Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 256–273

УДК 517.927

О. О. Мурач, В. О. Солдатов

(Інститут математики НАН України, Київ)

Критерій неперервності за параметром розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь вищих порядків

murach@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

We consider the most extensive class of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of order $r \geq 1$ whose solutions run through the complex normed space of $n+r$ times continuously differentiable functions on a compact interval, with $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. The boundary conditions can contain derivatives $z^{(l)}$, with $r \leq l \leq n+r$, of the solution z to the system. For parameter-dependent problems from this class, we obtain a constructive criterion under which their solutions are continuous with respect to the parameter in this normed space.

Досліджено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$, розв'язки яких пробігають комплексний нормований простір $n+r$ разів неперервно диференційовних функцій на відрізку, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Крайові умови можуть містити похідні $z^{(l)}$, де $r \leq l \leq n+r$, розв'язку z системи. Для залежних від параметра задач з цього класу, отримано конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у цьому нормованому просторі.

1. Вступ

У теорії звичайних диференціальних рівнянь важливе місце належить питанням про обґрунтування граничного переходу у задачах Коші і крайових задачах, залежних від параметра. У роботах І. І. Гіхмана [1], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [2], Я. Курцвейля і З. Ворела [3], А. М. Самойленка [4, 5] встановлено фундаментальні результати про неперервну залежність від параметра розв'язків задач Коші для нелінійних систем. А. Ю. Левіним [6, 7], З. Опялем [8], В. Т. Рейдом [9] і Нгуен Тхе Хоаном [10] ці результати були уточнені та доповнені для лінійних систем.

Для крайових задач зазначені питання досліджені менш повно, що пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Тут піонерськими є роботи І. Т. Кігурадзе [11 – 13] і М. Ашордіа [14], у яких виділено і досліджено клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язки y останніх припускаються абсолютно неперервними на відрізку $[a, b]$, а крайові умови задані у вигляді $By = q$, де $B : C([a, b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор (m — число рівнянь у системі). У вказаних роботах встановлено умови, за яких розв'язки цих крайових задач є неперервними за параметром у нормованому просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Недавно ці результати були уточнені і узагальнені для комплекснозначних функцій та систем диференціальних рівнянь вищих порядків у роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк і Г. О. Чеханової [15 – 18].

Інші широкі класи лінійних крайових задач були введені та досліджені у роботах [19 – 21] і [22 – 24]. Ці класи тісно пов'язані з класичними шкалами відповідно функціональних просторів Соболєва і просторів $C^{(l)}$ неперервно диференційовних функцій. Крайові умови для задач з цих класів задано у вигляді $By = q$, де B є довільний неперервний оператор, що діє з відповідного функціонального простору у скінченновимірний комплексний простір. Такі крайові задачі названі тотальними щодо вказаного функціонального простору. Для їх розв'язків встановлено конструктивні достатні умови неперервної залежності за параметром у відповідних просторах. Ці результати були застосовані до дослідження багатоточкових крайових задач [25–29], матриць Гріна крайових задач [17, 18, 30, 31], у спектральній теорії диференціальних операторів із сингулярними коефіцієнтами [32–35].

Зокрема [24], другим автором цієї статті для систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ був введений і досліджений клас тотальних крайових задач щодо функціонального комплексного простору $C^{(n+r)}$, де ціле $n \geq 0$. (Випадок $r = 1$ вивчений раніше В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [22, 23].) Припускається, що усі коефіцієнти і праві частини цих систем належать до простору $(C^{(n)})^m$. Враховуючи, що розв'язки z кожної такої системи пробігають увесь простір $(C^{(n+r)})^m$, крайова умова задається у вигляді $Bz = q$, де $B : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ є довільний лінійний неперервний оператор, а вектор $q \in \mathbb{C}^{rm}$. Ця умова охоплює як усі класичні типи крайових умов (початкові умови задачі Коші, багатоточкові та інтегральні крайові умови), так і некласичні крайові умови, які містять похідні $z^{(l)}$ шуканої функції, порядок яких задовольняє нерівність $r \leq l \leq n + r$. Отже, введений клас лінійних крайових задач є найбільш широким для систем, розв'язки яких пробігають увесь простір $(C^{(n+r)})^m$.

У вказаній статті [24, теорема 3] встановлено конструктивні достатні умови, за яких розв'язок крайової задачі, тотальної щодо простору $(C^{(n+r)})^m$, неперервно залежить у ньому від параметра. Основна мета цієї роботи — показати, що встановлені умови є також і необхідними, тобто довести критерій неперервної залежності за параметром розв'язку цієї задачі у просторі $(C^{(n+r)})^m$. Окрім того, буде показано, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок.

Ця робота складається з п'яти пунктів. Пункт 1 є вступ. У п. 2 для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ наведено постановку крайової задачі, тотальної щодо простору $C^{(n+r)}$, де ціле $n \geq 0$. Припускається, що ця задача залежить від параметра. У п. 3 сформульовано результати роботи — основну теорему про критерій неперервності за параметром розв'язку досліджуваної задачі і теорему про оцінку похибки її розв'язку. Ці теореми доведено у п. 4. В останньому п. 5 наведено висновки до роботи.

2. Постановка задачі

Виберемо довільним чином (скінченний) відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ та цілі числа $n \geq 0$, $r \geq 1$ і $m \geq 1$. Будемо використовувати комплексні банахові простори

$$\begin{gathered} (C^{(l)})^m := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C}^m), \\ (C^{(l)})^{m\times m} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}), \end{gathered} \tag{1}$$

де ціле $l \geq 0$. Вони складаються відповідно з усіх вектор-функцій та матриць-функцій порядку m, елементи яких належать до простору $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$ усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$. Цей простір наділений нормою

$$\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : \, t \in [a,b]\bigr\}.$$

Норми у просторах (1) означаються як суми норм у $C^{(l)}$ усіх компонент вектор-функцій чи матриць-функцій і позначаються також через $\|\cdot\|_{(l)}$. З контексту завжди буде зрозуміло, у якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій або матриць-функцій) розглядається норма $\|\cdot\|_{(l)}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо таку лінійну крайову задачу, залежну від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$:

$$\begin{gathered} L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon) z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \\ a \leq t \leq b, \end{gathered} \tag{2}$$

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут для кожного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ є шуканою вектор-функція $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ і довільним чином задані матричні функції $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, де $j = 1\ldots r$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$, лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon) : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm} \tag{4}$$

та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$. При цьому у роботі вектори інтерпретуємо як стовпці.

Крайова умова (3) з неперервним оператором (4) є найбільш загальною для системи диференціальних рівнянь (2), бо її права частина $f(\cdot,\varepsilon)$ пробігає увесь простір $(C^{(n)})^m$ тоді і тільки тоді, коли розв'язок $z(\cdot,\varepsilon)$ цієї системи пробігає увесь простір $(C^{(n+r)})^m$. Цю крайову задачу називаємо тотальною щодо простору $C^{(n+r)}$.

3. Результати

Пов'яжемо із крайовою задачею (2), (3) лінійний неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) : (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{5}$$

Оператор (5) є фредгольмовим з індексом нуль для кожного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, бо цей оператор є скінченновимірним збуренням ізоморфізму, що діє у парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}$ та відповідає задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (2) (див. детальніше [24, теорема 1]).

Для крайової задачі (2), (3) розглянемо такі чотири

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot,0)$ у просторі $(C^{(n)})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1\ldots r\}$;

(II) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$;

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ у просторі $(C^{(n)})^m$;

(IV) $q(\varepsilon) \to q(0)$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$.

Розглядається ще така

Умова (0). Гранична однорідна крайова задача

$$L(0)\,z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \quad \text{та} \quad B(0)\,z(\cdot,0) = 0 \tag{6}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Конструктивний критерій того, що задача (6) задовольняє умову (0) встановлено в [24, теорема 2]. Цей критерій сформульовано у термінах матриць $K_{r-j}(\cdot,0)$ і оператора $B(0)$.

Сформулюємо тепер наше

Базове означення. Говоримо, що розв'язок крайової задачі (2), (3) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі дві умови:

($*$) Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.

($**$) Граничні умови (III) і (IV) тягнуть за собою збіжність

$$z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) \quad \text{в} \quad \bigl(C^{(n+r)}\bigr)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{7}$$

Основна теорема. *Розв'язок крайової задачі* (2), (3) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *і* (II).

Основну теорему доповнює такий результат.

Теорема про оцінку похибки. *Нехай крайова задача* (2), (3) *задовольняє умову* (0) *і граничні умови* (I) *і* (II). *Тоді існують* *додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка*

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 \big(\|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}} \big) \\ &\quad \leq \|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{(n+r)} \\ &\quad \leq \varkappa_2 \big(\|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}} \big). \end{aligned} \tag{8}$$

Тут числа ε_2, $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ не залежать від функцій $z(\cdot,0)$, $z(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ і вектора $q(\varepsilon)$.

Згідно з нерівністю (8), похибка і нев'язка розв'язку $z(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (2), (3) мають однаковий порядок. При цьому $z(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

Ці теореми будуть доведені у наступному розділі.

З огляду на основну теорему зауважимо, що лінійний неперервний оператор (4) єдиним чином зображається у такому вигляді:

$$B(\varepsilon)z = \sum_{k=1}^{n+r} \beta_k(\varepsilon)\, z^{(k-1)}(a) + \int\limits_a^b (d\Phi(t,\varepsilon)) z^{(n+r)}(t) \tag{9}$$

для довільної вектор-функції $z \in (C^{(n+r)})^m$. Тут кожне $\beta_k(\varepsilon)$ є числовою матрицею вимірності $rm \times m$, а $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ є матрицею-функцією вимірності $rm \times m$, складеною із скалярних функцій обмеженої варіації на $[a,b]$, неперервних справа на (a,b) та рівних нулю у точці $t = a$. (Звісно, тут інтеграл розуміється за Ріманом-Стільтьєсом.) Зображення (9) є наслідком відомого опису простору, спряженого до $C^{(n+r)}$; див., наприклад, [36, с. 374]. Використовуючи (9), можемо переписати граничну умову (II) у явній формі. А саме, гранична умова (II) при $\varepsilon \to 0+$ еквівалентна виконанню таких чотирьох умов:

(2а) $\beta_k(\varepsilon) \to \beta_k(0)$ для кожного номера $k \in \{1, \dots, n+r\}$;

(2б) $\|V_a^b \Phi(\cdot,\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm \times m}} = O(1)$;

(2в) $\Phi(b,\varepsilon) \to \Phi(b,0)$;

(2г) $\int_a^t \Phi(s,\varepsilon)ds \to \int_a^t \Phi(s,0)ds$ для кожного $t \in (a,b]$.

(Звісно, збіжність розглядається у просторі $\mathbb{C}^{rm\times m}$.) Така еквівалентність є наслідком критерію Ф. Ріса слабкої збіжності лінійних функціоналів на $C^{(0)}$ (див., наприклад, [37, с. 136]). Корисно порівняти ці умови з критерієм збіжності операторів $B(\varepsilon) \to B(0)$ за нормою при $\varepsilon \to 0+$. Він стверджує, що ця збіжність за нормою еквівалентна виконанню умов (2а) і

$$V_a^b\bigl(\Phi(\cdot,\varepsilon) - \Phi(\cdot,0)\bigr) \to 0 \tag{10}$$

при $\varepsilon \to 0+$. Умова (10) є більш сильною, ніж система умов (2б) – (2г). Справді, з умови (10) випливає рівномірна збіжність функцій $\Phi(t,\varepsilon)$ до $\Phi(t,0)$ на $[a,b]$ при $\varepsilon \to 0+$, тоді як з умов (2б) – (2г) не випливає поточкова збіжність цих функцій хоча б в одній точці інтервалу (a,b).

4. Доведення

Доведемо основну теорему і теорему про оцінку похибки.

Доведення основної теореми. Достатність системи умов (0), (I) та (II) для того, щоб крайова задача (2), (3) задовольняла базове означення доведена у статті [24, теорема 3]. Доведемо необхідність цих умов. Припускаємо, що ця задача задовольняє базове означення. Тоді виконується умова (0). Залишається довести, що для цієї задачі виконуються умови (I) та (II). Проведемо міркування у три кроки.

Крок 1. Доведемо тут, що крайова задача (2), (3) задовольняє граничну умову (I). Зведемо цю задачу до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього, як звичайно, покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\bigl(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \ldots, z^{(r-1)}(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (C^{(n+1)})^{rm},$$
$$g(\cdot,\varepsilon) := \mathrm{col}\bigl(0, f(\cdot,\varepsilon)\bigr) \in (C^{(n)})^{rm},$$

та

$$A(\cdot,\varepsilon) := \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & I_m \\ K_0(\cdot,\varepsilon) & K_1(\cdot,\varepsilon) & K_2(\cdot,\varepsilon) & \ldots & K_{r-1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де O_m й I_m позначають відповідно нульову та одиничну матриці порядку m. Зауважимо, що $A(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{rm\times rm}$. Окрім того, з огляду на зображення (9) покладемо

$$\begin{aligned} N(\varepsilon)y := \sum_{k=1}^{r-1} \beta_k(\varepsilon) y_k(a) + \sum_{k=r}^{n+r} \beta_k(\varepsilon) y_r^{(k-r)}(a) + \\ + \int_a^b (d\Phi(t,\varepsilon)) y_r^{(n+1)}(t) \end{aligned} \tag{11}$$

для довільної вектор-функції $y = \operatorname{col}(y_1,\ldots,y_r)$, де $y_1,\ldots,y_r \in (C^{(n+1)})^m$. Лінійне відображення $y \mapsto Ny$ діє неперервно з простору $(C^{(n+1)})^{rm}$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$.

Очевидно, що функція $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ є розв'язком крайової задачі (2), (3) тоді і тільки тоді, коли функція $y(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b, \tag{12}$$

$$N(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{13}$$

За умовою $(*)$ базового означення ця задача має єдиний розв'язок $y(t,\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$. Гранична умова (I) еквівалента тому, що $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ у просторі $(C^{(n)})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Доведемо цю збіжність.

Зауважимо попередньо таке: якщо $g(\cdot,\varepsilon)$ і $q(\varepsilon)$ не залежать від $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, то $z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0)$ в $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon \to 0+$ за умовою (∗∗) базового означення. Остання збіжність еквівалента тому, що $y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0)$ в $(C^{(n+1)})^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$.

Для кожного числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = 0 \cdot I_{rm}, \quad a \le t \le b, \tag{14}$$

$$[N(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] = I_{rm}. \tag{15}$$

Тут шуканою є матриця-функція $Y(\cdot,\varepsilon) := (y_{j,k}(\cdot,\varepsilon))_{j,k=1}^{rm}$ з простору $(C^{(n+1)})^{rm\times rm}$ і, за означенням,

$$[N(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)] := \left(N(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ y_{rm,1}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \ \ldots \ N(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_{1,rm}(\cdot,\varepsilon) \\ \vdots \\ y_{rm,rm}(\cdot,\varepsilon) \end{pmatrix} \right).$$

Задача (14), (15) є сукупністю rm крайових задач (12), (13), праві частини яких не залежать від ε. Тому вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+1)})^{rm\times rm}$, і він задовольняє умову

$$Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n+1)})^{rm\times rm} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{16}$$

Окрім того,

$$\det Y(t,\varepsilon) \neq 0 \quad \text{для кожного} \quad t \in [a,b]. \tag{17}$$

Справді, у противному разі функції, що є стовпцями матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ були б лінійно залежними, що суперечило б крайовій умові (15).

Тепер на підставі формул (16) і (17) отримаємо потрібну збіжність

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0)$$

у просторі $(C^{(n)})^{rm\times rm}$ при $\varepsilon \to 0+$. Звідси негайно випливає, що

$$\begin{gathered} \|K_{r-j}(\varepsilon)\|_{(n)} = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \\ \text{для кожного номера} \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Крок 2. Доведемо, що

$$\|B(\varepsilon)\| = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{19}$$

Тут $\|\cdot\|$ позначає норму обмеженого оператора, що діє з простору $(C^{(n+r)})^m$ у простір $\mathbb{C}^{rm}$.

Припустимо супротивне; тоді існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{20}$$

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо функцію $w_k \in (C^{(n+r)})^m$ таку, що

$$\|w_k\|_{(n+r)} = 1 \quad \text{і} \quad \|B(\varepsilon^{(k)})w_k\|_{\mathbb{C}^{rm}} \geq \|B(\varepsilon^{(k)})\|/2. \tag{21}$$

Покладемо

$$\begin{gathered}
z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}\, w_k \in (C^{(n+r)})^m, \\
f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in (C^{(n)})^m, \\
q(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \in \mathbb{C}^{rm}.
\end{gathered}$$

Враховуючи співвідношення (20), (21), маємо збіжність

$$z(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{(n+r)})^m \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{22}$$

Звідси

$$f(\cdot, \varepsilon^{(k)}) \to 0 \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{23}$$

оскільки крайова задача (2), (3) задовольняє граничну умову (I), як було показано на кроці 1. Окрім того, на підставі (21) маємо двобічну оцінку

$$1/2 \leq \|q(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq 1 \quad \text{для кожного} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому існує підпослідовність $(q(\varepsilon^{(k_p)}))_{p=1}^{\infty} \subset (q(\varepsilon^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ та ненульовий вектор $q(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ такі, що

$$q(\varepsilon^{(k_p)}) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{24}$$

Отже, для кожного номера p функція $z(\cdot,\varepsilon^{(k_p)})\in(C^{(n+r)})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k_p)})\,z(t,\varepsilon^{(k_p)})=f(t,\varepsilon^{(k_p)}),\quad a\le t\le b,$$
$$B(\varepsilon^{(k_p)})\,z(\cdot,\varepsilon^{(k_p)})=q(\varepsilon^{(k_p)}).$$

Тому на підставі формул (23) і (24) та умови $(**)$ базового означення робимо висновок, що функція $z(\cdot,\varepsilon^{(k_p)})$ збігається до єдиного розв'язку $z(\cdot,0)$ граничної крайової задачі

$$L(0)z(t,0)=0,\quad a\le t\le b,\qquad \text{і}\qquad B(0)z(\cdot,0)=q(0).$$

Ця збіжність виконується у просторі $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon\to0+$. Отже, $z(\cdot,0)\equiv0$ згідно з формулою (22). Ця рівність суперечить крайовій умові $B(0)z(\cdot,0)=q(0)$, де $q(0)\neq0$. Таким чином, зроблене припущення є хибним, чим і доведено (19).

Крок 3. Доведемо, що крайова задача (2), (3) задовольняє граничну умову (II). На підставі формул (18) і (19) існують числа $\varkappa'>0$ і $\varepsilon'\in(0,\varepsilon_1)$ такі, що

$$\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\|\le\varkappa'\quad\text{для кожного}\quad\varepsilon\in[0,\varepsilon'). \tag{25}$$

Тут $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\|$ позначає норму обмеженого оператора (5). Виберемо довільним чином функцію $z\in(C^{(n+r)})^m$ та покладемо $f(\cdot,\varepsilon):=L(\varepsilon)z$ і $q(\varepsilon):=B(\varepsilon)z$ для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon')$. Отже,

$$z=(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon))\quad\text{для кожного}\quad\varepsilon\in[0,\varepsilon'). \tag{26}$$

Тут, звісно, $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}$ позначає оператор, обернений до (5). (Нагадаємо, що оператор (5) оборотний за умовою $(*)$ базового означення.)

Застосовуючи формули (25) і (26), отримаємо при $0<\varepsilon<\varepsilon'$

таке:

$$
\begin{aligned}
&\big\|B(\varepsilon)z - B(0)z\big\|_{\mathbb{C}^{rm}} \leq \\
&\leq \big\|(f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),q(0))\big\|_{(C^{n})^{m}\times\mathbb{C}^{rm}} = \\
&= \big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon)) - \\
&\quad -(f(\cdot,0),q(0))\big)\big\|_{(C^{(n)})^{m}\times\mathbb{C}^{rm}} \\
&\leq \varkappa'\,\big\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}\big((f(\cdot,\varepsilon),q(\varepsilon)) - (f(\cdot,0),q(0))\big)\big\|_{(n+r)} \\
&= \varkappa'\,\big\|(L(0),B(0))^{-1}(f(\cdot,0),q(0)) - \\
&\quad -(L(\varepsilon),B(\varepsilon))^{-1}(f(\cdot,0),q(0))\big\|_{(n+r)} \to 0
\end{aligned}
$$

при $\varepsilon \to 0+$ на підставі умови $(**)$ базового означення. Таким чином, оскільки функція $y \in (C^{(n+r)})^{m}$ вибрана довільно, доведено, що крайова задача (2), (3) задовольняє граничну умову (II).

Основна теорема доведена.

Доведення теореми про оцінку похибки. Спочатку доведемо ліву частину оцінки (8). Граничні умови (I) і (II) тягнуть за собою сильну збіжність операторів $(L(\varepsilon),B(\varepsilon)) \to (L(0),B(0))$ при $\varepsilon \to 0+$. Тут, як і раніше, $(L(\varepsilon),B(\varepsilon))$, де $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, є обмеженим оператором, що діє з простору $(C^{(n+r)})^{m}$ у простір $(C^{(n)})^{m} \times \mathbb{C}^{rm}$. Тому існують числа $\varkappa' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що норма цього оператора задовольняє нерівність (25). Справді, у противному разі існувала б послідовність додатних чисел $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\|(L(\varepsilon^{(k)}),B(\varepsilon^{(k)}))\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Це з огляду на теорему Банаха-Штейнгауза суперечило б вказаній вище сильній збіжності операторів. Тепер на підставі нерівності (25) робимо висновок, що

$$
\begin{aligned}
&\|L(\varepsilon)z(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon)z(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}} = \\
&= \|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))(z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon))\|_{(C^{(n)})^{m}\times\mathbb{C}^{rm}} \leq \\
&\leq \varkappa'\,\|z(\cdot,0) - z(\cdot,\varepsilon)\|_{(n+r)}
\end{aligned}
$$

для довільного $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$. Отримали ліву частину двобічної оцінки (8), де $\varkappa_1 := 1/\varkappa'$.

Доведемо тепер праву частину цієї оцінки. Згідно з основною теоремою, крайова задача (2), (3) задовольняє базове означення. Тому оператор (5) є оборотним для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Більше того, оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$, обернений до (5), збігається сильно до $(L(0), B(0))^{-1}$ при $\varepsilon \to 0+$. Справді, для довільних $f \in (C^n)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$ за умовою (∗∗) базового означення маємо збіжність

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, q) =: z(\cdot, \varepsilon) \to z(\cdot, 0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, q)$$

у просторі $(C^{(n+r)})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Отже, існують додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon'$ і $\varkappa_2$ такі, що норма оберненого оператора $\|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}\| \leq \varkappa_2$ для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$. Це випливає із теореми Банаха-Штейнгауза за допомогою міркувань, аналогічних наведеним у попередньому абзаці. Тому для довільного числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2)$ правильні такі співвідношення:

$$\begin{gathered}
\|z(\cdot, 0) - z(\cdot, \varepsilon)\|_{(n+r)} = \\
= \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(z(\cdot, 0) - z(\cdot, \varepsilon))\|_{(n+r)} \leq \\
\leq \varkappa_2 \, \|(L(\varepsilon), B(\varepsilon))(z(\cdot, 0) - z(\cdot, \varepsilon))\|_{(C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}} = \\
= \varkappa_2 \left(\|L(\varepsilon) z(\cdot, 0) - f(\cdot, \varepsilon)\|_{(n)} + \|B(\varepsilon) z(\cdot, 0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^{rm}} \right).
\end{gathered}$$

Отримали праву частину двобічної оцінки (8).

Теорема про оцінку похибки доведена.

5. Висновки

У роботі досліджено залежні від параметра лінійні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$. Припускається, що ці задачі є тотальними щодо нормованого простору $C^{(n+r)}$, де ціле $n \geq 0$. Вони утворюють найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем, розв'язки яких пробігають $C^{(n+r)}$. Для таких задач доведено критерій неперервної залежності від параметра їх розв'язків у просторі $C^{(n+r)}$ (основна теорема роботи). Доведено також, що похибка і нев'язка розв'язку мають однаковий порядок у відповідних просторах неперервно диференційовних функцій (теорема про оцінку похибки).

Автори висловлюють подяку В. А. Михайлецю за обговорення роботи.

Література

[1] *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215–219.

[2] *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153.

[3] *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Czechoslovak Math. J. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.

[4] *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 289–298.

[5] *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра // Доповіді АН УРСР. Сер А. – 1962. – № 10. – С. 1290–1293.

[6] *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.

[7] *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.

[8] *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // J. Differential Equations. – 1967. – **3**, No. 4. – P. 571–579.

[9] *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems // J. Differential Equations. – 1967. – **3**, No. 3. – P. 423–439.

[10] *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970—975.

[11] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[12] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[13] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференциальные уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198–209.

[14] *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. – 1996. – **46**, No. 3. – P. 385–404.

[15] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227–239.

[16] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доповіді НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[17] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 70–81.

[18] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, No. 3. – P. 333–342.

[19] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доповіді НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[20] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[21] *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584–591.

[22] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 268–273.

[23] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доповіді НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[24] *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5 – С. 692–700.

[25] *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в класе многоточечных краевых задач // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203–216.

[26] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доповіді НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[27] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260–279.

[28] *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 101–112.

[29] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.

[30] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.

[31] *Пелехата О. Б.* Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 315–326.

[32] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1–2. – P. 287–292.

[33] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations // Methods Funct. Anal. Topology. – 2010. – **16**, No. 2. – P. 120–130.

[34] *Горюнов А. С., Михайлец В. А.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом // Укр. Мат. Журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1190–1205.

[35] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Differential Equations. – 2013. – **2013**, No. 101. – P. 1—16.

[36] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. – Москва: Изд-во иностранной лит., 1962. – 895 с.

[37] *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 592 с.