Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 244–255

УДК 517.927.25

В. М. Молибога

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про кореневі функції дробового оператора Шредінгера з сингулярним потенціалом

molyboga@imath.kiev.ua

We prove a completeness in the Hilbert space $L^2(\mathbb{T})$ of the system of eigenfunctions and associated functions of non-selfadjoint fractional Schrödinger operator $\mathbb{D}^{2s}u+Vu$, $s\in(1/2,1)$, on a circle with singular potential V from the negative Sobolev space $H^{-s}(\mathbb{T})$.

Доведено повноту в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ системи власних та приєднаних функцій несамоспряженого дробового оператора Шредінгера $\mathbb{D}^{2s}u+Vu$, $s\in(1/2,1)$, на колі з сингулярним потенціалом V з негативного простору Соболєва $H^{-s}(\mathbb{T})$.

1. Вступ та основні результати

В роботі у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$, досліджується питання повноти системи власних та приєднаних функцій несамоспряженого дробового оператора Шредінгера:

$$L^2(\mathbb{T}): \qquad \mathrm{S}(V)u\equiv \mathrm{S}u:=\mathbb{D}^{2s}u+Vu, \qquad s\in(1/2,1).$$

Оператор дробового диференціювання $\mathbb{D}^{2s}$ з точністю до множника i^{2s} збігається з похідною Г. Вейля:

$$\mathbb{D}^{2s} := (\mathbb{D}^2)^s, \qquad \mathbb{D}^2 := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathrm{Dom}(\mathbb{D}^2) := H^2(\mathbb{T}).$$

Через $H^t(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{R}$, ми позначаємо простори Соболєва 2-періодичних функцій або узагальнених функцій (розподілів), які визначаються за допомогою коефіцієнтів Фур'є:

$$H^t(\mathbb{T}) := \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k\pi x} \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}) \;\Big|\; \|f\|_{H^t(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$
$$\|f\|^2_{H^t(\mathbb{T})} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2t} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Оператор $\mathbb{D}^{2s}$ адитивно збурюється періодичною комплекснозначною узагальненою функцією

$$V = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{V}(k) e^{i\,k\pi x}$$

з негативного простора Соболєва $H^{-s}(\mathbb{T})$.

Оператор $\mathrm{S}(V)$ коректно визначений в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ як форм-сума. Він m-секторний, має компактну резольвенту, самоспряжений, тоді і тільки тоді, коли потенціал V є дійснозначною періодичною узагальненою функцією [11, 16].

Випадок $s \in \mathbb{N}$ детально вивчено в [14, 15, 9, 12], оператори в негативних просторах досліджено в [8]. Стосовно випадку $s = 1$ див. [5, 7, 10, 1, 3, 2] та бібліографію там.

Основним результатом цієї роботи є.

Теорема 1. *Система власних та приєднаних функцій оператора* $\mathrm{S}(V)$ *є повною в гільбертовому просторі* $L^2(\mathbb{T})$.

При $s = 1$ система власних та приєднаних функцій є не тільки повною в $L^2(\mathbb{T})$, але й утворює базис Барі–Маркуса із підпросторів [1]. В роботах [3, 2] знайдено критерії базисності Рісса для системи кореневих функцій в $L^2(\mathbb{T})$. При $s \in [1, \infty)$ повноту в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ системи власних та приєднаних функцій встановлено в [11, 12].

2. Допоміжні відомості та результати

2.1. Простори Соболєва на колі

Будемо позначати скалярний добуток в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ через $(\cdot, \cdot)_{L^2(\mathbb{T})}$:

$$(u, v)_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} u\overline{v} d\, x, \qquad u, v \in L^2(\mathbb{T}).$$

Тоді система $\{e^{i\, k\pi x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ відносно введеного скалярного добутку є ортонормованим базисом в $L^2(\mathbb{T})$. Представимо довільну функцію u з гільбертового простору $L^2(\mathbb{T})$ у вигляді ряду Фур'є

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i\, k\pi x},$$

де коефіцієнти Фур'є визначені наступним чином:

$$\widehat{u}(k) := (u, e^{i\, k\pi x})_{L^2(\mathbb{T})}.$$

За допомогою коефіцієнтів Фур'є скалярний добуток допускає представлення у вигляді ряду

$$(u, v)_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)\overline{\widehat{v}(k)}, \qquad u, v \in L^2(\mathbb{T}).$$

Позначимо через $\mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ простір 2-періодичних узагальнених функцій на колі $\mathbb{T}$, а через $C_2^\infty(\mathbb{T})$ — простір основних функцій — простір 2-періодичних нескінченно диференційовних функцій [13]. Для довільної 2-періодичної узагальненої функції $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ визначимо коефіцієнти Фур'є:

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e^{i\, k\pi x} \rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ позначено півтораліні́йну форму, що є розширенням за неперервністю скалярного добутку в $L^2(\mathbb{T})$. Тоді 2-періодична узагальнена функція $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ може бути представлена у вигляді ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\, k\pi x} \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}).$$

Для довільних $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ і $\varphi \in C_2^\infty(\mathbb{T})$ має місце узагальнена рівність Парсеваля–Стєклова:

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{\varphi}(k)}.$$

Простори Соболєва $H^t(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{R}$, 2-періодичних функцій або узагальнених функцій (розподілів) ми визначаємо за допомогою коефіцієнтів Фур'є:

$$H^t(\mathbb{T}) = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\, k\pi x} \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}) \,\Big|\, \|f\|_{H^t(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$

$$\|f\|^2_{H^t(\mathbb{T})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2t} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Очевидно, що простори $H^0(\mathbb{T})$ і $L^2(\mathbb{T})$ збігаються.

Періодична узагальнена функція $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ є дійснозначною тоді і тільки тоді, коли

$$\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Як добре відомо,

$$\mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}) = \bigcup_{t \geqslant 0} H^{-t}(\mathbb{T}), \qquad \varphi \in C_2^\infty(\mathbb{T}) = \bigcap_{t \geqslant 0} H^t(\mathbb{T}).$$

Далі, для довільних двох 2-періодичних узагальнених функцій u та v їх добуток $u \cdot v$ формально ми визначимо наступним чином:

$$u \cdot v := \sum_{k, j \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k - j) \widehat{v}(j) e^{i\, k\pi x}.$$

Наступний відомий результат дає достатні умови існування такого добутку.

Лема 2 (про згортку [14])**.** *Нехай $s, r \geqslant 0$ і $t \leqslant \min(s, r)$.*

(I) Якщо $s + r - t > 1/2$, тоді добуток $u \cdot v$ двох довільних 2-періодичних узагальнених функцій, який розглядається як відображення в просторах:

$$(a)\ H^r(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \to H^t(\mathbb{T}), \qquad (b)\ H^{-t}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \to H^{-r}(\mathbb{T}),$$

є неперервним відображенням, при цьому мають місце оцінки:

$$(a)\ \|u \cdot v\|_{H^t(\mathbb{T})} \leqslant C_1(s, r, t)\|u\|_{H^r(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})},$$
$$(b)\ \|u \cdot v\|_{H^{-r}(\mathbb{T})} \leqslant C_2(s, r, t)\|u\|_{H^{-t}(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

(II) Якщо $s + r - t < 1/2$, тоді твердження (I) не виконується.

2.2. Допоміжні оцінки

Лема 3. *Нехай $s \in (1/2, 1)$, $M \geq 1$. Тоді існує така константа $C = C(s) > 0$, що виконується оцінка:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{M + |k|^{2s}\pi^{2s}} \leq C\, M^{-1+\frac{1}{2s}}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{M + |k|^{2s}\pi^{2s}} = \frac{1}{M} + 2\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{M + k^{2s}\pi^{2s}},$$

і

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{M + |k|^{2s}\pi^{2s}} \leq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{M + x^{2s}\pi^{2s}}$$
$$= \frac{M^{\frac{1}{2s}}}{M} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, \frac{x}{M^{\frac{1}{2s}}}}{1 + \left(\frac{x}{M^{1/2s}}\right)^{2s} \pi^{2s}} \leq C\, M^{-1+\frac{1}{2s}}.$$

Лему 3 доведено. $\square$

3. Доведення теореми 1

Теорема 4. *Резольвента* $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ *оператора* $\mathrm{S}(V)$ *є ядерним оператором.*

Введемо позначення

$$\mathcal{B}_R(H^{-s}(\mathbb{T})) \equiv \mathcal{B}_R := \left\{V \in H^{-s}(\mathbb{T}) \,\middle|\, \|V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \leqslant R\right\}, \quad R > 0,$$

і

$$\mathrm{Ext}_M := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}\lambda| \geq \mathrm{Re}\lambda + M\}, \quad M \geq 1.$$

Далі, без втрати загальності, будемо вважати, що

$$\widehat{V}(0) = 0.$$

Твердження 5. *Нехай* $V \in \mathcal{B}_R$. *Існує таке число* $M = M(s, R) \geqslant 1$, *що*

$$\mathrm{Ext}_M \subset \bigcap_{V \in \mathcal{B}_R} \mathrm{Resolv}(\mathrm{S}(V)),$$

і для $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$ *резольвента* $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ *допускає представлення:*

$$\mathrm{R}(\lambda) \equiv \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V)) = \tag{1}$$
$$\mathrm{U}_\lambda |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}} \left(\mathrm{Id} - |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{V} |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{U}_\lambda\right)^{-1} |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}.$$

Тут через U_λ *і* $|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}$ *позначено оператори, які визначаються з полярного представлення*

$$(\lambda - \mathbb{D}^{2s})^{-1} = \mathrm{U}_\lambda \left|(\lambda - \mathbb{D}^{2s})^{-1}\right|,$$

а через $\mathrm{V} := V\cdot$ *позначено оператор множення на 2-періодичну узагальнену функцію* V.

Доведення твердження 5. Знайдемо спершу матричне представлення операторів в (1).

Нехай A оператор, який визначений на просторі 2-періодичних узагальнених функцій $\mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$. Його формальне матричне представлення визначається наступним чином:

$$\begin{gathered}\mathrm{A}=\{\mathrm{A}(k,j)\}_{k,j\in\mathbb{Z}},\\ \mathrm{A}(k,j)=\langle \mathrm{A}\, e^{i\,j\pi x}, e^{i\,k\pi x}\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad k,j\in\mathbb{Z}.\end{gathered}$$

Тоді оператори $\mathbb{D}^{2s}$, $\mathrm{V} := V(x)\cdot$ та $(\lambda-\mathbb{D}^{2s})^{-1}$ мають таке представлення:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^{2s}(k,j)&=\langle \mathbb{D}^{2s}\, e^{i\,j\pi x}, e^{i\,k\pi x}\rangle_{L^2(\mathbb{T})}=|k|^{2s}\pi^{2s}\delta_{kj},\\ \mathrm{V}(k,j)&=\langle V(x)\cdot e^{i\,j\pi x}, e^{i\,k\pi x}\rangle_{L^2(\mathbb{T})}=\widehat{V}(k-j),\\ (\lambda-\mathbb{D}^{2s})(k,j)&=\langle (\lambda-\mathbb{D}^{2s})\, e^{i\,j\pi x}, e^{i\,k\pi x}\rangle_{L^2(\mathbb{T})}=(\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s})\delta_{kj},\end{aligned}$$

і

$$(\lambda-\mathbb{D}^{2s})^{-1}(k,j)=\frac{1}{\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}}\delta_{kj}.$$

Введемо позначення

$$\mathrm{A}(\lambda,V)\equiv \mathrm{A}_\lambda := \left|\lambda-\mathbb{D}^{2s}\right|^{-\frac12}\mathrm{V}\left|\lambda-\mathbb{D}^{2s}\right|^{-\frac12}. \tag{2}$$

Тоді

$$\begin{aligned}|(\lambda-\mathbb{D}^{2s})^{-1}|(k,j)=|(\lambda-\mathbb{D}^{2s})|^{-1}(k,j)&=\frac{1}{|\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}|}\delta_{kj},\\ |\lambda-\mathbb{D}^{2s}|^{-\frac12}(k,j)&=\frac{1}{|\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}|^{\frac12}}\delta_{kj},\\ \mathrm{U}_\lambda(k,j)&=\frac{|\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}|}{\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}}\delta_{kj},\end{aligned}$$

і

$$\mathrm{A}_\lambda(k,j)=\frac{\widehat{V}(k-j)}{|\lambda-|k|^{2s}\pi^{2s}|^{\frac12}|\lambda-|j|^{2s}\pi^{2s}|^{\frac12}}.$$

Лема 6. *Нехай* $V \in \mathcal{B}_R$. *Оператор*

$$\mathrm{A}_\lambda = |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{V} |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}$$

є оператором Гільберта–Шмідта в $L^2(\mathbb{T})$ *і при* $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$ *його норма оцінюється наступним чином* ($C = C(s) > 0$)*:*

$$\|\mathrm{A}_\lambda\|_{\mathrm{HS}} \leq C \|V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} M^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4s}}.$$

Тут через $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ *позначено норму Гільберта–Шмідта.*

Доведення. Введемо позначення $\langle k \rangle := 1 + |k|$ і $v(k) := \langle k \rangle^{-s} \widehat{V}(k)$. Тоді

$$\|v\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}, \qquad v = \{v(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Для норми Гільберта–Шмідта оператора A_λ маємо

$$\begin{aligned} \|\mathrm{A}_\lambda\|_{\mathrm{HS}}^2 &= \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{V}(k-j)|^2}{|\lambda - |k|^{2s}\pi^{2s}||\lambda - |j|^{2s}\pi^{2s}|} \\ &= \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \frac{\langle k-j \rangle^{2s} |v(k-j)|^2}{|\lambda - |k|^{2s}\pi^{2s}||\lambda - |j|^{2s}\pi^{2s}|}. \end{aligned}$$

Враховуючи тепер, що

$$\langle k-j \rangle^{2s} \leq 2^{2s} |k-j|^{2s}, \qquad k \neq j,$$

і

$$|\lambda - |k|^{2s}\pi^{2s}| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(M + |k|^{2s}\pi^{2s} \right), \qquad \lambda \in \mathrm{Ext}_M,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \|\mathrm{A}_\lambda\|_{\mathrm{HS}}^2 &\leq 2^{2s+1} \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \frac{|k-j|^{2s} |v(k-j)|^2}{|M + |k|^{2s}\pi^{2s}||M + |j|^{2s}\pi^{2s}|} \\ &= [m := k-j,\ k = m+j] \\ &= 2^{2s+1} \sum_{m,j \in \mathbb{Z}} \frac{|m|^{2s} |v(m)|^2}{|M + |m+j|^{2s}\pi^{2s}||M + |j|^{2s}\pi^{2s}|}. \end{aligned}$$

Далі, окремо розглянемо випадок $|j| \le \frac{|m|}{2}$ і $|j| > \frac{|m|}{2}$.

(I) Нехай $|j| \le \frac{|m|}{2}$. Тоді

$$|M + |m+j|^{2s}\pi^{2s}| \ge |m+j|^{2s}\pi^{2s} \ge \frac{|m|^{2s}}{2^{2s}}\pi^{2s} \ge |m|^{2s},$$

і отже

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}_\lambda\|^2_{\mathrm{HS}} &\le 2^{2s+1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|v(m)|^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|M+|j|^{2s}\pi^{2s}|}\\ &\overset{L.3(a)}{\le} C\|V\|^2_{H^{-s}(\mathbb{T})}M^{-1+\frac{1}{2s}}.\end{aligned}$$

(II) Нехай тепер $|j| > \frac{|m|}{2}$. Тоді

$$|M + |j|^{2s}\pi^{2s}| \ge |j|^{2s}\pi^{2s} \ge \frac{|m|^{2s}}{2^{2s}}\pi^{2s} \ge |m|^{2s},$$

і

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}_\lambda\|^2_{\mathrm{HS}} &\le 2^{2s+1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|v(m)|^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|M+|m+j|^{2s}\pi^{2s}|}\\ &\overset{L.3(a)}{\le} C\|V\|^2_{H^{-s}(\mathbb{T})}M^{-1+\frac{1}{2s}}.\end{aligned}$$

Таким чином нами доведено, що

$$\|\mathrm{A}_\lambda\|^2_{\mathrm{HS}} \le C\|V\|^2_{H^{-s}(\mathbb{T})}M^{-1+\frac{1}{2s}}, \qquad C > 0,$$

і остаточно

$$\|\mathrm{A}_\lambda\|_{\mathrm{HS}} \le C\|V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}M^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4s}}.$$

Лему 6 доведено. □

Оператор $\lambda - \mathrm{S}(V)$ допускає представлення:

$$\begin{aligned}&\lambda - \mathrm{S}(V) \qquad (3)\\ &= |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{Id} - |\lambda-\mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{V}|\lambda-\mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{U}_\lambda\right)|\lambda-\mathbb{D}^{2s}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{U}_\lambda^{-1}.\end{aligned}$$

Дійсно, для $u, v \in H^s(\mathrm{T})$,

$$t_{\lambda-\mathrm{S}(V)}[u,v] = \langle(\lambda - \mathrm{S}(V))u, v\rangle =$$
$$\langle|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{Id} - |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{V}|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{U}_\lambda\right)|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{U}_\lambda^{-1}u, v\rangle.$$

Для завершення доведення представлення (3) залишається скористуватися першою теоремою про представлення [6, Теорема VI.2.1].

З леми 6 випливає, що для достатньо великого $M \geq 1$ норма Гільберта–Шмідта оператора $\mathrm{A}(\lambda, V)$ менша за 1. Цього достатньо для того, щоб оператор $\mathrm{S}(V)$ мав резольвенту, яка в силу (3) має представлення (1).

Твердження 5 доведено. □

Доведення теореми 4. Згідно з твердженням 5 при $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$ резольвента $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ оператора $\mathrm{S}(V)$ має представлення (1).

Нагадаємо, що добуток оператора Гільберта–Шмідта та обмеженого оператора є оператором Гільберта–Шмідта і що добуток двох операторів Гільберта–Шмідта є ядерним оператором.

Тепер, приймаючи до уваги, що оператор $|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}$ при $s \in (1/2, 1)$ є оператором Гільберта–Шмідта, а оператор $\left(\mathrm{Id} - |\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{V}|\lambda - \mathbb{D}^{2s}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{U}_\lambda\right)^{-1}$ є обмеженим, з представлення (1) отримуємо ядерність резольвенти $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ для $\lambda \in \mathrm{Ext}_M$.

Для довільного $\mu \in \mathrm{Resolv}(\mathrm{S}(V))$ з тотожності Гільберта для резольвент:

$$\mathrm{R}(\mu, \mathrm{S}(V)) = \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V)) + (\mu - \lambda)\mathrm{R}(\mu, \mathrm{S}(V))\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V)),\ \lambda \in \mathrm{Ext}_M,$$

отримуємо ядерність резольвенти $\mathrm{R}(\mu, \mathrm{S}(V))$ оператора $\mathrm{S}(V)$.

Теорему 4 доведено. □

Доведення теореми 1. Система власних та приєднаних функцій резольвенти $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ є повною, що випливає з теореми

В. Б. Лідського [4, Теорема V.2.3] (див. також [4, Теорема V.6.1]), оскільки оператор $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ m-секторний і ядерний.

Тепер справедливість теореми 1 випливає з того факту, що системи власних та приєднаних функцій оператора $\mathrm{S}(V)$ та його резольвенти $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V))$ збігаються.

Теорему 1 доведено.

Література

[1] *Djakov P., Mityagin B.* Bari–Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials // Contemporary Mathematics. – 2009. – **481**. – P. 59–80.

[2] *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators // Journal of Functional Analysis. – 2012. – **263**. – P. 2300–2332.

[3] *Gesztesy F., Tkachenko V.* A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrödinger operators with periodic and anti-periodic boundary conditions // J. Differential Equations. – 2012. – **253**. – P. 400–437.

[4] *Gohberg I., Krein M.* Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. – Providence, RI: AMS, Translations of Mathematical Monographs, Vol. **18**, 1969. – xv+378 p.

[5] *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Schrödinger operators with periodic singular potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, No 4. – P. 31–42.

[6] *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin, etc.: Springer–Verlag, 1995. – xxii+619 p.

[7] *Korotyaev E.* Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions // Int. Math. Res. Not. IMRN. – 2003. – **37**, No 2. – P. 2019–2031.

[8] *Mikhailets V., Molyboga V.* Singular eigenvalue problems on the circle // Methods Funct. Anal. Topology. – 2004. – **10**, No 3. – C. 44–53.

[9] *Mikhailets V., Molyboga V.* Singularly perturbed periodic and semi-periodic differential operators // Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – С. 858–873.

[10] *Mikhailets V., Molyboga V.* Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, No 1. – С. 31–40.

[11] *Mikhailets V., Molyboga V.* On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle // Math. Notes. – 2012. – **91**, No 4. – P. 588–591.

[12] *Molyboga V.* Completeness of the rootvector system of the two-terms non-seladjoint differential operators of an even order with periodic distribution potentials // Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2010. – No 3. – P. 68–73.

[13] *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. – Москва: Наука. – 1976. – 280 с.

[14] *Михайлець В. А., Молибога В. М.* Спектральні задачі на класах періодичних узагальнених функцій. – Київ, 2004. – 46 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2004.– 10).

[15] *Михайлец В. А., Молибога В. Н.* Возмущение периодических и полупериодических операторов распределением Шварца // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 26–31.

[16] *Молибога В. М.* Сингулярні збурення дробово-диференціальних операторів на колі // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 291–306.