Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 204–227

УДК 517.95

Г. П. Лопушанська, В. Р. Рапіта

(Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів)

Обернена задача Коші для рівняння дробової дифузії з узагальненими функціями у правих частинах

lhp@ukr.net, vrapita@gmail.com

We establish the unique solvability of the inverse Cauchy problem for a time fractional diffusion equation with distributions in the right-hand sides of the equation and in the initial condition. This problem is to find the pair of the following functions: the generalized solution (continuous in time in generalized sense) of direct Cauchy problem and the unknown minor coefficient (depending on the time variable) of the equation.

Встановлено однозначну розв'язність оберненої задачі Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом та узагальненими функціями у правих частинах рівняння та початкової умови. Задача полягає у знаходженні пари функцій: узагальненого розв'язку (неперервного за часом в узагальненому сенсі) прямої задачі Коші та невідомого, залежного від часової змінної, неперервного коефіцієнта у молодшому члені рівняння.

1. Вступ

У [1] - [6] доведено теореми існування і єдиності, а також одержано зображення за допомогою функцій Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь із дробовою похідною за часом. Еліптичні й параболічні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними, а також задача Коші для рівнянь із дробовою похідною за часом при узагальнених функціях у правих частинах достатньо повно досліджені (див. [7] - [14] та бібліографію).

Обернені крайові задачі на визначення головного коефіцієнта або залежних від частини змінних крайових даних чи правої частини рівняння дробової дифузії вивчались у [15] - [21] та інших працях.

У цій статті вивчаємо обернену задачу Коші на визначення молодшого коефіцієнта у рівнянні – доводимо існування та єдиність розв'язку (u,r) задачі

$$u_t^{(\beta)} - A(x,D)u - r(t)u = F_0(x)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

де $\beta \in (0,1)$, F_0, F_1 – задані узагальнені функції, F, g – задані неперервні функції, $(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot))$ – значення невідомої узагальненої функції u на заданій основній функції φ_0 для кожного $t \in [0,T]$, $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку,

$$A(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$
$$a_{ij}, a_i, a \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

2. Основні позначення, означення та допоміжні результати

Використовуємо позначення: $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup 0$, $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційованих функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір нескінченно диференційовних функцій v, які мають компактні носії за просторовими змінними і такі, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ – простір функцій із $C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, які мають компактні носії,

$$||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} = \max_{|\kappa| \le k} \max_{x \in supp \varphi} |D^\kappa \varphi(x)|,$$

де $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_j \in \mathrm{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $|\kappa| = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$, $D^\kappa \varphi(x) = \frac{\partial^{|\kappa|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\kappa_1} \dots \partial x_n^{\kappa_n}}$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{D}'(\bar{Q})$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ та $\mathcal{D}(\bar{Q})$, (f, φ) – значення $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ($f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\bar{Q})$) на основній функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (відповідно на $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$). Зауважимо, що $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – простір узагальнених функцій з компактними носіями.

Нехай $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f = 0$ для $t < 0\}$,

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : \ (v(\cdot, t), \varphi(\cdot)) \in C[0, T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\},$$

$g \hat{*} \varphi$ – згортка узагальненої функції g і основної функції φ:

$$(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi)),$$

$f * g$ – згортка узагальнених функцій f і g:

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ [22]:

$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t) t^{\lambda - 1}}{\Gamma(\lambda)}$ для $\lambda > 0$ та $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ для $\lambda \le 0$, де $\Gamma(z)$ — гамма-функція, $\theta(t)$ — функція Хевісайда. Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Зауважимо, що похідна Ріміна-Ліувілля $v_t^{(\beta)}(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначена формулою [22]

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

регуляризована похідна дробового порядку $\beta \in (0,1)$ визначена як [2]

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\beta}\Big] =$$

$$= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0).$$

Нехай $C_{2,\beta}(Q)$ – клас функцій $v \in C(Q)$, які мають в Q неперервні похідні до другого порядку включно за просторовими змінними та неперервну $D_t^\beta v$,

$$C_{2,\beta}(\bar{Q}) = C_{2,\beta}(Q) \cap C(\bar{Q}),$$

$$(Lv)(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - A(x,D)v(x,t),$$

$$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^\beta v(x,t) - A(x,D)v(x,t),$$

$$(\widehat{L}v)(x,t) = f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) - \widehat{A}(x,D)v(x,t), \qquad (x,t) \in Q,$$

де $\widehat{A}(x,D)$ – формально спряжений до $A(x,D)$ диференціальний вираз.

Правильна формула Гріна [14]

$$\int\limits_Q v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_Q (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau + \qquad (4)$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} v(y,0)dy \int_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau$$

$$\forall v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}),\ \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Припущення:

(A1) $g \in C[0,T],\ F_0, F_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

(A2) $F, F^{(\beta)} \in C[0,T]$ і $|F(t)| \geq f = const > 0,\ \ t \in [0,T]$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Означення 1. *Пара функцій*

$$(u,r) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0,T],$$

яка задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int_0^T g(t)\Big(F_0(\cdot), \psi(\cdot,t)\Big)dt + \int_0^T r(t)\Big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\Big)dt + \tag{5}$$

$$+\Big(F_1(\cdot), \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\Big) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$$

та умову (3), називається розв'язком задачі (1)-(3).

Із (2) і (3) випливає необхідна умова узгодження даних задачі

$$(F_1, \varphi_0) = F(0). \tag{6}$$

Для доведення розв'язності задачі застосовуємо метод функції Гріна.

Означення 2. *Вектор-функція* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$ *така, що при достататньо регулярних* g_0, g_1 *функція*

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) g_0(y,\tau)dy + \tag{7}$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)g_1(y)dy, \quad (x,t)\in\bar{Q}$$

є класичним (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язком задачі Коші

$$L^{reg}u(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

$$u(x,0) = g_1(x) \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

називаеться вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення 2 випливає, що

$$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau)\in Q,$$

де δ – дельта-функція Дірака,

$$(L^{reg}G_1)(x,t,y) = 0, \quad (x,t)\in Q, \;\; y\in\mathbb{R}^n,$$

$$G_1(x,0,y) = \delta(x-y), \;\; x,y\in\mathbb{R}^n.$$

У [3]– [5] встановлено існування вектор-функції Гріна задачі Коші (1), (2), додатність її компонент, знайдено їх оцінки та оцінки їх похідних, вивчені оператори Гріна на класах гельдерових функцій. Далі використовуємо позначення

$$(\widehat{\mathcal{G}_0}\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(x,t)dx,$$
$$(\widehat{\mathcal{G}_1}\varphi)(y) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)\varphi(x,t)dx,$$
$$(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(x)\,dx,$$
$$(\widehat{G_1}\varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)\varphi(x)\,dx.$$

Лема 1. *[14] Правильні наступні співвідношення:*

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,\tau), \;\; (y,\tau)\in\bar{Q}, \quad \psi\in\mathcal{D}(\bar{Q}), \tag{8}$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1(\widehat{L}\psi))(y) = \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,\tau)\,dt, \tag{9}$$
$$y \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}),$$

$$G_1(x,t,y) = \int\limits_0^t f_{1-\beta}(\tau)G_0(x,t,y,\tau)d\tau, \tag{10}$$
$$(x,t) \in Q, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 2. *Для всіх* $k \in \mathbb{Z}_+$, *мультиіндексів* α, $|\alpha| = k$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(\widehat{G_0}\varphi)(\cdot,t,\tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$(\widehat{G_1}\varphi)(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad t \in [0,T]$$

та справджуються оцінки

$$\left|D_y^\alpha(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\right| \le c_0(t-\tau)^{\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{11}$$

$$\left|D_y^\alpha(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)\right| \le c_1||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad (y,t) \in \bar{Q}. \tag{12}$$

Тут і далі C, c, b_i, c_i, C_i $(i \in \mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Доведення. З результатів [3], [4] випливають наступні оцінки у випадку $n \ge 3$:

$$G_0(x,t,y,\tau) \le \frac{C}{(t-\tau)|x-y|^{n-2}},$$

$$G_1(x,t,y) \le \frac{C}{t^\beta|x-y|^{n-2}} \quad \text{при} \quad |x|^2 < t^\beta,$$

$$G_0(x,t,y,\tau) \le \frac{C(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^n} \cdot \left(\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)^\beta}\right)^{1+\frac{n}{2(2-\beta)}} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}},$$

$$G_1(x,t,y) \le \frac{C}{|x-y|^n} \cdot \left(\frac{|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{n}{2(2-\beta)}} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}, \ |x|^2 > t^\beta.$$

Використовуючи наведені вище оцінки, при $n \ge 3$, для всіх $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, мультиіндексів α, $|\alpha| = k$, отримуємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)D^\alpha\varphi(x)dx\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2<(t-\tau)^\beta\}} G_0(x,t,y,\tau)|D^\alpha\varphi(x)|dx +$$

$$+ \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2>(t-\tau)^\beta\}} G_0(x,t,y,\tau)|D^\alpha\varphi(x)|dx \le$$

$$\le C \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2<(t-\tau)^\beta\}} \frac{|D^\alpha\varphi(x)|}{(t-\tau)|x-y|^{n-2}}dx +$$

$$+C \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2>(t-\tau)^\beta\}} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^n}\cdot\Big(\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)^\beta}\Big)^{1+\frac{n}{2(2-\beta)}} \times$$

$$\times e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} |D^\alpha\varphi(x)|dx \le$$

$$\le C_1\Big[\frac{1}{(t-\tau)} \int\limits_0^{(t-\tau)^{\beta/2}} rdr + \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\infty} r^{1+\frac{n}{2-\beta}}(t-\tau)^{-1-\frac{n\beta}{2(2-\beta)}} \times$$

$$\times\, e^{-c\left(\frac{r^2}{(t-\tau)^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} dr\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le C_2\Big[\frac{1}{(t-\tau)} \int\limits_0^{(t-\tau)^{\beta/2}} rdr +$$

$$+(t-\tau)^{\beta-1}\int\limits_1^{\infty} z^{\frac{n}{2}+1-\beta}e^{-cz}\, dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le c_0(t-\tau)^{\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad (x,t)\in Q.$$

Аналогічно отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)D^\alpha\varphi(x)dx\Big| \leq \\
&\leq \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2<t^\beta\}} G_1(x,t,y)|D^\alpha\varphi(x)|dx + \\
&+ \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2>t^\beta\}} G_1(x,t,y)|D^\alpha\varphi(x)|dx \leq \\
&\leq C_3\Big[\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2<t^\beta\}} \frac{1}{t^\beta|x-y|^{n-2}}dx + \\
&+ \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y|^2>t^\beta\}} \frac{1}{|x-y|^n}\cdot\Big(\frac{|x-y|^2}{4t^\beta}\Big)^{\frac{n}{2(2-\beta)}} e^{-c\Big(\frac{|x-y|^2}{4t^\beta}\Big)^{\frac{1}{2-\beta}}} dx\Big]\times \\
&\times\|\varphi\|_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_4\Big[\frac{1}{t^\beta}\int\limits_0^{t^{\beta/2}} r\,dr + \\
&+ \int\limits_{t^{\beta/2}}^{\infty} r^{-1+\frac{n}{2-\beta}} t^{-\frac{n\beta}{2(2-\beta)}} e^{-c\Big(\frac{r^2}{t^\beta}\Big)^{\frac{1}{2-\beta}}} dr\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq C_5\Big[\frac{1}{t^\beta}\int\limits_0^{t^{\beta/2}} r\,dr + \int\limits_1^\infty z^{\frac{n}{2}-1}e^{-cz}\,dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq c_1||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}, \quad (x,t)\in\bar{Q}.
\end{aligned}
$$

Згідно з оцінками $G_0(x,t,y,\tau)$,

$$
\lim_{|y|\to\infty}\widehat{G}_0(D^\alpha\varphi)(y,t,\tau)=0, \quad 0\leq\tau<t\leq T, \quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).
$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_j} G_0(x,t,y,\tau) = -\frac{\partial}{\partial x_j} G_0(x,t,y,\tau) +$$
$$+ \Big(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) G_0(x,t,y,\tau), \ \ j \in \{1,\dots,n\}$$

і подібно для похідних вищих порядків, врахувавши також, що функції

$$\big(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \big)^p G_0(x,t,y,\tau), \ \ j \in \{1,\dots,n\}, \ \ p \in \mathbb{Z}_+$$

мають такі ж особливості, як $G_0(x,t,y,\tau)$, інтегруючи частинами та враховуючи одержані вище оцінки, отримуємо, що

$$D_y^{\alpha} (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot,t,\tau) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad 0 \le \tau < t \le T$$

для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ та оцінки (11).

Так само доводимо, що

$$D_y^{\alpha} (\widehat{G}_1 \varphi)(\cdot,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad t \in [0,T]$$

для довільної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ та встановлюємо оцінки (12).

Подібно розглядаємо випадки $n = 1$ та $n = 2$.

Теорема 1. *За припущень (A1) існує єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ *задачі Коші*

$$\begin{gathered} Lu = g(t) F_0(x), \ \ (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = F_1(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{13}$$

Він визначений формулою

$$\begin{gathered} \big(u(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big) = \int\limits_0^t g(\tau) \Big(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot,t,\tau) \Big) d\tau + \\ + \Big(F_1(\cdot), (\widehat{G}_1 \varphi)(\cdot,t) \Big) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ \ t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{14}$$

Доведення. Теорема доводиться за схемою доведення теореми 3 із [23]. Функція $F(x,t)=F_0(x)\cdot g(t)$ належить $\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$, бо для всіх $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функція $(F_0(x)\cdot g(t),\varphi(x))=(F_0,\varphi)g(t)$ неперервна на $[0,T]$. Узагальнені функції е правих частинах (13) мають скінченні порядки сингулярностей: існують цілі k_0,k_1 і функції $g_{j\alpha}\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n),\ |\alpha|\le k_j,\ j=0,1$ такі, що

$$(F_j,\varphi)=\sum_{|\alpha|\le k_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{j\alpha}(y)D^\alpha\varphi(y)dy \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\quad j=0,1. \tag{15}$$

Це записуємо так: $s(F_j)\le k_j,\ j=0,1$.

Використовуючи зображення (15) та лему 2, переконуємось, що для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)d\tau=$$

$$=\sum_{|\alpha|\le k_0}\int\limits_0^t g(\tau)\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{0\alpha}(y)D^\alpha(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)dy\Big]d\tau,$$

$$\Big(F_1(y),(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)\Big)=\sum_{|\alpha|\le k_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{1\alpha}(y)D^\alpha(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)dy$$

та правильні оцінки

$$\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)\,d\tau\Big|\le \le c_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}\cdot\int\limits_0^t|g(\tau)|(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau\le \le b_0t^\beta||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)},\qquad t\in[0,T], \tag{16}$$

$$\left|\left(F_1(y),(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)\right)\right| \le b_1||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_1}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

При $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ права частина (14) належить $C[0,T]$.

Покажемо, що функція (14) є розв'язком задачі у сенсі означення 1. Використовуючи (14) та лему 2, для довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ знаходимо

$$\begin{aligned}
\big(u,(\widehat{L}\psi\big) &= \int_0^T \Big(u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\Big)dt = \\
&= \int_0^T \Big(\int_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\Big)d\tau\Big)dt + \\
&+ \int_0^T \Big(F_1(y),(\widehat{G}_1(\widehat{L}\psi))(y,t)\Big)dt = \\
&= \Big(F_0(y),\int_0^T dt\int_0^t g(\tau)(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)d\tau\Big) + \\
&+\Big(F_1(y),\int_0^T (\widehat{G}_1(\widehat{L}\psi))(y,t)dt\Big) = \\
&= \Big(F_0(y),\int_0^T g(\tau)d\tau\int_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)dt\Big) + \\
&+ \Big(F_1(y),\int_0^T \big(\widehat{G}_1(\widehat{L}\psi)\big)(y,t)dt\Big) = \\
&= \Big(F_0(y)\cdot g(\tau),\big(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi)\big)(y,\tau)\Big) + \Big(F_1,\widehat{\mathcal{G}}_1(\widehat{L}\psi)\Big).
\end{aligned}$$

Скориставшись формулами (8) та (9), для функції u, заданої формулою (14), і довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ одержуємо тотожність (5) при $r(t)=0,\ t\in[0,T]$. За означенням 1 функція (14) є розв'язком задачі (13) шуканого класу. Єдиність розв'язку задачі доводиться, як у [23].

3. Розв'язність оберненої задачі

Перейдемо до доведення існування розв'язку оберненої задачі Коші. З теореми 1 випливає, що за припущень (A1), (A2) при відомій функції $r\in C[0,T]$ розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ задачі (1), (2) задовольняє рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t r(\tau)\Big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau+h_\varphi(t) \tag{18}$$

для кожної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, де

$$\begin{gathered}h_\varphi(t)=\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau+\\+\Big(F_1(\cdot),(\widehat{G}_1\varphi)(\cdot,t)\Big),\quad t\in[0,T]\end{gathered} \tag{19}$$

та $h_\varphi\in C[0,T]$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. І навпаки, будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ рівняння (18) є розв'язком задачі (1), (2).

З рівняння (1)

$$\begin{gathered}\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big)=\\=\Big(u(\cdot,t),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\Big)+r(t)\Big(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\Big)+g(t)(F_0,\varphi_0).\end{gathered}$$

Використовуючи умову (3), отримуємо

$$F^{(\beta)}(t)=\big(u(\cdot,t),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\big)+r(t)F(t)+g(t)(F_0,\varphi_0),$$

а враховуючи припущення (A2), знаходимо

$$\begin{gathered}r(t)=\Big[F^{(\beta)}(t)-\big(u(\cdot,t),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\big)-g(t)(F_0,\varphi_0)\Big]\Big[F(t)\Big]^{-1},\\t\in(0,T].\end{gathered} \tag{20}$$

Нехай

$$r(u,t) = \Big[F^{(\beta)}(t) - \big(u(\cdot,t),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\big) - g(t)(F_0,\varphi_0)\Big]\Big[F(t)\Big]^{-1},$$
$$t \in (0,T].$$

Підставивши $r(u,t)$ в (18) замість r, для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ отримаємо нелінійне рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int\limits_0^t r(u,\tau)\Big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau + h_\varphi(t) \tag{21}$$

відносно невідомої $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$. Отож, задачу (1)–(3) зведено до системи (21), (20).

Правильне обернене твердження: якщо пара (u,r) – розв'язок системи (21), (20), то вона є розв'язком задачі (1)–(3).

Теорема 2. *За припущень (A1), (A2) і (6) існує* $T^* \in (0,T]$ *(відповідно* $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0,T^*]$*) і розв'язок*

$$(u,r) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q^*}) \times C[0,T^*]$$

задачі(1)-(3): функція u *є розв'язком рівняння (21),* r *визначена згідно з (20).*

Доведення. Як було встановлено вище, за припущень теореми пара функцій $(u,r) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0,T]$ є розв'язком задачі (1)-(3) тоді і тільки тоді, коли функція $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ є розв'язком рівняння (21), $r \in C[0,T]$ визначена формулою (20). Із теореми 1 випливає, що права частина (21) неперервна на $[0,T]$. Достатньо довести розв'язність рівняння (21) в $\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

Також із доведення теореми 1 випливає існування таких чисел $\widehat{C} > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $K \geq \max\{k_0,k_1\}$, де $s(F_j) \leq k_j$, $k_j = 0,1$, що

$$\big|\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big| \leq \widehat{C}||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Нехай $R > 0$,

$$M_R = M_R(Q) = \{v \in \mathcal{D'}_C(\bar{Q}) :$$
$$||v||_K = \max_{t\in[0,T]} \sup_{\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} \frac{\left|\left(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\right)\right|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}} \leq R\}.$$

Визначимо оператор $P : \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \to \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ як

$$\Big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big) = h_\varphi(t)+$$
$$+\int_0^t r(v,\tau)\Big(v(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n),$$

де $h_\varphi(t)$ визначена згідно з (19).

Доведемо розв'язність рівняння (21) в M_R, застосовуючи принцип Банаха. Спочатку покажемо існування таких $R > 0$, $T^* \in (0,T]$, Q^* і $M^*_R = M_R(Q^*)$, що

$$P : M^*_R \to M^*_R.$$

Використовуючи (15) і доведення леми 2, для $v \in M_R$, $\varphi \in \mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)$ отримуємо

$$\Big|\int_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{\mathcal{G}_0}\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)d\tau\Big| \leq b_0||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}\, t^\beta, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}|h_\varphi(t)| &\leq b_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}t^\beta + b_1||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq \left[b_0t^\beta + b_1\right]\, ||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{23}$$

Для будь-якої $v \in M_R$ маємо

$$\Big|\Big(v(\cdot,\tau),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\Big)\Big| \leq R\|\widehat{A}\varphi_0\|_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} := b_2R,$$

а тоді

$$|r(v,\tau)| \leq \frac{B+b_2R}{f},$$

де $B = \max\limits_{t\in[0,T]} |F^{(\beta)}(t) - g(t)(F_0, \varphi_0)|$.

Отже, для будь-якої $v \in M_R$

$$\Big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\Big| \le \big[b_0 t^\beta + b_1\big]||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+\frac{(B+b_2R)R}{f}\int\limits_0^t ||(\widehat{\mathcal{G}_0}\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}d\tau.$$

За лемою 2

$$\int\limits_0^t ||(\widehat{\mathcal{G}_0}\varphi)(\cdot,t,\tau))||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}d\tau \le qt^\beta||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}.$$

Отже,

$$\begin{gathered}\Big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\Big| \le \\ \le \Big[b_0t^\beta + b_1 + \frac{(B+b_2R)Rqt^\beta}{f}\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)} = \\ = \Big[q_0t^\beta R^2 + q_1t^\beta R + b_0t^\beta + b_1\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)},\end{gathered} \tag{24}$$

де $q_0 = \frac{b_2 q}{f}$, $q_1 = \frac{Bq}{f}$, і тоді

$$\frac{\Big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\Big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K[0,T]}} \le q_0t^\beta R^2 + q_1t^\beta R + b_0t^\beta + b_1$$

$$\forall v \in M_R,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Для виконання нерівності

$$q_0t^\beta R^2 + q_1t^\beta R + b_0t^\beta + b_1 \le R \quad \forall t \in [0, T^*] \tag{25}$$

при деякому $T^* \in (0,T]$ виберемо спочатку $R > 2b_1$ і $t_0 \in (0,T]$ так, щоб

$$b_0t^\beta + b_1 \le R/2 \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Тоді при $R > \max\{1, 2b_1\}$ нерівність (25) випливає з нерівності

$$(q_0 + q_1)t^\beta R \leq \frac{1}{2} \qquad \forall t \in [0, t^*], \tag{26}$$

правильної при $t^* = \min\{t_0, [(q_0 + q_1)R]^{-1/\beta}\}$. Ми довели, що існують числа

$$R > \max\{1, 2b_1\}, \qquad T^* = \min\{t^*, T\} > 0$$

такі, що для всіх $t \in [0, T^*]$, $v \in M_R^*$ нерівність (25) виконується і, отже, $P : M_R^* \to M_R^*$.

Тепер покажемо, що оператор P є стисним на M_R^* для вибраного R. При $v_1, v_2 \in M_R^*$, $\varphi \in \mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)$ і $t \in [0, T^*]$ маємо

$$\Big|\big((Pv_1)(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big) - \big((Pv_2)(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big)\Big| =$$

$$= \Big|\big((Pv_1)(\cdot,t) - (Pv_2)(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big)\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^t \Big[r(v_1,\tau)\Big(v_1(\cdot,t), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big) -$$

$$-r(v_2,\tau)\Big(v_2(\cdot,t), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\Big)\Big]d\tau\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^t \Big[r(v_1,\tau)\Big(v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t), \widehat{G}_0\varphi(\cdot,t,\tau)\Big) +$$

$$+\Big(r(v_1,\tau) - r(v_2,\tau)\Big)\Big(v_2(\cdot,t), \widehat{G}_0\varphi(\cdot,t,\tau)\Big)\Big]d\tau\Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \Big|r(v_1,\tau)\Big| \cdot \Big|\Big(v_1(\cdot,t) - v_2(\cdot,t), \widehat{G}_0\varphi(\cdot,t,\tau)\Big)\Big|d\tau +$$

$$+\frac{1}{f}\int\limits_0^t \Big|\Big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), (\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\Big)\Big| \cdot \Big|\Big(v_2(\cdot,t), \widehat{G}_0\varphi(\cdot,t,\tau)\Big)\Big|d\tau.$$

Тоді

$$\frac{\Big|\big((Pv_1)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)-\big((Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\Big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}\leq$$

$$\leq\frac{B+b_2R}{f}\int\limits_0^t\sup_{\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}\frac{\Big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\Big|}{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}\times$$

$$\times\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}d\tau+$$

$$+\frac{R||\widehat{A}\varphi_0||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{f}\int\limits_0^t\frac{\Big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\big)\Big|}{||\widehat{A}\varphi_0||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}\times$$

$$\times\sup_{\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}d\tau\leq$$

$$\leq\Big[\frac{B+2b_2R}{f}\sup_{\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}\frac{\int\limits_0^t||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathbb{R}^n)}}\Big]\cdot||v_1-v_2||_K\leq$$

$$\leq\frac{(B+2b_2R)qt^\beta}{f}||v_1-v_2||_K=$$

$$=(2q_0R+q_1)t^\beta||v_1-v_2||_K\quad\forall t\in[0,T^*].$$

Зауважимо, що при $\widehat{A}(x,D)\varphi_0(x)\equiv 0$, $x\in\mathbb{R}^n$ в одержаному виразі відсутній множник 2: у цьому випадку в попередній формулі

$$\Big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)\Big)=0 \text{ для всіх } \tau\in[0,T^*].$$

При $t \in [0, T^*]$ та вибраному R маємо

$$(2q_0R + q_1)t^\beta \le \frac{2q_0R + q_1}{2(q_0 + q_1)R} =$$
$$= \frac{2q_0}{2(q_0 + q_1)} + \frac{q_1}{2(q_0 + q_1)R} < \frac{2q_0 + q_1}{2(q_0 + q_1)} < 1.$$

Отже, P – стисний оператор на $M_R(Q^*)$, і за теоремою Банаха одержуємо розв'язність рівняння (21) у $M_R(Q^*) \subset \mathcal{D}'_C(\bar{Q}^*)$.

Теорема 3. *За умов $F \in C[0, T]$, $F(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$ розв'язок*

$$(u, r) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0, T]$$

задачі (1)-(3) единий.

Доведення. Візьмемо два розв'язки

$$(u_1, r_1), (u_2, r_2) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0, T]$$

задачі (1)-(3) і підставимо їх у рівняння (1). Отримаємо рівняння

$$u_{1t}^{(\beta)} - u_{2t}^{(\beta)} = A(u_1 - u_2) + (r_1 - r_2)u_1 + r_2(u_1 - u_2).$$

Нехай $u = u_1 - u_2$, $r = r_1 - r_2$. Тоді u задовольняє в Q рівняння

$$u_t^{(\beta)} = Au + r_2u + ru_1$$

та нульову початкову умову.

З означення розв'язку

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int_0^T \Big[r_2(t)\big(u(\cdot, t), \psi(t)\big) + r(t)\big(u_1(\cdot, t), \psi(t)\big)\Big] dt$$

для будь-якої $\psi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$.

Згідно з [14], для кожної $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ існує така $\psi = \widehat{\mathcal{G}}_0 \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, що $\widehat{L}\psi = \varrho$ в $\bar{Q}$. Тоді з попередньої тотожності

$$\int_0^T \Big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t)\Big) dt =$$

$$= \int_0^T \Big(r_2(t)u(\cdot,t) + r(t)u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\Big) dt$$

для будь-якої $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, а із (20) та умови перевизначення (3)

$$\big(u(z,t), (\widehat{A}\varphi_0)(z)\big) = -r(t)F(t), \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

Знайшовши із (27) вираз для функції $r(t)$, підставляємо його у попередню тотожність. Отримуємо

$$\int_0^T \Big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t)\Big) dt =$$

$$= \int_0^T \Big(r_2(t)u(\cdot,t) - \frac{\big(u(z,t), (\widehat{A}\varphi_0)(z)\big)}{F(t)}\, u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\Big) dt$$

для кожної $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, і ця рівність може бути записана як

$$\int_0^T \Big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t) + \frac{(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)w_\varrho(t)}{F(t)}\Big) dt = 0 \tag{28}$$

для кожної $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, де

$$w_\varrho(t) = \big(u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$$

– відома функція. Згідно з лемою 2 [14],

$$\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \quad \forall \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}),$$

а тому $w_\varrho \in C[0,T]$,

$$\varrho(\cdot,t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t) + \frac{(\widehat{A}\varphi_0)(\cdot)w_\varrho(t)}{F(t)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \;\; t \in [0,T]$$

та неперервна за $t \in [0,T]$. Отож, для довільних $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathcal{D}(0,T)$ існує єдиний розв'язок $\varrho = \varrho_g$ інтегрального рівняння

$$\varrho(x,t) - r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(x,t) + \frac{(\widehat{A}\varphi_0)(x)w_\varrho(t)}{F(t)} =$$

$$= \varphi(x)\mu(t), \quad (x,t) \in \bar{Q},$$

яке є інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду з інтегровним ядром. Цей розв'язок

$$\varrho_g(\cdot,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall t \in [0,T]$$

та неперервний за $t \in [0,T]$. Тоді з (28) отримуємо

$$\int\limits_0^T \Big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big)\mu(t)dt = 0 \;\; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \mu \in \mathcal{D}(0,T).$$

За лемою Дю-Буа-Реймона [22, с. 95]

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \;\; t \in [0,T],$$

так що $u = 0$ в $\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$. А тоді з (27) випливає, що

$$r(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

4. Висновки

У статті доведено теореми про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі Коші (1)-(3) для рівняння з дробовою похідною за часом – задачі на знаходження неперервного за часом в узагальненому сенсі розв'язку прямої задачі та невідомого, залежного від часу, неперервного коефіцієнта у молодшому члені рівняння при заданих узагальнених функціях у правих частинах рівняння та початкової умови.

Одержані результати переносяться на випадок заданих узагальнених функцій із ширших просторів. Зокрема, теореми існування та єдиності залишаються правильними при $F_j \in \mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1$, де

$$\mathcal{D}_b(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\gamma f \text{ обмежені в } \mathbb{R}^n \ \ \forall\gamma\}.$$

Література

[1] *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. of Statistical Physics. – 2001. – **104**, No 5/6. – P. 1349–1387.

[2] *Djrbashian M. M., Nersessyan A. B.* Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order // Izv. AN Arm. SSR. Matematika. – 1968. – **3**. – P. 3–29.

[3] *Eidelman S. D., Ivasyshen S.D ., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.

[4] *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1368.

[5] *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.

[6] *Voroshylov A. A., Kilbas A. A.* Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative // Dokl. Ak. Nauk. – 2007. – **414**, No 4. – P. 1–4.

[7] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов // Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[8] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // Киев: Наукова думка, 1984. – 284 с.

[9] *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. АН України. – 1992. — № 10. – С. 6–9.

[10] *Житарашу Н. В.* Теоремы об изоморфизмах в L_p-теории слабых решений параболических граничных задач // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 5. – С. 1054–1058.

[11] *Rojtberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions // Dordrecht: Kluver Acad. Publishers, 1996. – 415 p.

[12] *Лионс Ж.–Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения // Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[13] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи // Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступна як arXiv:1106.3214.)

[14] *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник О. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // Сиб. матем. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1288–1299.

[15] *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type overdetermination condition // Electronic J. of Differential Equations. – 2013. – **2013**, No 270. – P. 1–16.

[16] *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2009. – **25**, No 11. – P. 1–16. (Доступна як http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/25/11/115002.)

[17] *El-Borai Mahmoud M.* On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem // LJRRAS. – 2011. – **4**. – P. 411–415.

[18] *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh., Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // Journal of Math-for-Industry. – 2013. – **5A**. – P. 51–57.

[19] *Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // Journal of Math-for-Industry. – 2010. – **2A**. – P. 99–108.

[20] *Rundell W., Xu X., Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Applicable Analysis. – 2012. – **92**, No 7. – P. 1511–1526.

[21] *Zhang Y., Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2011. – **27**, No 3. – P. 1–12. (Доступна як http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/27/3/035010.)

[22] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е // Москва: Наука, 1985. – 512 с.

[23] *Лопушанський А. О.* Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах // Карпатські матем. публ. – 2013. – **5**, № 2. – С. 279–289.