Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 300–320

УДК 517.5

К. В. Швай

(Інститут математики НАН України, Київ)

Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень узагальнених багатовимірних аналогів ядер Бернуллі та класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q

kate.shvai@gmail.com

We obtain order estimates of the best orthogonal trigonometric approximation of the functions D^{ψ}_{β} in the space L_q, with $1 < q < \infty$. These functions are generalized multidimensional analogs of the Bernoulli kernels. The results obtained are applied to establish a lower estimate of the best orthogonal trigonometric approximation for the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Отримано порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій D^{ψ}_{β}, які є узагальненими багатовимірними аналогами ядер Бернуллі, у просторі L_q, $1 < q < \infty$. При цьому одержані результати використані для встановлення оцінки знизу найкращого ортогонального тригонометричного наближення класів $L^{\psi}_{\beta,1}$.

1. Вступ

Перш ніж перейти до викладу основних результатів, наведемо необхідні позначення і дамо означення апроксимативної характеристики, що буде досліджуватися.

Нехай задано d-вимірний простір $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і d–вимірний куб $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$. Через $L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір 2π–періодичних за кожною змінною функцій f зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \pi_d} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_q(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \ j = \overline{1, d}.$$

Розглянемо ряд Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Нехай тепер $\psi_j(\cdot) \neq 0$ — довільні функції натурального аргументу, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\mathring{\mathbb{Z}}^d = \mathbb{Z}^d \setminus (0, \ldots, 0)$, є рядом Фур'є деякої функції із $L_1(\pi_d)$, то її називають (ψ, β)–похідною функції f і позначають f^{ψ}_{β}. Множина функцій f, що задовольняють таку умову, утворює клас L^{ψ}_{β}.

Якщо ж (ψ, β)–похідна f належить до множини $U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p,\ \|\varphi\|_p \le 1\}$, то записують $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Далі, нехай для фіксованого набору функцій ψ_j та чисел β_j ряд

$$\sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(|k_j|)\, e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\operatorname{sgn} k_j} e^{i(k,x)},$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на π_d функції, яку позначимо через D^{ψ}_{β}. Зазначимо, що D^{ψ}_{β} при $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $j = \overline{1,d}$, є багатовимірним аналогом ядра Бернуллі (див., наприклад, [1, с. 31]).

Кожну із функцій $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \left(\varphi * D^{\psi}_{\beta}\right)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(x-t) D^{\psi}_{\beta}(t)dt, \qquad (1)$$

де $\|\varphi\|_p \le 1$ і функція $\varphi(\cdot)$ майже всюди співпадає із f^{ψ}_{β}.

При проведенні подальших міркувань через D будемо позначати множину функцій $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1,d}$, які задовольняють умови

1. $\psi_j(\cdot)$, $j = \overline{1,d}$, — додатні та незростаючі;

2. $\forall j = \overline{1,d}$ $\exists M_j > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}$ $\frac{\psi_j(l)}{\psi_j(2l)} \le M_j$.

Зазначимо, що до вказаної множини належать, зокрема, функції $\psi_j(k) = k^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k \in \mathbb{N}$; $\psi_j(k) = k^{-r_j}\ln(k+1)$, $r_j > 0$, $k \in \mathbb{N}$, та інші.

Далі для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, покладемо

$$S_{\theta_M}(f,x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(k^j\right) e^{i\left(k^j,x\right)},$$

де $\widehat{f}\left(k^j\right)$ – коефіцієнти Фур'є функції f, $\theta_M = \left\{k^j : k^j = \right.$ $= \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right),\ k^j \in \mathbb{Z}^d,\ j = \overline{1,M}\left.\right\}$, і позначимо

$$e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{\theta_M} \|f(\cdot) - S_{\theta_M}(f,\cdot)\|_q. \tag{2}$$

Величину (2) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції f. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q = \sup_{f \in F} \inf_{\theta_M} \|f(\cdot) - S_{\theta_M}(f,\cdot)\|_q. \tag{3}$$

Апроксимативна характеристика (2) була введена Е. С. Белінським (див., наприклад, [2]). У подальшому напрям, пов'язаний з вивченням ортогональних тригонометричних наближень як індивідуальних функцій, так і певних класів функцій, одержав розвиток у роботах А. С. Романюка [3–6], А. С. Федоренка [7], Н. М. Консевич [8], С. А. Стасюка [9], В. В. Шкапи [10], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [11]. В цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Результати роботи будемо записувати у термінах порядкових співвідношень. Отже, якщо існують такі додатні сталі C_1 та C_2, для яких виконуються одна з умов $A \le C_1 B$ чи $B \le C_2 A$, то, відповідно, позначають $A \ll B$ чи $A \gg B$. При виконанні обох вказаних нерівностей вводиться позначення $A \asymp B$. Зазначимо, що сталі у порядкових співвідношеннях можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення.

2. Допоміжні твердження

Сформулюємо декілька відомих тверджень, які нам знадобляться для отримання результатів.

При цьому кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : \ \left[2^{s_j - 1}\right] \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d} \right\}.$$

Далі, для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k)$ – як і раніше, коефіцієнти Фур'є даної функції, і зазначимо, що об'єднання множин $\rho(s)$, $(s, 1) = s_1 + \ldots + s_d < n$, $n \in \mathbb{N}$, утворюють множину Q_n, яка називається "східчастим гіперболічним хрестом" [1, с. 7]. Відомо, що кількість точок цієї множини за порядком дорівнює $2^n n^{d-1}$ [1, с. 70].

Справедливі такі твердження.

Теорема А (Літтлвуда-Пелі, див., наприклад, [12, с. 52–56]). *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують такі додатні сталі $C_3(q)$ та $C_4(q)$, що для кожної функції $f \in L_q(\pi_d)$ має місце оцінка*

$$C_3(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \le C_4(q)\|f\|_q.$$

Теорема Б (Марцинкевича, [13, Т. II, с. 346]). *Нехай задано послідовність $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, що задовольняє умови*

1. $|\lambda_n| \le M, \ n = 0, \pm 1, \ldots;$
2. $\sum\limits_{\mu = \pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu} - 1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \le M, \ \nu = 1, 2, \ldots$.

Тоді якщо

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}\in L_{q},\ 1<q<\infty,$$

то

$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k c_k e^{ikx}\in L_q$$

і існує константа $C_5(q)$, *яка залежить тільки від* q, *така, що*

$$\|F(\cdot)\|_q\le C_5(q)M\|f(\cdot)\|_q.$$

Лема А. [1, с. 11] *При* $\gamma>0$ *має місце співвідношення*

$$\sum_{(s,1)\ge n}2^{-\gamma(s,1)}\asymp n^{d-1}2^{-\gamma n}.$$

Лема Б. [1, с. 25] *При* $1\le p<q<\infty$, $f\in L_p\left(\pi_d\right)$, *справедлива оцінка*

$$\sum_{s}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^q\cdot 2^{(s,1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}\gg\|f\|_q^q.$$

Будемо використовувати також твердження, яке є наслідком теореми 1 із [14, с. 94].

Лема В. *Нехай* $1<p<\infty$, $f\in L^{\psi}_{\beta,p}$, $\psi_j(\cdot)\in D$, $j=\overline{1,d}$. *Тоді для будь-якого* $s\in\mathbb{N}^d$ *справедлива оцінка*

$$\|\delta_s(f,\cdot)\|_p\asymp\prod_{j=1}^{d}\psi_j\left(2^{s_j}\right)\left\|\delta_s\left(f^{\psi}_{\beta},\cdot\right)\right\|_p,$$

де $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ — (ψ,β)*-похідна функції* f.

3. Основні результати

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M^{\perp}\left(D_\beta^\psi\right)_q \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)},$$

де

$$\Phi(n) = \min_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right), \quad \Psi(n) = \max_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right).$$

Доведення. Доведемо спочатку оцінку зверху. Згідно з прийнятими позначеннями, можемо записати

$$e_M^{\perp}\left(D_\beta^\psi\right)_q \ll \left\| D_\beta^\psi(x) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right) \right\|_q =$$

$$= \left\| \sum_{(s,1)\geq n} \delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right) \right\|_q, \ 1 < q < \infty. \tag{4}$$

Для продовження міркувань розглянемо спочатку випадок $1 < q \leq 2$. Використовуючи послідовно теорему A та нерівність

$$|a+b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1,$$

з $\alpha = \frac{q}{2}$, одержимо

$$\left\| \sum_{(s,1)\geq n} \delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left[(2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \left| \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[(2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \left| \sum_{(s,1)\geq n} \left| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right|^2 \right|^{\frac{q}{2}} dx \right]^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left[(2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \sum_{(s,1)\geq n} \left| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[(2\pi)^{-d} \sum_{(s,1)\geq n} \int\limits_{\pi_d} \left| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\sum_{(s,1)\geq n} \left\| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right\|_q^q \right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (5)$$

Тепер оцінимо величину

$$\left\| \delta_s \left(D^{\psi}_{\beta}, x \right) \right\|_q = \left\| \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j \left(|k_j| \right) e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j} e^{i(k,x)} \right\|_q . \qquad (6)$$

Для цього розглянемо кратну послідовність $\{\lambda_k\}$, яка задається наступним чином

$$\{\lambda_k\} = \left\{ \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j \left(|k_j| \right)}{\psi_j \left(2^{s_j} \right)} e^{i \frac{\pi \beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j} \right\}, \quad 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \; j = \overline{1,d}.$$

Зазначимо, що дана послідовність являє собою добуток однократних послідовностей

$$\left\{ \lambda^{(j)}_{\mu} \right\} = \left\{ \frac{\psi_j \left(|\mu| \right)}{\psi_j \left(2^{\nu} \right)} e^{i \frac{\pi \gamma}{2} \mathrm{sgn} \mu} \right\}, \; \nu = 1, 2, \dots , \; 2^{\nu-1} \leq |\mu| < 2^{\nu}, \; \gamma \in \mathbb{R},$$

які, як легко переконатися, задовольняють умови теореми Б.

Дійсно, враховуючи, що $\psi_j \in D,\ j = \overline{1, d}$, матимемо

$$\left|\lambda_\mu^{(j)}\right| = \left|\frac{\psi_j\left(|\mu|\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\operatorname{sgn}\mu}\right| = \left|\frac{\psi_j\left(|\mu|\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)}\right| \le \frac{\psi_j\left(2^{\nu-1}\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)} \le M_j.$$

Далі, для будь-якого μ

$$\left|\triangle\ \lambda_\mu^{(j)}\right| = \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)} - \lambda_\mu^{(j)}\right| \le \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)}\right| + \left|\lambda_\mu^{(j)}\right| \le 2M_j.$$

Тому при $\nu = 1$

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\ \lambda_\mu^{(j)}\right| \le \left|\lambda_{\mu+1}^{(j)}\right| + \left|\lambda_\mu^{(j)}\right| \le 2M_j, \tag{7}$$

оскільки множина $\delta(\nu)$ містить у собі лише один елемент μ.

Якщо ж $\nu > 1$, то через $\widehat{\delta}(\nu)$ позначимо множину всіх $\mu \in \delta(\nu)$, крім найбільшого з них. Тоді, беручи до уваги співвідношення (7), можемо записати

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\ \lambda_\mu^{(j)}\right| \le \sum_{\mu\in\widehat{\delta}(\nu)} \left|\triangle\ \lambda_\mu^{(j)}\right| + 2M_j.$$

Варто також зазначити, що числа μ та $\mu + 1$ із $\widehat{\delta}(\nu)$ мають однаковий знак. Тоді для довільного $\nu > 1$

$$\sum_{\mu\in\delta(\nu)} \left|\triangle\ \lambda_\mu^{(j)}\right| \le \sum_{\mu\in\widehat{\delta}(\nu)} \left|\frac{\psi_j\left(|\mu+1|\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\operatorname{sgn}(\mu+1)} - \frac{\psi_j\left(|\mu|\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)} e^{i\frac{\pi\gamma}{2}\operatorname{sgn}\mu}\right| +$$

$$+2M_j \le \frac{1}{\psi_j\left(2^\nu\right)} \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{\mu=2^\nu-1} \left(\psi_j\left(\mu\right) - \psi_j\left(\mu+1\right)\right) + 2M_j =$$

$$= \frac{1}{\psi_j\left(2^\nu\right)} \left(\psi_j\left(2^{\nu-1}\right) - \psi_j\left(2^\nu\right)\right) + 2M_j = \frac{\psi_j\left(2^{\nu-1}\right)}{\psi_j\left(2^\nu\right)} - 1 + 2M_j < 3M_j.$$

Таким чином, однократна послідовність $\left\{\lambda_\mu^{(j)}\right\}$ для будь-якого $j=\overline{1,d}$, задовольняє умови теореми Марцинкевича. Отже, і для кратної послідовності, як добутку однократних, будуть виконуватись умови теореми Марцинкевича у багатовимірному випадку (див., наприклад, [12, с. 57]).

Далі застосуємо мультиплікатор Λ_s, який задається послідовністю $\{\lambda_k\}$, до полінома $\sum\limits_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}$.

$$\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} = \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \frac{\psi_j\left(|k_j|\right)}{\psi_j\left(2^{s_j}\right)} e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(k,x)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \psi_j{}^{-1}\left(2^{s_j}\right) \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(|k_j|\right) e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(k,x)}.$$

Тоді, з одного боку,

$$\left\|\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}\right\|_q =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \psi_j{}^{-1}\left(2^{s_j}\right) \left\| \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(|k_j|\right) e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(k,x)}\right\|_q,$$

а з іншого боку, за теоремою Б

$$\left\|\Lambda_s \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}\right\|_q \leq C_6(q) \left\|\sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}\right\|_q, \ 1<q<\infty.$$

Звідси

$$\left\| \sum_{k\in\rho(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(|k_j|\right) e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j} e^{i(k,x)}\right\|_q \ll \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\|\sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}\right\|_q =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \right\|_q, \ 1<q<\infty. \tag{8}$$

Для продовження оцінки (8), скористаємося співвідношенням (див., наприклад, [15, с. 181])

$$\left\| \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \right\|_q \asymp m^{\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \ 1<q<\infty.$$

Тому, згідно з (6) і (8), отримаємо

$$\left\|\delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right)\right\|_q \ll \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \ 1<q<\infty. \tag{9}$$

Таким чином, об'єднуючи співвідношення (5) та (9), матимемо

$$\left\| \sum_{(s,1)\geq n} \delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right) \right\|_q \ll \left[\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right]^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{l=n}^{\infty} \sum_{(s,1)=l} \left(\max_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)q} 2^{-(s,1)q\varepsilon} \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\sum_{l=n}^{\infty} \Psi^q(l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)q} \sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)q\varepsilon} \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Будемо враховувати той факт, що $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростають, тобто не зростають і $\Psi(l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}$. Отже, застосовуючи твердження A та лему A, одержимо

$$\left\| \sum_{(s,1)\geq n} \delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right) \right\|_q \ll \Psi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \left(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{-(s,1)q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}2^{-n\varepsilon}n^{\frac{d-1}{q}} = \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}, \ 1 < q \le 2. \quad (11)$$

Згідно з (4) та (11),

$$e_M^{\perp}\left(D_\beta^\psi\right)_q \ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}, \quad 1 < q \le 2. \quad (12)$$

Розглянемо тепер випадок $2 < q < \infty$. Беручи до уваги лему Б (при $p = 2$) та співвідношення (9), можемо записати

$$\left\|\sum_{(s,1)\ge n}\delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right)\right\|_q \ll \left[\sum_{(s,1)\ge n}\left\|\delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right)\right\|_2^q \cdot 2^{(s,1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q}\right]^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left[\sum_{(s,1)\ge n}\left(\prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right)2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{2}\right)}\right)^q 2^{(s,1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q}\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\sum_{(s,1)\ge n}\left(\prod_{j=1}^d \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^q 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)q}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Повторюючи міркування, які проводились для випадку $1 < q \le 2$, починаючи з (10), дістанемо шукану оцінку зверху

$$\left\|\sum_{(s,1)\ge n}\delta_s\left(D_\beta^\psi, x\right)\right\|_q \ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}, \ 2 < q < \infty. \quad (13)$$

Таким чином, співставивши (4) та (13), одержимо

$$e_M^{\perp}\left(D_\beta^\psi\right)_q \ll \Psi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}}, \ 2 < q < \infty. \quad (14)$$

Оскільки $M \asymp 2^n n^{d-1}$, то із (12) та (14) отримаємо

$$e_M^{\perp}\left(D_\beta^\psi\right)_q \ll \Psi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \ 1 < q < \infty.$$

Оцінку зверху доведено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Нехай $\Delta Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)=n} \rho(s)$. Тоді по заданому M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалося співвідношення $|\Delta Q_n| \geq 4M$ і $2^n n^{d-1} \asymp M$.

Позначимо через $S^*_{\theta_M}(D^{\psi}_{\beta}, \cdot)$ — поліном, на якому досягається нижня грань

$$\inf_{\theta_M} \|D^{\psi}_{\beta}(\cdot) - S_{\theta_M}(D^{\psi}_{\beta}, \cdot)\|_q,$$

тобто для якого

$$e^{\perp}_M(D^{\psi}_{\beta})_q = \|D^{\psi}_{\beta}(\cdot) - S^*_{\theta_M}(D^{\psi}_{\beta}, \cdot)\|_q, \; 1 < q < \infty.$$

Розглянемо величину

$$J = \int\limits_{\pi_d} \Big(D^{\psi}_{\beta}(x) - S^*_{\theta_M}(D^{\psi}_{\beta}, x)\Big) \left(F_2(x,\beta) - S^*_{\theta_M}(F_2, x)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{\pi_d} D^{\psi}_{\beta}(x) \left(F_2(x,\beta) - S^*_{\theta_M}(F_2, x)\right) dx,$$

де

$$F_2(x,\beta) = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-2} e^{i\pi \frac{\beta_j}{2} \mathrm{sgn} k_j} e^{i(k,x)}.$$

Тоді, з одного боку, застосовуючи нерівність Гельдера $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right)$, матимемо

$$J \leq \|D^{\psi}_{\beta}(x) - S^*_{\theta_M}(D^{\psi}_{\beta}, x)\|_q \|F_2(x,\beta) - S^*_{\theta_M}(F_2, x)\|_{q'} =$$

$$= e^{\perp}_M(D^{\psi}_{\beta})_q \|F_2(x,\beta) - S^*_{\theta_M}(F_2, x)\|_{q'}.$$

Оскільки $M \asymp 2^n n^{d-1}$, то

$$\|F_2(x,\beta) - S^*_{\theta_M}(F_2, x)\|_{q'} \ll \| \sum_{(s,1) \geq n} \delta_s\left(F_2, x\right) \|_{q'} =$$

$$= \| F_2(x,\beta) - S_n\left(F_2, x\right) \|_{q'},$$

де $S_n\left(f, \cdot\right) = \sum\limits_{(s,1)<n} \delta_s\left(f, \cdot\right)$ — "східчасто-гіперболічна"сума Фур'є функції f.

Враховуючи, що [1, с. 38]

$$\| F_2(x,\beta) - S_n\left(F_2, x\right) \|_{q'} \ll 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)},\ 1 < q' < \infty,$$

запишемо

$$J \ll e_M^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q \cdot 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}. \tag{15}$$

З іншого боку, можна оцінити величину J знизу. Покладемо $\rho^+(s) = \left\{k = (k_1, \dots, k_d) :\ \left[2^{s_j-1}\right] \leq k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\right\}$. Оскільки, згідно з умовою теореми, $\Phi(l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}$ не зростають, то при $M \asymp\ 2^n n^{d-1}$

$$J \gg \sum_{\substack{k \notin Q_n, \\ k_j \in \mathbb{N}}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(k_j) k_j^{-2} = \sum_{(s,1)\geq n} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(k_j) k_j^{-2} \gg$$

$$\gg \sum_{(s,1)\geq n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) 2^{-2s_j} \cdot 2^{(s,1)} \geq$$

$$\geq \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{(s,1)=l} \left(\min_{(s,1)=l} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right) \cdot 2^{-(s,1)} = \sum_{l=n}^{\infty} \Phi(l) 2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \times$$

$$\times \sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \geq \Phi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} l^{d-1} \gg$$

$$\gg \Phi(n) 2^{n\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)} n^{d-1} = \Phi(n) n^{d-1} 2^{-n}. \tag{16}$$

Зіставивши (15) та (16), знаходимо шукану оцінку

$$\Phi(n)n^{d-1}2^{-n} \ll J \ll e^{\perp}_{M}(D^{\psi}_{\beta})_{q} \cdot 2^{-n\left(2-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{q}\right)},$$

$$e^{\perp}_{M}(D^{\psi}_{\beta})_{q} \gg \Phi(n)n^{d-1}2^{-n}\cdot 2^{n\left(2-\frac{1}{q}\right)}n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-1\right)} = \Phi(n)2^{n\left(1-\frac{1}{q}\right)}n^{\frac{d-1}{q}} \gg$$

$$\gg \Phi(n)M^{1-\frac{1}{q}}(\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)},\ 1<q<\infty.$$

Оцінку знизу, а отже, і теорему, доведено.

Зауваження 1. У одновимірному випадку величини $e^{\perp}_{M}\left(D^{\psi_1}_{\beta}\right)_{q}$, $1<q<\infty$, досліджувалися В. В. Шкапою [10] і при цьому було встановлене наступне співвідношення

$$e^{\perp}_{M}\left(D^{\psi_1}_{\beta}\right)_{q} \asymp \psi_1(M)M^{1-\frac{1}{q}},\ 1<q<\infty.$$

Зауваження 2. При $\psi_j\left(|k_j|\right)=|k_j|^{-r_j}$, $r_j>1-\frac{1}{q}$, $k_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j=\overline{1,d}$, оцінки величини $e^{\perp}_{M}\left(D^{\psi}_{\beta}\right)_{q}$, $1<q<\infty$, знайдені А. С. Романюком [6].

Перед тим, як перейти до другої частини роботи, введемо ще деякі позначення.

Нехай $V_m(x), m\in\mathbb{N}$, — ядра Валле-Пуссена вигляду

$$V_m(x)=1+2\sum_{k=1}^{m}\cos kx+2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k-m}{m}\right)\cos kx.$$

Кожному вектору $s=(s_1,\ldots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x)=\prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right).$$

Відомо, що (див., наприклад, [1, с. 66])

$$\|A_s(x)\|_q \asymp 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \ 1 \le q \le \infty. \tag{17}$$

Далі, для $f \in Ł_1(\pi_d)$ введемо позначення

$$A_s\,(f,x) = (f * A_s)\,(x),$$

де "$*$" — операція згортки.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j\,(|k_j|)\,|k_j|^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \ll e_M^{\perp}\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q \ll$$

$$\ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. З цією метою для $f \in L^{\psi}_{\beta,1}$ оцінимо величину $\left\| f(x) - \sum\limits_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \right\|_q$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$. При цьому розглянемо два випадки: $1 < q \le 2$ та $2 < q < \infty$.

Нехай $1 < q \le 2$. Повторивши міркування, які використовувалися при доведенні теореми 1 до співвідношення (5), і далі застосувавши лему B, одержимо

$$\left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \right\|_q = \left\| \sum_{(s,1)\ge n} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left[\sum_{(s,1)\ge n} \|\delta_s\,(f,x)\|_q^q \right]^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| \delta_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{18}$$

Тепер, врахувавши, що

$$\left\| \delta_s\left(f_\beta^\psi, \cdot\right) \right\|_q \ll \left\| A_s\left(f_\beta^\psi, \cdot\right) \right\|_q,\ 1 < q < \infty,$$

і використавши властивість згортки (див., наприклад, [16, с. 71]) а також співвідношення (17), із (18) отримаємо

$$\left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| A_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| f_\beta^\psi \right\|_1^q \left\| A_s \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q 2^{(s,1)\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Остання сума досліджувалась вище при доведенні теореми 1. Тому, повторивши міркування, починаючи із (10), для $1 < q \leq 2$ матимемо

$$\left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{20}$$

Перейдемо до випадку $2 < q < \infty$. Скориставшись послідовно лемами Б та В, запишемо

$$\left\| f(x) - \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \right)^q \left\| A_s\left(f_\beta^\psi, x\right) \right\|_2^q 2^{(s,1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1.$$

Далі, здійснивши перетворення, аналогічні до (19), і потім, відповідно, до (10), одержимо

$$I_1 \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \ 2 < q < \infty. \tag{21}$$

Звідси, об'єднуючи (20) та (21), матимемо

$$e_M^{\perp}\left(L_{\beta,1}^\psi\right)_q \ll \Psi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \ 1 < q < \infty.$$

Оцінку зверху встановлено.

Перейдемо до оцінки знизу. Нехай $f \in L_{\beta,1}^\psi$ і

$$S_{\theta_M}(f,x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(k^j\right) e^{i\left(k^j,x\right)},$$

де θ_M — довільний набір із M векторів $k^j \in \mathbb{Z}^d$, $j = \overline{1,M}$.

Тоді, враховуючи (1), можемо записати

$$I_2 = \sup_{f\in L_{\beta,1}^\psi} \left\| f(x) - S_{\theta_M}(f,x) \right\|_q =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1\leq 1} \left\| \varphi(x) * D_\beta^\psi(x) - \varphi(x) * \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(k^j,x\right)} * D_\beta^\psi(x) \right\|_q. \tag{22}$$

Далі, покладемо

$$t_M(x) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\left(k^j,x\right)} * D_\beta^\psi(x).$$

Із (22) будемо мати

$$I_2 = \sup_{\|\varphi\|_1 \le 1} \left\| \varphi(x) * \left(D^{\psi}_{\beta}(x) - t_M(x) \right) \right\|_q = \left\| D^{\psi}_{\beta}(x) - t_M(x) \right\|_q \ge$$

$$\ge e^{\perp}_M \left(D^{\psi}_{\beta} \right)_q .$$

Тепер, скориставшись результатом теореми 1, приходимо до шуканої оцінки знизу величини $e^{\perp}_M \left(L^{\psi}_{\beta,1} \right)_q$:

$$e^{\perp}_M \left(L^{\psi}_{\beta,1} \right)_q \gg \Phi(n) M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}, \ 1 < q < \infty.$$

Таким чином, теорема 2 доведена.

Зауваження 3. У одновимірному випадку оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $L^{\psi_1}_{\beta,1}$ у метриці простору L_q, $1 < q < \infty$, при додаткових умовах на функцію $\psi_1(\cdot)$, знайдено В. В. Шкапою [10].

Зауваження 4. У випадку $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 1 - \frac{1}{q}$, $k_j \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $j = \overline{1, d}$, порядок величин $e^{\perp}_M \left(L^{\psi}_{\beta,1} \right)_q$, $1 < q < \infty$, було отримано А. С. Романюком [6].

Література

[1] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, № 2. — С. 3–113.

[2] *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей"системой экспонент на классах гладких периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун–т, 1988. — С. 16–33.

[3] *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // В кн. Оптимизация методов приближения. — К.: Ин-т математики НАН Украины. — 1992. — С. 112–118.

[4] *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Укр. мат. журн. — 1993. —- **45**, № 10. — С. 1411–1423.

[5] *Романюк А. С.* Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов // Укр. мат. журн. —1996. — **48**, № 1. — С. 80–89.

[6] *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, № 2. — С. 69–98.

[7] *Федоренко А. С.* Про найкращі m–членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 12. — С. 1719–1721.

[8] *Консевич Н. М.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 1. — С. 23–29.

[9] *Стасюк С. А.* Найкращі $M-$ членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 5. — С. 647–656.

[10] *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближеннь функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 3. — С.315–329.

[11] *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 7. — С. 916–936.

[12] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

[13] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.; Т. II. — 537 с.

[14] *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1987. — С. 92–105.

[15] *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Москов. гос. ун–т, 1976. — 304 с.

[16] *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[17] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.