною $\Delta_{max} = 0.01$.

Рис. 1. Залежність $a(E)$.Рис. 2. Залежність $e(E)$.Рис. 3. Залежність $I(E)$.

4. Застосування акумулятора енергії в рушійній системі КА

У випадку включення акумулятора енергії до складу рушійної системи КА до початкової маси (3) додається маса акумулятора енергії

$$M_0 = M_\pi + M_\gamma + M_\nu + M_f + M_e. \quad (15)$$

При цьому рушій матиме максимальну потужність більшу за максимальну потужність джерела, оскільки його живлення відбувається як від джерела, так і за рахунок акумулятора, масу якого вважаємо пропорційною енергоємності e_{a0} . Тоді для мас елементів рушійної

системи матимемо

$$M_\nu = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma N_\gamma N_0, \quad M_a = \beta e_{a0}. \quad (16)$$

До наведеного вище переліку характерних величин додамо енергоємність акумулятора e_{a0} .

Згідно з роботами [9, 11] у випадку застосування акумулятора енергії у складі рушійної системи сталої потужності безрозмірне рівняння зміни запасу енергії в акумуляторі має вигляд

$$\frac{de_a}{dt} = -\frac{\eta}{\xi_B}(N_\gamma \delta - 1), \quad e_a \in [0; 1], \quad (17)$$

а знаходження траєкторії, керування рухом та значень параметрів N_γ та ξ_B зводиться до мінімізації функціоналу

$$J_e = (\varepsilon + (1 + \xi_B)/N_\gamma) \int_0^T (W_{1e}^2 + W_{2e}^2 + W_{3e}^2) \delta dt. \quad (18)$$

В (17), (18) введено позначення $\eta = \beta T^*/\alpha$, δ — керуюча функція, яка приймає значення 0 (пасивна дуга траєкторії) або 1 (активна дуга траєкторії). На пасивних дугах траєкторії рушій вимкнено, а енергія джерела спрямована на зарядку акумулятора. На активних частинах акумулятор розряджається і накопичена енергія разом з енергією джерела спрямована в рушій для створення реактивного прискорення. Вважаємо прирости оскулюючих параметрів орбіти на кожному оберті відомими. Тоді можемо записати аналог задачі (9)–(13)

$$\begin{aligned} J_{en} &= b \int_{E_{n-1}}^{E_n} \widehat{F}_E(E, \vec{x}_{n-1}) (W_{en1}^2 + W_{en2}^2 + W_{en3}^2) \delta dE \rightarrow \min, \\ \frac{d\vec{x}_{nj}}{dE} &= F_E(E, \vec{x}_{n-1}) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \vec{x}_{n-1}) W_{enk} \delta, \\ \frac{de_a}{dE} &= -F_E(E, \vec{x}_{n-1}) \frac{\eta}{\xi_B} (N_\gamma \delta - 1), \\ \vec{x}_n(E_{n-1}) &= 0, \quad \vec{x}_n(E_n) = \vec{\Delta}_n, \quad e_a(E_{n-1}) = e_a(E_n) = 0.5, \\ 0 &\leq e_a \leq 1, \quad J_e = \sum_{n=1}^N J_{en}, \end{aligned} \quad (19)$$

де $b = \varepsilon + (1 + \xi_B)/N_\gamma$. В роботах [14, 15] для маневрів суттєвої зміни параметрів a, e, I при $\omega = \Omega = 0$ вказано розподіл активних та пасивних дуг траєкторії, вирази для реактивних прискорень $W_{eni}, i = \bar{1}, \bar{3}$. Отже, задаючи ε, η та $\Delta_n^\vartheta, \Delta_n^e, \Delta_n^I$, отримаємо функціонали J_{en} як функції змінних N_γ та ξ_B . Відповідно і сумарний функціонал J_e стає функцією та N_γ та ξ_B , яку необхідно дослідити на мінімум. Збільшення маси корисного навантаження від використання акумулятора енергії у рушійній системі має місце, коли $J_e/J < 1$ [11]. Чим менше це відношення, тим більша ефективність використання акумулятора енергії. Серед наявних на сьогоднішній день акумуляторів енергії найвищу питому енергоємність мають маховикові акумулятори, де вона досягає величини $\beta^{-1} = 15$ МДж/кг. Однак, і це не межа. Очікується створення маховикових акумуляторів зі здатністю накопичувати 3 ГДж/кг. В таблиці 1 представлені результати розрахунків для розглянутого вище маневру для ряду значень параметру β^{-1} , які відповідають кращим зразкам існуючих та перспективних акумуляторів енергії.

Таблиця 1. Оптимальні масово-енергетичні характеристики КА.

$\beta^{-1}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$	η	N_γ	ξ_B	J_e/J	$M_{\pi e}/M_\pi$
$3 \cdot 10^9$	$1.3449 \cdot 10^{-5}$	1.5238	$5.7602 \cdot 10^{-4}$	0.9643	1.0225
$2 \cdot 10^9$	$2.0173 \cdot 10^{-5}$	1.5186	$8.1676 \cdot 10^{-4}$	0.9645	1.0223
$5 \cdot 10^8$	$8.0691 \cdot 10^{-5}$	1.4988	0.0028	0.9665	1.0211
$1 \cdot 10^8$	$4.0346 \cdot 10^{-4}$	1.4245	0.0097	0.9744	1.0160
$5 \cdot 10^7$	$8.0692 \cdot 10^{-4}$	1.3449	0.0151	0.9819	1.0113
$1.5 \cdot 10^7$	0.0026	1.0390	0.0077	0.9990	1.0005

$M_{\pi e}/M_\pi$ — відношення мас корисного навантаження для КА з рушійною системою з акумулятором енергії та КА з класичною електрореактивною рушійною системою. Маси $M_{\pi e}$ та M_π обчислюються за формулами [9]

$$M_\pi = M_0 \left(\sqrt{\Phi} - 1 \right)^2, \quad \Phi = \frac{\alpha r^{*2}}{2T^{*3}} J,$$

$$M_{\pi e} = M_0 \left(\sqrt{\Phi_e} - 1 \right)^2, \quad \Phi_e = \frac{\alpha r^{*2}}{2T^{*3}} J_e.$$

Як видно з таблиці, найкращі сучасні зразки акумуляторів для ма-

невру переходу з низької монтажної орбіти на геостационарну орбіту не дають змогу збільшити масу корисного навантаження. Навіть для перспективних акумуляторів, при η близьких до нуля, максимально можливе збільшення маси корисного навантаження $\approx 2\%$. Отже, при виконанні оптимальних перельотів з низької монтажної орбіти на орбіти, близькі до геостационарних, космічним апаратом з рушійною системою сталої потужності, включення акумулятора енергії до складу рушійної системи з метою збільшення маси корисного навантаження можна вважати недоцільним. Згідно з результатами роботи [16] підвищення ефективності використання акумулятора енергії досягається при використанні рушіїв обмеженої потужності.

5. Висновки

В роботі представлено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання задач оптимізації руху динамічних систем з малим параметром при функції керування. Результати тестування методу на задачі визначення оптимального керування і оптимальних параметрів двигунів КА, призначених для виконання переходів між віддаленими орбітами в ньютонівському центральному гравітаційному полі підтвердили його ефективність.

- [1] *Porte F., Saint A. P., Buthion C.* Benefits of electric propulsion for orbit injection of communication spacecraft // AIAA Pap. — 1992. — № 3202. — P. 1–9.
- [2] *Choueiri E. Y., Kelly A. J., Jahn R. G.* Mass saving domain of plasma propulsion for LEO to GEO transfer // J. Spacecraft and Rockets. — 1993. — **30**, 6. — P. 749–754.
- [3] *Martinez-Sanchez M., Pollard J. E.* Spacecraft Electric Propulsion — An Overview // J. of propulsion and power. — 1998. — **14**, 5. — P. 688–699.
- [4] *Улыбышев Ю. П.* Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. — 2008. — **46**, 2. — С. 136–147.
- [5] *Кифоренко Б. Н., Ваильев И. Ю.* Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском центральном гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным // Космические исследования. — 2011. — **49**, 5. — С. 436–452.

- [6] *Петухов В. Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. — 2008. — **46**, 3. — С. 224–237.
- [7] *Петухов В. Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. — 2012. — **50**, 3. — С. 258–270.
- [8] *Чичинадзе В. К.* Решение нелинейных невыпуклых задач оптимизации: метод Ψ -преобразования. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
- [9] *Tkachenko Ya. V.* Using energy storage in low thrust constant power thruster for optimal interorbital transfers // Stability and control. Theory and application. International Journal. — 2003. — **5**, 1. — P. 22–40.
- [10] *Ткаченко Я. В.* Оптимизация работы электрических ракетных двигателей с постоянной и регулируемой тягами // Приклад. механика. — 2010. — **46**, 3. — С. 114–123.
- [11] *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. — М.: Наука, 1966. — 679 с.
- [12] *Кифоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю.* Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 6. — С. 62–76.
- [13] *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.
- [14] *Кіфоренко Б. М., Ткаченко Я. В.* Оптимізація міжорбітальних перельотів космічного апарату з електрореактивною двигунною системою з акумулятором енергії // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, 2. — С. 369–376.
- [15] *Кифоренко Б. Н., Ткаченко Я. В.* Оптимизация перелетов космического аппарата между удаленными орбитами // Приклад. механика. — 2010. — **46**, 11. — С. 93–100.
- [16] *Ткаченко Я. В.* Оптимальные переходы космических аппаратов с накопителем энергии и двигателем ограниченной мощности // Приклад. механика. — 2003. — **39**, 1. — С. 134–140.