Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 289–299

УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко

(Інститут математики НАН України, Київ)

Наближення класів $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами

serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

We calculate the least upper bounds of pointwise approximations by interpolating trigonometric polynomials with equidistant nodes of interpolation for classes convolutions of 2π-periodic functions, which belong to the unit ball of the space L_2, with an arbitrary square summable kernel.

Обчислено значення точних верхніх меж поточкових наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами з рівномірним розподілом вузлів інтерполяції класів згорток 2π-періодичних функцій, що належать одиничній кулі у просторі L_2, з довільним сумовним з квадратом твірним ядром.

У роботі продовжуються дослідження апроксимативних властивостей інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа на класах $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій, введених О. І. Степанцем [1, Гл III]. З історією досліджень у цьому напрямку можна ознайомитись по роботах [2, Гл. VIII], [3–5] та по наведеній у них бібліографії.

Нехай $L_p,\ 1 \le p < \infty,$ — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на $[-\pi, \pi]$ функцій φ зі стандартною нормою

$$\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій φ, в якому норма задана рівністю

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |\varphi(t)|;$$

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,p},\ 1 \le p \le \infty,$ множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \Psi_{\bar\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0, \qquad (1)$$

$$B_p^0 = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'},\ 1/p + 1/p' = 1,$ ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar\beta}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2} \right),$$

де $\psi = \psi(k)$ і $\bar\beta = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — довільні послідовності дійсних чисел. Функцію φ у зображенні (1) називають $(\psi, \bar\beta)$-похідною функції f і позначають $f^{\psi}_{\bar\beta}(x)$. Поняття $(\psi, \bar\beta)$-похідної належить О. І. Степанцю (див., наприклад, [1]). Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, то (див. [1, с. 144]) згортка (1) є неперервною функцією, а, отже, $C^{\psi}_{\bar{\beta},p} \subset C$.

При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ позначатимемо через $C^{\psi}_{\beta,p}$. Якщо $\psi(k) = k^{-r}$ і $\beta_k \equiv r$, $r \in \mathbb{N}$, то класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ є відомими класами диференційовних функцій W^r_p. Якщо $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, то класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ будемо позначати $C^{q}_{\bar{\beta},p}$. При $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $C^{q}_{\bar{\beta},p}$ є відомими класами інтегралів Пуассона $C^{q}_{\beta,p}$. Зрозуміло, що при $p = 2$ умова включення $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_2$ еквівалентна виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f(x)$ — довільна 2π-періодична неперервна функція. Через $\tilde{S}_n(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x^{(n)}_k = 2k\pi/(2n + 1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_n(f; x^{(n)}_k) = f(x^{(n)}_k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Для будь-якого класу $\mathfrak{N} \subset C$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; \tilde{S}_n; x) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - \tilde{S}_n(f; x)|, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

У даній роботі обчислено точні значення величин (3) при $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ і довільних $\psi(k)$, що задовольняють умову (2). А саме, встановлено наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2). Тоді для довільної послідовності $\bar{\beta} = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Наведемо деякі наслідки з теореми 1.

Наслідок 1. *Нехай* $q \in (0,1)$, $\bar{\beta} = \beta_k$ *— довільна послідовність дійсних чисел і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(C^q_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \left|\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right| \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1-2q^{2(2n+1)}\cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)}}\right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Наслідок 2. *Нехай* $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 1/2$, $\bar{\beta} = \beta_k$ *— довільна послідовність дійсних чисел і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \left|\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right| \frac{2}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}(2n+1)^r} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 \frac{\varrho^{-n/(2n+1)}(1+\varrho)\ln^{2r-1}\varrho^{-1}}{(1-\varrho^{1/(2n+1)})(1-2\varrho\cos(2n+1)x+\varrho^2)} d\varrho\right)^{1/2}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де $\Gamma(x)$ *— гамма-функція.*

Зазначимо, що формулу (4) можна вважати інтерполяційним аналогом отриманої в [6] рівності для точної верхньої межі рівномірних наближень функцій f з класу $C^\psi_{\bar{\beta},2}$ частинними сумами Фур'є $S_n(f)$ порядку n, яка має вигляд

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\bar{\beta},2}; S_n)_C = \sup_{f \in C^\psi_{\bar{\beta},2}} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi^2(k)\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Зіставлення (4) і (7) дозволяє записати загальне співвідношення

$$0 \le \frac{\mathcal{E}(C^\psi_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x)}{\mathcal{E}(C^\psi_{\bar{\beta},2}; S_n)_C} \le 2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Для деяких важливих класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ оцінку (8) можна уточнити. За виконання умов наслідку 1 має місце рівність [6, с. 186]

$$\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; S_n)_C = \frac{2q^{n+1}}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}. \tag{9}$$

Тому, співставляючи (5) і (9), отримуємо

$$\frac{\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x)}{\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; S_n)_C} =$$

$$= 2\left|\sin\frac{(2n{+}1)x}{2}\right| \left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1{-}2q^{2(2n+1)}\cos(2n{+}1)x{+}q^{4(2n+1)}}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

При $n \to \infty$ з (10) випливає асимптотична рівність

$$\frac{\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x)}{\mathcal{E}(C^{q}_{\bar{\beta},2}; S_n)_C} = 2\left|\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right| \left(1 + O(1)\frac{q^{2(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})^2}\right), \tag{11}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Аналоги рівності (11) для класів інтегралів Пуассона $C^{q}_{\beta,2}$ було встановлено в [5], а для класів $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ таких, що $\psi(k) > 0$ і $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k+1)/\psi(k) = 0$, — в роботі [4].

Доведення теореми 1. Інтерполяційний тригонометричний поліном $\widetilde{S}_n(f;x)$ можна записати (див., наприклад, [2, с. 128-129]) в явному вигляді наступним чином:

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}\cos kx + b_k^{(n)}\sin kx), \tag{12}$$

де

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\cos kx_i^{(n)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin kx_i^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є a_k і b_k функції $f(x)$ ($f \in C$) і коефіцієнтами $a_k^{(n)}$ і $b_k^{(n)}$ інтерполяційного полінома $\widetilde{S}_n(f;x)$ виражається за допомогою рівностей [2, с. 130]

$$a_k^{(n)} = a_k + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m(2n+1)+k} + a_{m(2n+1)-k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{13}$$

$$b_k^{(n)} = b_k + \sum_{m=1}^{\infty} (b_{m(2n+1)+k} - b_{m(2n+1)-k}), \quad k = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Згідно з (1) для довільної функції f з класу $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ її коефіцієнти Фур'є виражаються формулами

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \cos\left(kt - \tfrac{\beta_k \pi}{2}\right) \varphi(t)dt, \\ b_k &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k) \sin\left(kt - \tfrac{\beta_k \pi}{2}\right) \varphi(t)dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Об'єднуючи формули (1) та (12)–(15), для $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ одержуємо

$$f(x) - \tilde{S}_n(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times$$

$$\times \left(\cos\left(\nu t - \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) - \cos\left(\nu t - m(2n+1)x - \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right)\right) dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)mx}{2} \sin\left(\nu t - \frac{(2n+1)mx}{2} - \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) dt. \tag{16}$$

Розглядаючи точну верхню межу по функціях f з класу $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ у лівій і правій частині рівності (16), здійснюючи заміну змінної $t = -\tau$ та враховуючи інваріантність множин $C^{\psi}_{\bar{\beta},2}$ відносно зсуву аргументу, приходимо до висновку, що в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ мають місце рівності

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\pi} \sup_{\varphi \in B^0_2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)mx}{2} \sin\left(\nu t - \frac{(2n+1)mx}{2} - \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sup_{\varphi \in B^0_2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)mx}{2} \sin\left(\nu t + \frac{(2n+1)mx}{2} + \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) dt. \qquad (17)$$

Застосовуючи до правої частини (17) співвідношення двоїстості [7, с. 27]

$$\sup_{\varphi \in B^0_p} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) u(t) dt = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|u - \alpha\|_{p'}, \quad u \in L_{p'}, 1 \le p \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad (18)$$

при $p = 2$ та рівність Парсеваля, одержуємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{2}{\pi} \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \Bigg\| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi(\nu) \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)mx}{2} \sin\left(\nu t + \frac{(2n+1)mx}{2} + \frac{\beta_\nu \pi}{2}\right) - \alpha \Bigg\|_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} + \alpha^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k) \right)^{1/2}.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення наслідку 1. З рівності (4), покладаючи $\psi(k) = q^k$ та враховуючи, що

$$\sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} q^{2k} = \frac{q^{2m(2n+1)-2n}(1-q^{2(2n+1)})}{(1-q^2)},$$

маємо

$$\mathcal{E}^2(C^q_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{4(1-q^{2(2n+1)})}{\pi(1-q^2)q^{2n}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} q^{2m(2n+1)}. \tag{19}$$

Проводячи елементарні перетворення і користуючись формулою

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varrho^k \cos kt = \frac{\varrho\cos t - \varrho^2}{1 - 2\varrho\cos t + \varrho^2}, \quad |\varrho| < 1,$$

отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} q^{2m(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (1 - \cos(2n+1)mx) q^{2m(2n+1)} =$$

$$= \sin^2 \frac{(2n+1)x}{2} \frac{q^{2(2n+1)}(1+q^{2(2n+1)})}{(1-q^{2(2n+1)})(1-2q^{2(2n+1)}\cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)})}. \tag{20}$$

Об'єднуючи співвідношення (19) та (20), одержуємо рівність

$$\mathcal{E}^2(C^q_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \sin^2 \frac{(2n+1)x}{2} \frac{4q^{2(n+1)}}{\pi(1-q^2)} \times$$

$$\times \frac{(1+q^{2(2n+1)})}{1-2q^{2(2n+1)}\cos(2n+1)x + q^{4(2n+1)}}, \qquad (21)$$

з якої випливає (5). Наслідок 1 доведено.

Доведення наслідку 2. Поклавши $\psi(k) = k^{-r}$ у рівності (4), можемо записати

$$\mathcal{E}^2(C^\psi_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} \times$$

$$\times \left(\zeta(2r, m(2n+1)-n) - \zeta(2r, m(2n+1)+n+1)\right), \qquad (22)$$

де $\zeta(s,l) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (l+m)^{-s}, Re(s) > 1, Re(l) > 0,$ — дзета-функція Гурвіца. Враховуючи інтегральне зображення дзета-функції Гурвіца

$$\zeta(s,l) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-lt}}{1-e^{-t}} dt,$$

маємо

$$\zeta(2r, m(2n+1)-n) - \zeta(2r, m(2n+1)+n+1) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2r)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{2r-1}e^{-(m(2n+1)-n)t}}{1-e^{-t}} \left(1-e^{-(2n+1)t}\right) dt.$$

Отже,

$$\mathcal{E}^2(C^\psi_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \frac{4}{\pi\Gamma(2r)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{2r-1}\left(1-e^{-(2n+1)t}\right)e^{nt}}{1-e^{-t}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{(2n+1)mx}{2} e^{-m(2n+1)t} dt. \tag{23}$$

Користуючись рівностями (20) при $q = e^{-t/2}, t > 0$, з (23) одержуємо

$$\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \sin^2 \frac{(2n+1)x}{2} \frac{4}{\pi\Gamma(2r)} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{t^{2r-1} e^{-(n+1)t}(1+e^{-(2n+1)t})}{(1-e^{-t})(1-2e^{-(2n+1)t}\cos(2n+1)x + e^{-2(2n+1)t})} dt. \tag{24}$$

Здійснивши спочатку заміну змінних $\tau = (2n+1)t$, а потім — $\varrho = e^{-\tau}$, отримуємо

$$\mathcal{E}^2(C^{\psi}_{\bar{\beta},2}; \tilde{S}_n; x) = \sin^2 \frac{(2n+1)x}{2} \frac{4}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{t^{2r-1} e^{-(n+1)t/(2n+1)}(1+e^{-t})}{(1-e^{-t/(2n+1)})(1-2e^{-t}\cos(2n+1)x + e^{-2t})} dt =$$

$$= \sin^2 \frac{(2n+1)x}{2} \frac{4}{\pi\Gamma(2r)(2n+1)^{2r}} \times$$

$$\times \int_0^{1} \frac{\varrho^{-n/(2n+1)}(1+\varrho) \ln^{2r-1} \varrho^{-1}}{(1-\varrho^{1/(2n+1)})(1-2\varrho\cos(2n+1)x + \varrho^2)} d\varrho. \tag{25}$$

З формули (25) випливає рівність (6). Наслідок 2 доведено.

Література

[1] *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.

[2] *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

[3] *Сердюк А. С.* Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 4. — С. 495–505.

[4] *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Проблеми теорії наближень та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 1. — С. 274–297.

[5] *Сердюк А. С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 5. — С. 698–712.

[6] *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів (ψ, β)-диференційовних функцій лінійними методами // Проблеми теорії наближень та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 181–189.

[7] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — Москва: Наука, 1987. — 423 с.