

УДК 517.911.5

*І. Л. Нижник*

*(Інститут математики НАН України, Київ)*

## **Періодичні розв'язки диференціальних рівнянь із розривною нелінійністю**

irene@imath.kiev.ua

We study periodic solutions of first and second orders nonhomogeneous differential equations with discontinuous nonlinearity. Forced periodic oscillation are studied for first order differential equations with and without sliding mode.

Досліджуються періодичні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь першого та другого порядків із розривною нелінійністю. Досліджені вимушені періодичні коливання для рівнянь першого порядку із наявністю та без ковзних режимів.

### **1. Вступ**

Дослідження періодичних розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь є актуальною тематикою, якій присвячена велика кількість праць: наприклад, див. посилання у літературі [1–6]. Поряд із цим, особливу увагу приділяють вивченню рівнянь із розривними нелінійностями завдяки їх важливості у прикладних задачах: див. праці [7–12] та посилання у них. Ці задачі

відіграють важливу прикладну роль, оскільки у термінах розривних систем формулюються багаточисельні змістовні задачі інженерно-технічного характеру, що пов'язані з сейсмічними коливаннями, проходженням ударних хвиль та вибухових процесів, управлінням маніпуляторами, тощо. Останнім часом ряд задач розглянуто у наступних роботах [13–19].

## 2. Неоднорідні рівняння першого порядку

Будемо досліджувати періодичні розв'язки рівняння

$$y'(t) + \operatorname{sign} y(t) = A \sin t, \quad A \geq 0, \quad (1)$$

що описує вимушені коливання, спричинені зовнішньою періодичною силою  $A \sin t$ . Оскільки у рівнянні (1) незалежна змінна є часом та має напрям, то для цього рівняння можливі так звані "ковзні режими". Дослідження диференціальних рівнянь із розривною правою частиною у випадку "ковзних режимів" проводяться у роботах [11, 12], що оснований на теорії диференціальних включень.

Якщо в момент часу  $t_0$  розв'язок має нульові початкові дані, то розв'язок є тотожним нулем на всьому інтервалі  $[t_0, t_0 + l]$ , де зовнішня сила  $f = A \sin t$  приймає значення по модулю менші за 1, а на правому кінці інтервалу рівні 1.

Таким чином, для рівняння (1) під розв'язком будемо розуміти неперервну функцію  $y(t)$ , яка зовні своїх нулів є класичним розв'язком рівняння (1), а на інтервалах  $I$ , де  $y(t) \equiv 0$ , (якщо такі існують) виконується "ковзний режим". Зауважимо, що таке означення розв'язку узгоджується з означенням розв'язку рівняння (1), якщо його інтерпретувати як диференціальне включення, покладаючи  $\operatorname{sign} 0 = [-1, 1]$ .

Знайдемо  $2\pi$ -періодичні розв'язки рівняння (1). У випадку наявності "ковзних режимів" на інтервалах  $I_1 = [t_1 - l, t_1]$  та  $I_2 = [t_1 + \pi - l, t_1 + \pi]$  розв'язок на цих інтервалах є тотожний

нуль, значення  $t_1$  знаходимо із умови  $A \sin(t_1) = 1$ , тобто

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{A}. \quad (2)$$

Між інтервалами  $I_1$  та  $I_2$  розв'язок задовольняє рівняння  $y' + 1 = A \sin(t)$  і умови  $y(t_1) = 0$ ,  $y(t_1 + \pi - l) = 0$ . Тоді

$$y(t) = A(\cos t_1 - \cos t) + t_1 - t. \quad (3)$$

Довжина  $l$  інтервалу з "ковзним режимом" визначається із умови  $y(t_1 + \pi - l) = 0$  та наближено при  $1 < A < 1.5$  задається наступним виразом

$$l \approx \pi - 3 \arccos \frac{1}{A}. \quad (4)$$

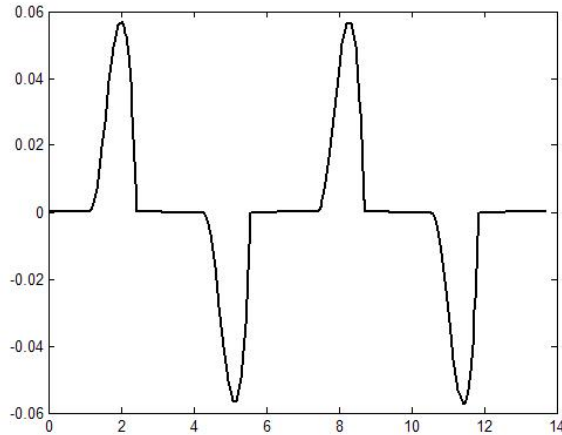


Рис.1  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння (1),  $A = 1.1$ , на інтервалі часу  $[0, \arcsin(1/A) + 4\pi]$ .

На рис.1 представлений графік  $2\pi$ -періодичного розв'язку з амплітудою  $A = 1.1$  зовнішньої сили з "ковзними режимами" на інтервалах, отриманих із інтервалу  $[2.438, 4.282]$  зсувом на  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Якщо "ковзні режими" відсутні, то  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(t) = \begin{cases} A(\cos t_2 - \cos t) + t_2 - t, & t_2 \leq t \leq t_2 + \pi, \\ A(\cos t_2 - \cos t) - (t_2 - t), & t_2 + \pi \leq t \leq t_2 + 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

Параметр  $t_2$  у формулах (5) визначається рівністю

$$t_2 = \arccos \frac{\pi}{2A}. \quad (6)$$

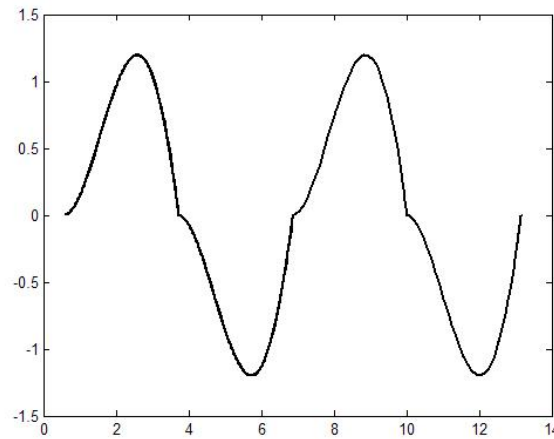


Рис.2  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння (1),  $A = 1.9$ , на відрізьку часу  $[\arccos(\pi/(2A)), 4\pi + \arccos(\pi/(2A))]$ .

На рис.2 представлений  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівняння (1) без "ковзних режимів" для амплітуди  $A = 1.9$  зовнішньої сили.

**Теорема 1.** *Періодичні розв'язки рівняння (1) та їх "ковзний режим" можуть отримуватись при кусочно-лінійній апроксимації розривної нелінійності*

$$\text{sign } y = f_\varepsilon(y) \equiv \begin{cases} 1, & y > \varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}y, & |y| \leq \varepsilon, \\ -1, & y < -\varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Доведення.** Задача Коші для рівняння (1) з початковою умовою  $y(t) = y_0$  і кусково-лінійною апроксимацією нелінійності (7) призводить до розв'язку

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{A\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\right)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{A\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \sin t - \frac{A\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cos t. \quad (8)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  розв'язок (8) дає "ковзний режим"  $y \equiv 0$ . Аналогічно можна показати, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  отримуємо періодичний розв'язок. Теорема 1 доведена.

### 3. Неоднорідні рівняння другого порядку

Розглянемо рівняння другого порядку із розривною нелінійністю

$$y'' + y = \text{sign } y + f(t), \quad (9)$$

де  $f(t)$  – неперервна функція. Під розв'язком рівняння (9) розуміють неперервно-диференційовну функцію  $y(t)$ , яка зовні своїх нулів є класичним розв'язком рівнянням (9). Зауважимо, що таке означення розв'язку узгоджується з означенням розв'язку рівняння (9), якщо його інтерпретувати як диференціальне включення, покладаючи  $\text{sign } 0 = [-1, 1]$ . В роботі [15] описані всі розв'язки однорідного ( $f \equiv 0$ ) рівняння (9), коли тотожній нуль  $y \equiv 0$  є розв'язком рівняння. Наведемо цей результат у вигляді теореми.

**Теорема 2.** 1) Якщо розв'язок рівняння

$$y'' + y = \text{sign } y \quad (10)$$

не має нулів на всій осі, тоді цей розв'язок має вигляд

$$y(t) = \pm 1 + a \cos t + b \sin t, \quad a^2 + b^2 < 1,$$

де знак  $+$  відповідає додатним, а знак  $-$  відповідає від'ємним розв'язкам.

2) Якщо розв'язок  $y(t)$  рівняння (10) має простий нуль у точці  $t_0$ , тобто  $y(t_0) = 0$ ,  $y'(t_0) \neq 0$ , тоді він  $L = 2l$ -періодичний, де  $l = 2 \arctan(|y'(0)|)$  та однозначно визначається при всіх  $t$ , еквівалентний функції вигляду

$$y(t) = 1 - \frac{\cos(t - \frac{l}{2})}{\cos \frac{l}{2}}, \quad 0 \leq t \leq l,$$

$$y(t) = -y(t - l), \quad l \leq t \leq 2l = L.$$

3) Якщо розв'язок  $y(t) \not\equiv 0$  рівняння (10) та має двократний нуль, тобто  $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ , тоді всі нулі такого розв'язку двократні.

Такі розв'язки мають наступну структуру: на всій осі  $t \in (-\infty, +\infty)$  існує скінченне або нескінченне число відкритих інтервалів  $I_k, k = 1, 2, \dots, \leq \infty$ , що не перетинаються і мають довжину  $2\pi$  таких, що розв'язки відмінні від нуля лише на цих інтервалах  $I_k = (a_k, a_k + 2\pi)$  і розв'язки мають вигляд

$$y(t) = \pm(1 - \cos(t - a_k)), \quad t \in I_k. \quad (11)$$

Наявність можливості 3) показує, що для рівняння (10) задача Коші може мати не єдиний розв'язок.

**Теорема 3.** Для рівняння (9) з неперервною функцією  $f(t)$  розв'язок задачі Коші з початковими умовами

$$y(t_0) = a, \quad y'(t_0) = b$$

існує локально в деякому околі точки  $t_0$ , якщо початкові дані ненульові  $a^2 + b^2 \neq 0$ , або  $|f(t_0)| > 1$ .

У випадку  $a = b = 0$  і  $|f(t_0)| < 1$  існує принаймні два розв'язки

$$y(t) = \pm(1 - \cos(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t+t_0} \sin(t + t_0 - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (12)$$

**Доведення.** У випадку  $a^2 + b^2 \neq 0$  розв'язок має вигляд

$$y(t) = a \cos(t - t_0) + b \sin(t - t_0) \pm (1 - \cos(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t+t_0} \sin(t + t_0 - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (13)$$

де знак плюс відповідає випадку  $a > 0$  або  $a = 0$  і  $b > 0$ . У інших випадках у виразі (13) стоїть знак мінус. Якщо  $a = b = 0$ , то розв'язок задачі Коші має вигляд (12) при умові, що  $|f(t_0)| > 1$  і знак  $\pm$  співпадає із знаком  $f(t_0)$ . Теорема 3 доведена.

Результат теореми 2 використаємо для дослідження періодичних розв'язків рівняння (9).

**Теорема 4.** *Рівняння*

$$y'' + y = \text{sign } y + \varepsilon \sin \frac{t}{2n}, \quad \varepsilon > 0, \quad n \in N \quad (14)$$

має  $4n\pi$ -періодичний розв'язок

$$y(t) = (1 - \cos t) \text{sign} \left( \sin \frac{t}{2n} \right) + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right)^{-1} \sin \frac{t}{2n}. \quad (15)$$

**Доведення.** При  $t \in (0, 2n\pi)$  розв'язок (15) додатний та задовольняє рівняння

$$y'' + y = 1 + \varepsilon \sin \frac{t}{2n}.$$

На інтервалі  $t \in (2n\pi, 4n\pi)$  розв'язок (15) від'ємний та задовольняє рівняння

$$y'' + y = -1 + \varepsilon \sin \frac{t}{2n}.$$

При  $t = 2n\pi$  розв'язок (15) перетворюється в нуль, є неперервним з неперервною похідною. Розв'язок (15) є  $4n\pi$ -періодичним розв'язком рівняння (14). Теорема 4 доведена.

**Зауваження 1.** Як показує явний вигляд (15), його головний член при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , тобто функція  $(1 - \cos t) \text{sign} \sin \frac{t}{2n}$  є  $4n\pi$ -періодичною, а її період визначається періодом малого при  $\varepsilon \rightarrow +0$  збурення зовнішньої сили  $\varepsilon \sin \frac{t}{2n}$ .

На рис. 3 зображений графік функції (15) при  $n = 2$  та  $\varepsilon = 0.2$ .

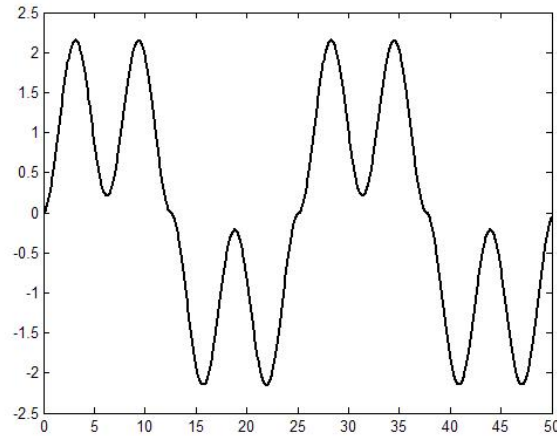


Рис. 3 Розв'язок (15) рівняння (14) при  $n = 2$ ,  $\varepsilon = 0.2$ .

**Теорема 5.** *Задача Коші для рівняння*

$$y'' + y = \text{sign } y + \varepsilon \quad (16)$$

з початковими умовами  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$  має єдиний розв'язок на всій осі, якщо  $\varepsilon \neq 0$ . При цьому при  $\varepsilon > 0$  розв'язок є  $2\pi$ -періодичним і має вигляд

$$y(t) = 1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cos t, \quad \varepsilon > 0, \quad -\infty < t < \infty. \quad (17)$$

При  $\varepsilon < 0$  розв'язок є  $2l$ -періодичним та має вигляд

$$y(t) = \begin{cases} 1 - |\varepsilon| + (1 + |\varepsilon|) \cos t, & -l_1 \leq t \leq l_1, \\ -(1 + |\varepsilon|) \left(1 - \frac{\cos(t-l)}{\cos(l-l_1)}\right), & l_1 \leq t \leq 2l - l_1, \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{де } l_1 = \pi - \arcsin \frac{2\sqrt{|\varepsilon|}}{1+|\varepsilon|}, \quad l - l_1 = \pi - \arctan \frac{2\sqrt{|\varepsilon|}}{1+|\varepsilon|}.$$



При  $\varepsilon = -1$  розв'язок розглядуваної задачі Коші на всій осі є  $\frac{5\pi}{2}$  періодичний, зображений на рис. 4.

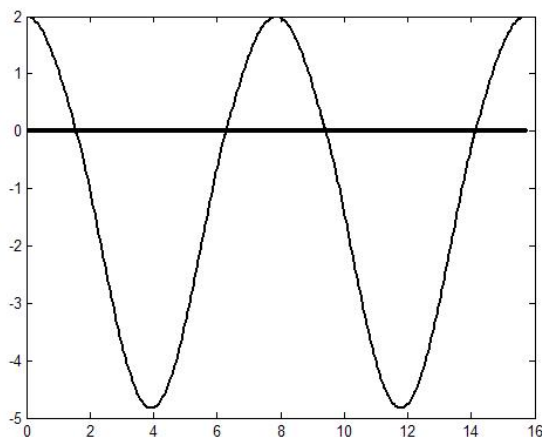


Рис. 4. Розв'язок задачі Коші  $y(t)$  (18) при  $\varepsilon = -1$  на інтервалі  $[0, 5\pi]$ .

**Зауваження 2.** У випадку рівняння (16) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  розв'язок (17) задачі Коші є  $2\pi$  періодичним, а при  $\varepsilon \rightarrow -0$  розв'язок (18) є  $4\pi$  періодичним.

Якщо зовнішня сила  $f(t)$  у рівнянні (9) є періодичною і достатньо великою, тоді у рівнянні можуть з'явитись періодичні розв'язки, що описують вимушені коливання з періодом зовнішньої сили.

**Теорема 6.** Нехай у рівнянні

$$y'' + y = \text{sign } y + \varepsilon \sin \omega t \quad (19)$$

частота  $\omega > 1$ . Якщо амплітуда  $\varepsilon$  зовнішньої сили задовольняє умову

$$\varepsilon > \frac{\omega^2 - 1}{\omega} \tan \frac{\pi}{2\omega}, \quad (20)$$

то для рівняння (19) існує періодичний розв'язок з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  вигляду

$$y(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin \omega t + y_0(t; T), \quad (21)$$

де функція  $y_0(t; T)$  має по  $t$  період  $T$ , є непарною по  $t$  і на інтервалі  $t \in (0, \frac{T}{2})$  має вигляд

$$y_0(t; T) = \frac{\sin t - \sin(t - T)}{\sin \frac{T}{2}} - 1. \quad (22)$$

**Доведення.** Функція  $y_0(t; T)$  вигляду (22) є розв'язком рівняння

$$y_0'' + y_0 = -\text{sign}(\sin \omega t).$$

Крім того, функція  $y(t)$  із (21) приймає від'ємні значення на інтервалі  $t \in (0, \frac{T}{2})$  в силу умов (20). Тому функція  $y(t)$  є розв'язком рівняння (19). Теорема 6 доведена.

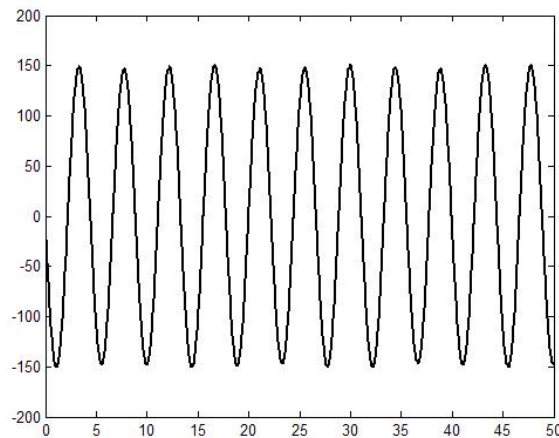


Рис. 5. Періодичний розв'язок рівняння (19) при  $\varepsilon = 150, \omega = \sqrt{2}$ .

У випадку, коли амплітуда  $\varepsilon$  зовнішньої сили може бути малою, наприклад, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то характер розв'язків рівняння (19) залежить від природи числа  $\omega$ .

**Теорема 7.** Нехай  $\omega > 1$ , а період  $T = \frac{\omega}{2\pi}$  є неспіврозмірний з числом  $\pi$ , тобто числа  $\sin \omega n \pi \neq 0$  при всіх цілих  $n > 0$ . Тоді для довільного скінченного інтервалу  $[0, t_0]$  існує  $\varepsilon_0$  таке, що при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  існує розв'язок  $y(t; \varepsilon)$  рівняння (19) на інтервалі  $t \in [0, t_0]$  для всіх  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  і цей розв'язок при  $\varepsilon \rightarrow +0$  має границею розв'язок  $y(t; 0)$  типу 3 із теореми 2 з ізольованими кратними нулями в точках  $t = 2n\pi \in [0, t_0]$ , де знаки розв'язку  $y(t; 0)$  на інтервалах  $I_n = (2n\pi, 2(n+1)\pi)$ ,  $n > 0$  визначаються знаками чисел  $\alpha_n = -\text{sign} \sin 2\omega n \pi$  і  $y(t) < 0$  при  $t \in I_0$ .

Доведення ґрунтується на таких лемах.

**Лема 1.** Нехай у рівнянні (19)  $\omega > 1$  – фіксоване. Тоді існує таке  $\varepsilon_1 > 0$ , що при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  функція

$$y_1(t) = -(1 - \cos t) - \frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega t) \quad (23)$$

є розв'язком рівняння (19) при  $t \in (0, \pi) = I_0$ .

**Доведення.** Функція  $-(1 - \cos t)$  на інтервалі  $I_0$  спадає і змінюється від нуля при  $t = 0$  до  $-2$  при  $t = \pi$ . Функція  $-\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega t)$  приймає від'ємні значення при  $\varepsilon > 0$  і  $t \in (0, \frac{\pi}{2\omega}) = I_1$ , тому на інтервалі  $I_1$  функція  $y_1(t)$  приймає від'ємні значення. Оскільки функція  $-\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega t)$  за модулем не перевищує  $\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1}$ , то при

$$\varepsilon_1 = (1 - \cos(\frac{\pi}{2\omega}))(\omega^2 - 1) \quad (24)$$

і  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  функція  $y_1(t)$  із (23) приймає від'ємні значення на інтервалі  $I_0$ , але тоді на цьому інтервалі вона є розв'язком рівняння (19). Лема 1 доведена.

**Лема 2.** Нехай виконуються умови теореми 7. Для довільного інтервалу  $(0, L)$  існує  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$  таке, що розв'язок  $y_1(t)$  вигляду (23) однозначно продовжується по  $t$  на інтервал  $(0, t_0)$  як розв'язок рівняння (19) при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , всі нулі прості, а знак похідної у кожному нулі не залежить від  $\varepsilon$ .

**Доведення.** На інтервалі  $(0, t_0)$  існує скінченне число точок вигляду  $2n\pi$ ,  $(n = 1, \dots, k)$ . В цих точках за умовою теореми 7, числа  $\sin(2\omega n\pi) = \alpha_n$  відмінні від нуля. В силу неперервності функції  $\sin(\omega t)$  існує таке  $\delta$  і число  $\alpha > 0$ , що при  $|t - 2n\pi| < \delta$  для всіх  $n = 1, \dots, k$  виконується  $|\sin(t - 2n\pi)\omega| \geq \alpha$ . Будемо продовжувати розв'язок (23) поступово на все більші інтервали, поки не вичерпаємо весь інтервал  $(0, t_0)$ . Вираз (23) є розв'язком рівняння (19) до першого нуля після  $t = 0$ .

Оскільки при  $\varepsilon \rightarrow 0$  у функції  $y(t)$  вигляду (23) найменший нуль  $t_1(\varepsilon) \neq 0$  має границю  $2\pi$ , то існує додатне  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  таке, що  $|t_1(\varepsilon) - 2\pi| < \delta$  при всіх  $\varepsilon < \varepsilon_2$ . В силу визначення  $\delta$  маємо наступну оцінку

$$\left| \frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega t_1(\varepsilon)) \right| > \frac{\alpha \varepsilon}{\omega^2 - 1}. \quad (25)$$

Якщо число  $-\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega 2\pi)$  – від'ємне, то функція (23) приймає від'ємні значення на інтервалі  $(0, 3\pi)$  при всіх  $\varepsilon < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$ , де  $\varepsilon_3 = \frac{\omega^2 - 1}{\alpha} (1 - \cos(\omega \delta))$ . Але тоді вираз (23) є розв'язком рівняння (19) на інтервалі  $(0, 3\pi)$  при всіх  $\varepsilon < \varepsilon_3$ . Якщо число  $-\frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega 2\pi)$  – додатне, то у функції (23) є нуль  $t_1(\varepsilon) < 2\pi$ , а вираз (23) є розв'язком рівняння (19) лише на інтервалі  $(0, t_1(\varepsilon))$ .

Довизначимо вираз (23) на інтервалі  $(t_1(\varepsilon), 3\pi)$  наступним чином

$$y_2(t) = 1 - \cos(t - t_1) + \sin t_1 \sin(t - t_1) - \frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1} \sin(\omega t). \quad (26)$$

Легко бачити, що існує  $\varepsilon_4 < \varepsilon_3$  таке, що вираз (26) приймає додатні значення при  $t \in (t_1(\varepsilon), 3\pi)$  для всіх  $\varepsilon < \varepsilon_4$ . Тому вираз (26) є розв'язком рівняння (19) на інтервалі  $(t_1(\varepsilon), 3\pi)$ . Таким чином, побудовано продовження розв'язку (23) на весь інтервал  $(0, 3\pi)$ . Далі міркування потрібно повторити. Розв'язок (23), продовжений у вигляді (26), буде розв'язком рівняння (19) до першого нуля  $t_2(\varepsilon)$  виразу (26). Цей нуль  $t_2(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  прямує до  $4\pi$ . На інтервалі  $(0, t_2(\varepsilon))$  вираз (23), продовжений

виразом (26), є розв'язком рівняння (19). При малих  $\varepsilon$  він лежить в  $\delta$ -околі точки  $4\pi$ . Продовження розв'язку через нуль  $t_2(\varepsilon)$  можна виконати аналогічно до продовження розв'язку через нуль  $t_1(\varepsilon)$ . За скінченне число  $k$  шагів так будується продовження на весь інтервал  $(0, L)$ . Лема 2 доведена.

**Доведення теореми 7.** На основі леми 2 побудований розв'язок задовольняє твердження теореми. Легко бачити, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  цей розв'язок на кожному із інтервалів  $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ ,  $n = 1, \dots, k$  співпадає з функцією  $\pm(1 - \cos t)$ , де знак визначається знаком числа  $-\sin(2\omega n\pi)$ . Теорема 7 доведена.

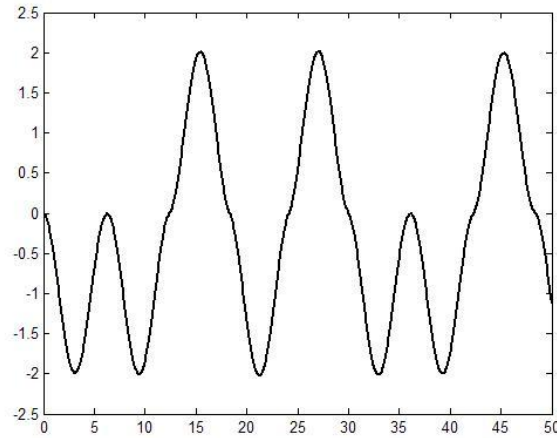


Рис. 6. Розв'язок рівняння (19) при  $\omega = \sqrt{2}$  і  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

## Література

- [1] *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 301 с.
- [2] *Самойленко А. М., Рунто Н. Й.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Выща школа, 1976. – 178 с.

- [3] *Samoilenko A. M., Petryshyn R.* Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 317 p.
- [4] *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.
- [5] *Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V.* Elements of Mathematical Theory of Evolutionary Equations in Banach Spaces / World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Vol. 86. – World Scientific, 2013. – 408 pp.
- [6] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща школа, 1987. – 288 с.
- [7] *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
- [8] *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 385 с.
- [9] *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Хаотические и стохастические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
- [10] *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: Институт математики НАН Украины, 2007. – 427 с.
- [11] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука. 1985. – 224 с.
- [12] *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука. 1981. – 368 с.
- [13] *Самойленко А. М., Нижник И. Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 517–554.
- [14] *Самойленко А. М., Нижник И. Л.* Обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з модельною бістійкою нелінійністю // Укр. мат. вісник. – 2009. – 6, № 3. – С. 400–424.
- [15] *Нижник И. Л., Краснеева А. О.* Періодичні розв'язки рівнянь другого порядку з розривною нелінійністю // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 3. – С. 381–389.

- 
- [16] Павленко В. Н., Федяшев М. С. Периодические решения параболического уравнения с однородным граничным условием Дирихле и разрывной нелинейностью линейного роста // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1080–1088.
- [17] *Kamachkin A., Potapov D., Yevstafyeva V.* Solutions to second order differential equations with discontinuous right-hand side // Electronic J. Diff. Eq. – 2014. – No. 221. – P. 1–6.
- [18] *Kamachkin A., Potapov D., Yevstafyeva V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electronic J. Diff. Eq. – 2016. – No. 4. – P. 1–8.
- [19] *Kamachkin A., Potapov D., Yevstafyeva V.* Existence of solutions for second order differential equations with discontinuous right-hand side // Electronic J. Diff. Eq. – 2016. – No. 124. – P. 1–9.