Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 156–193

УДК 517.946+511.37

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник

(Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для лінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь. Метричний підхід до проблеми малих знаменників

kuz.anton87@gmail.com, ptashnyk@lms.lviv.ua

We give a survey of the papers concerning the research of the well-posedness, in a multidimensional layer, of the problems with general nonlocal conditions with respect to the time variable which contain integral terms in the form of the arbitrary order moments of the unknown function. The problems are considered for hyperbolic and parabolic equations and systems of equations, for mixed type equations, and for equations unsolved with respect to the higher time derivative in the class of functions that are almost periodic with respect to the spatial variables. Generally, these problems are conditionally well-posed, and their solvability is related to the problem of small denominators, which is solved by using the metric approach.

Наведено огляд робіт авторів, що стосуються дослідження в багатовимірному шарі коректної розв'язності задач із загальними нелокальними умовами за часовою змінною, які містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, для гіперболічних і параболічних рівнянь та систем рівнянь, для рівнянь мішаного типу, а також рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними. Ці задачі, взагалі, є умовно коректними, а їхня розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід.

Вступ

Упродовж останніх десятиріч задачі з нелокальними (у тім числі й інтегральними) умовами стали важливим самостійним предметом досліджень у теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними; вони були покликані до життя як потребами побудови загальної теорії крайових задач, так і потребами практики.

Відома теорема Хермандера [57], яка стверджує, що для довільного лінійного диференціального оператора з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в обмеженій області існує розв'язне розширення, тобто деяка коректна крайова задача, є теоремою існування і не дає жодних вказівок для ефективного описання коректної задачі за допомогою крайових умов для наперед заданого оператора. О. О. Дезін [13] вперше показав, що для опису всіх коректних задач для заданого диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами необхідно використовувати, крім локальних, також і нелокальні умови.

Одним із важливих класів нелокальних умов є інтегральні умови. Дослідження задач з інтегральними умовами за виділеною змінною, які є узагальненням дискретних нелокальних умов, для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними розпочалось у 60-х роках XX століття. Їх вивчення зумовлене тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів у випадках, коли неможливо виміряти певні фізичні величини, але відомі їхні усереднені значення (дифузія частинок у турбулентній плазмі [50], процеси теплопровідності [19, 69], вологопереносу в капілярно-пористих середовищах [41], проблеми математичної біології [42], процес зовнішнього гетерування, який використовується при очищенні кремнієвих плат від домішок [40], довгострокове прогнозування погоди [63] тощо). Нелокальні (у тім числі інтегральні) умови використовують також як умови перевизначення при дослідженні обернених задач математичної фізики (див. [68] та бібліографію там).

Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку задача зі загальними умовами, частинним випадком яких є інтегральні умови, була поставлена і досліджена Я. Д. Тамаркіним [55, с. 94]:

$$p_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + y(t) = f(t), \;\; t \in (a,b), \tag{1}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m_{il}} \alpha_{ilj}u^{(l-1)}(t_{ilj}) + \int_a^b a_{il}(t)u^{(l-1)}(t)dt\right) = 0, \;\; i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $p_j(t) \in C([a,b])$, $m_{il} \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ilj} \in \mathbb{R}$, $a_{il}(t)$ – інтегровні на інтервалі (a,b) функції. Я. Д. Тамаркін встановив умови існування функції Гріна задачі (1), (2) і обґрунтував її побудову.

Для рівнянь із частинними похідними задачі з інтегральними умовами вивчались у різних аспектах у працях Дж. Р. Кеннона (J. R. Cannon) [69], В. Л. Каминіна [19], Д. Гордезіані, Г. Авалішвілі [66], О. А. Самарського [50], В. М. Борок [9, 10], З. О. Мельника та В. М. Кирилича [38], Л. В. Фардіголи [60–62], П. І. Каленюка [17, 18], І. Я. Кміть [71], Л. С. Пулькіної [45], І. Д. Пукальського [44], S. Mesluob, A. Bouziani [73] та ін., де виділено коректні постановки задач.

Однак, для еволюційних рівнянь задачі з інтегральними умовами за часовою змінною назагал є умовно коректними. Їхня розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників і є нестійкою відносно малих змін параметрів задачі.

З проблемою малих знаменників уперше зіткнувся у кінці XVIII століття П. Лаплас при дослідженні систем звичайних диференціальних рівнянь, які описують рух планет і супутників у гравітаційному полі. Математично ефект малих знаменників проявляється у тому, що в розв'язки рівнянь руху планет, які зображуються рядами, входить нескінченна кількість членів із коефіцієнтами, знаменники яких є як завгодно близькими до нуля, що спричиняє розбіжність цих рядів, тобто в русі планет з'являються резонансні явища.

А. М. Колмогоров [22] запропонував для розв'язання проблеми малих знаменників метричну концепцію і застосував її до задачі про рухи на торі та в теорії динамічних систем. У цих задачах (як і у задачах небесної механіки) малі знаменники мають вигляд лінійних форм $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \cdots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Ідея метричного підходу полягала у наступному: 1) враховувалось, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів ω виконуються оцінки [1]

$$|(\omega, k)| \geqslant C\left(|k_1| + \cdots + |k_p|\right)^{-\delta}, \quad C > 0,\ \delta > p,\ k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}; \quad (3)$$

2) аналіз збіжності рядів з малими знаменниками проводився лише для тих ω, які задовольняють оцінки (3).

Пізніше метрична концепція застосовувалась також при дослідженні стійкості розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь [1, 39] та у теорії апроксимації функцій наближеннями Паде [4].

Застосування метричного підходу до дослідження умовно коректних крайових задач для рівнянь із частинними похідними дозволило встановити однозначну розв'язність таких задач для майже всіх векторів, компоненти яких виражаються через параметри області, коефіцієнти рівнянь і коефіцієнти граничних умов [7, 46, 47].

Для окремих класів рівнянь із частинними похідними на основі метричного підходу була досліджена коректна розв'язність ряду задач з інтегральними умовами у вигляді послідовних моментів від шуканої функції за часовою змінною. Зокрема, П. І. Штабалюк [64] в області $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^p\}$ розглядав задачу з умовами

$$\int_0^T t^j u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

для строго гіперболічного рівняння

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{|s|=\alpha} a_{\alpha,s} \frac{\partial^n u}{\partial t^{n-\alpha} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad a_{\alpha,s} \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

і встановив існування єдиного класичного розв'язку цієї задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\xi$, де ξ — кількість коефіцієнтів рівняння (4)) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння (4), у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними зі заданим спектром.

О. М. Медвідь та М. М. Симотюк [34, 35] розглядали в області $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, де $\Omega_p = (\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})^p$, задачу з умовами

$$\int_0^{t_1} t^j u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \ x \in \Omega_p, \ t_1 \in (0,T], \tag{5}$$

для загальних (незалежно від типу) рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x) \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T,$$

де $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів N_j, $N_j \in \mathbb{N}$. Встановлено існування єдиного

2π-періодичного за x розв'язку задачі для майже всіх (стосовно міри Гаусдофа) чисел $t_1 \in (0,T)$. Ці результати було поширено на випадок рівнянь із навантаженнями [36] та на системи рівнянь із відхиленням аргументу [37].

В. С. Ільків [14] розглянув задачу про знаходження 2π-періодичного за x розв'язку безтипної системи диференціальних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+s_1+\ldots+s_p\leqslant n} A_s(t)\partial_{x_1}^{s_1}\ldots\partial_{x_p}^{s_p}\partial_t^{s_0}\vec{U}(t,x)=0, \quad t\in(0,T), \quad x\in\Omega_p,$$

який за змінною t задовольняє умови

$$\int_0^T(\mu(t)+\nu)\partial_t^{j-1}\vec{U}(t,x)dt=\vec{\Phi}_j(x), \quad j=1,\ldots,n, \quad x\in\Omega_p,$$

де $\vec{U}(t,x)=\mathrm{col}(U^1(t,x),\ldots,U^m(t,x))$, $A_s(t)$ — квадратні матриці розміру $m\times m$, елементами яких є неперервні функції за змінною t на відрізку $[0,T]$, $A_{n,0,\ldots,0}$ — одинична матриця, $\mu(t)$ — обмежена на $[0,T]$ функція. Встановлено коректність цієї задачі у шкалі просторів Соболєва для всіх параметрів $\nu\in\mathbb{C}$ (за винятком множини як завгодно малої міри Лебега в $\mathbb{C}$).

У даній праці висвітлено результати досліджень авторів, їхніх учнів та колег, що стосуються дослідження коректної розв'язності та побудови розв'язків задач у багатовимірному шарі для лінійних еволюційних рівнянь і систем рівнянь (гіперболічних, параболічних, гіперболо-параболічних, а також рівнянь типу Соболєва — не розв'язаних відносно старшої похідної за часом) із загальними нелокальними умовами за часовою змінною вигляду (2), у яких $a_{j1}(t)=t^{r_j}$, $a_{jl}(t)\equiv 0$, $l=2,\ldots,n$, $r_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=1,\ldots,n$, а позаінтегральні доданки можуть бути лівими частинами локальних багатоточкових умов, локальних та нелокальних двоточкових крайових умов чи початкових умов, в класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними [67]. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків задач, використано метричний підхід.

1. Основні позначення.

Використовуватимемо наступні позначення: $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_x = -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p})$; $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $\hat{s} = (s_0, s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$; $\mu_k = (\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \dots + |\mu_{k_p}|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \dots + \mu_{k_p} x_p$; $D^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^p\}$, $\Pi_H^p = [0, H]^p$; C_q^r – кількість усіх комбінацій з q елементів по r; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега множини $A \subset \mathbb{R}^n$; C_j, $j = 1, 2, \dots,$ — додатні величини, що не залежать від k та μ_k.

$$\mathcal{V} := \{\nu_n \in \mathbb{R} : \nu_{-n} = -\nu_n, d_1 |n|^{\theta_1} \leqslant |\nu_n| \leqslant d_2 |n|^{\theta_2}, n \in \mathbb{Z}\}, \quad (6)$$

де $0 < d_1 \leqslant d_2$, $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2$;

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} = \nu_{k_j}, \nu_{k_j} \in \mathcal{V},\ j = 1, \dots, p, k \in \mathbb{Z}^p\}.$$

З (6) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються оцінки

$$D_1 |k|^{\theta_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant D_2 |k|^{\theta_2}, \quad (7)$$

де $D_1 = d_1 \min\{1, p^{1-\theta_1}\}$, $D_2 = d_2 \max\{1, p^{1-\theta_2}\}$.

2. Функціональні простори

Введемо простори майже періодичних за x функцій зі спектром $\mathcal{M}$, які використовуються даній роботі.

$\mathcal{T}_\mathcal{M}$ — простір поліномів $v(x) = \sum_k v_k \exp(i\mu_k, x)$, $v_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$. Збіжність послідовності $\{v^n\}_{n=1}^\infty$ в $\mathcal{T}_\mathcal{M}$ до елемента $v \in \mathcal{T}_\mathcal{M}$ визначається так:

1) $\exists n_0, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0, \quad v^n(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k^n \exp(i\mu_k, x)$,
2) $\forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \leqslant N, \quad v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$;

$\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ — простір формальних рядів $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, який співпадає з простором усіх антилінійних функціоналів над $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Дія функціоналу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ на елемент v простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ задається формулою

$$(f, v) = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} f(x)\overline{v(x)}dx = \sum_k f_k \bar{v}_k.$$

Послідовність $\{f_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ збігається до $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, якщо $(f_q, v) \xrightarrow[q\to\infty]{} (f, v)$ для довільного $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Елементи простору $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ будемо називати узагальненими майже періодичними функціями. Ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, який відповідає елементу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, називається рядом Фур'є узагальненої майже періодичної функції f, числа f_k — коефіцієнтами Фур'є. Легко бачити, що $f_k = (f, \exp(i\mu_k, x))$.

$W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ за нормою

$$\|v; W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{2\alpha} \exp(2\beta|\mu_k|^\gamma) \right)^{1/2};$$

$H^{\alpha}_{\mathcal{M}} \equiv W^{\alpha,0,0}_{\mathcal{M}}$; $W^{\alpha,\beta}_{\mathcal{M}} \equiv W^{\alpha,\beta,1}_{\mathcal{M}}$;

$\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}$, $m \in \mathbb{N}$, — простір вектор-функцій $\vec{v}(x) = \mathrm{col}(v^1(x), \ldots, v^m(x))$ таких, що $v^q(x) \in W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}$, $q = 1, \ldots, m$, із нормою

$$\|\vec{v}; \overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\| = \sum_{q=1}^{m} \|v^q; W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}\|;$$

$C^h\left([c,d]\,; \mathcal{T}_{\mathcal{M}}\right) \quad \left(C^h\left([c,d]\,; \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}\right)\right)$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір таких функцій $v\,(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t) \exp\left(i\mu_k, x\right)$, $v_k \in C^h\left[c,d\right]$, $k \in \mathbb{Z}^p$, що при кожному фіксованому $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k^{(j)}(t) \exp\left(i\mu_k, x\right)$, $j = 0, 1, \ldots, h$, належать простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}\,(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$;

$C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(i\mu_k, x)$, $u_k(t) \in C^h[c,d]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t)\exp(i\mu_k, x)$, $j = 0, 1, \ldots, h$, належать простору $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$ і є неперервними за t на $[c,d]$ у нормі цього простору,

$$\|u; C^n([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[c,d]} \|\partial_t^j u(t,x); W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\|;$$

$C^h([c,d], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}\big(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\big)$ таких, що $u^q(t,x) \in C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $q = 1, \ldots, m$, із нормою

$$\|\vec{u}; C^h([c,d], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})\| = \sum_{q=1}^{m} \|u^q; C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})\|;$$

$\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{(l,h)}(\overline{D}^p)$ — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}(u^1(t,x), \ldots, \ldots, u^m(t,x))$, які є l разів неперервно диференційовними за змінною t та h разів неперервно диференційовними і майже періодичними за x зі спектром $\mathcal{M}$ із нормою

$$\left\|u; C_{\mathcal{M}}^{(l,h)}(\overline{D}^p)\right\| = \sum_{q=1}^{m} \sum_{\substack{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h\\ s_0\leqslant l}} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u^q(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|.$$

$\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\mathbb{R}^p)$ — підпростір вектор-функцій із $\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{(l,h)}(\overline{D}^p)$, які не залежать від t;

$\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}_{\mathcal{M},m}^{(h,h)}(\overline{D}^p)$, $C_{\mathcal{M}}^{(l,h)}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}_{\mathcal{M},1}^{(l,h)}(\overline{D}^p)$,

$C_{\mathcal{M}}^{h}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}_{\mathcal{M},1}^{(h,h)}(\overline{D}^p)$, $C_{\mathcal{M}}^{h}(\mathbb{R}^p) \equiv \overline{C}_{\mathcal{M},1}^{h}(\mathbb{R}^p)$.

3. Відомості з метричної теорії чисел

Наведемо ряд результатів з метричної теорії діофантових наближень, які використовуються при дослідженні оцінок знизу малих знаменників, що виникають у розглядуваних задачах.

Лема 1 (Борель-Кантеллі, [53]). *Нехай $A_q, q = 1, 2, \dots,$ – послідовність вимірних за Лебегом множин із $\mathbb{R}^n$, причому*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q < \infty.$$

Тоді міра Лебега множини тих точок із $\mathbb{R}^n$, що потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулеві.

Лема 2 (Бернік, [5]). *Нехай функція $f(x)$ є $(n+1)$ раз неперервно диференційовною на відрізку $[a, b]$ і нехай для всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(x)| \geqslant C_1 > 0.$$

Тоді міра Лебега множини тих $x \in [a, b]$, для яких

$$|f(x)| < \varepsilon, \qquad \varepsilon < C_1,$$

не перевищує $C_2 \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$, $C_2 = C_2(n)$.

Лема 3 (Ільків, [14]). *Нехай $f(y) = f(y_1, \dots, y_p)$ – дійснозначна функція, яка є досить гладкою в обмеженій однозв'язній області $G \subset \mathbb{R}^p$, і нехай похідні*

$$\frac{\partial^{|s|} f(y)}{\partial y_1^{s_1} \dots \partial y_p^{s_p}}, \quad |s| < q,$$

як функції однієї змінної y_m (при решті фіксованих змінних), $1 < m < p$, мають в області G скінченну кількість нулів. Якщо в G

$$\left|\frac{\partial^q f(y)}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_p^{q_p}}\right| \geqslant \delta > 0, \quad q = \sum_{j=1}^{p} q_j, \quad q \geqslant 1, \quad q_j \in \mathbb{Z}_+,$$
$$j = 1, \dots, p,$$

то міра Лебега в $\mathbb{R}^p$ множини тих $y \in G$, для яких $|f(y)| < \varepsilon$, не перевищує величини $C_3 \sqrt[q]{\varepsilon/\delta}, C_3 = C_3(G, q)$.

Розглянемо квазімногочлен

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) \exp(\lambda_j t), \quad t \in [0, T_0], \quad 0 < T_0 < \infty. \tag{8}$$

де $P_j(t)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня не вище $(N_j - 1)$ за змінною t, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$. Позначимо

$$N_1 + \cdots + N_m := N, \quad 1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j| := B, \quad \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \operatorname{Re} \lambda_j := M,$$

$$\max_{t \in [0, T_0]} \exp(-Mt) := \Psi, \quad \max_{1 \leqslant q \leqslant N} \left\{ B^{-q} \left| Q^{(q-1)}(t)|_{t=0} \right| \right\} := F.$$

Лема 4 (Симотюк, Медвідь, [33])**.** *Існують такі сталі C_4, C_5 (які залежать тільки від n та T_0), що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = C_4 F/(4\Psi B^{N-1})$, виконується нерівність*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{ t \in [0, T_0] : |Q(t)| < \varepsilon \} \leqslant C_5 B \left(\frac{4\varepsilon\Psi}{C_4 F} \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

4. Загальна постановка задачі. Розв'язність у класах функцій $C^n([0, T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$.

Всі задачі, про які нижче йтиме мова, можна об'єднати такою загальною постановкою: в області D^p для еволюційного рівняння

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] := \left(A_n(t, \partial_x) \partial_t^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, \partial_x) \partial_t^j \right) u(t, x) = f(t, x), \tag{9}$$

потрібно знайти майже періодичний за змінними $x_1, \ldots, x_p$ зі заданим спектром $\mathcal{M}$ розв'язок, який за змінною t задовольняє умови

$$U_j[u] := \alpha_j L_j[u] + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t, x) dt = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

де $A_q(t,\eta)$, $\eta\in\mathbb{R}^p$, — многочлен за сукупністю змінних $\eta_1,\dots,\eta_p$ степеня N_q, $q=0,1,\dots,n$, з комплексними коефіцієнтами; $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}$, $\alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0$, $r_j\in\mathbb{Z}_+$, L_j — лінійні функціонали, які можуть містити значення функції $u(t,x)$ та її похідних за змінною t у точках $t=0$ та $t=T$ або у деяких точках $t_1,\dots,t_n$ відрізка $[0,T]$, $j=1,\dots,n$; $r_1<\dots<r_n$; $f(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,n$, — майже періодичні за x функції зі спектром $\mathcal{M}$,

$$f(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k(t)\exp(i\mu_k,x),$$

$$\varphi_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{jk}\exp(i\mu_k,x),\quad j=1,\dots,n,$$

де

$$f_k(t)=\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{[0,H]^p} f(t,x)\exp(-i\mu_k,x)dx,$$

$$\varphi_{jk}=\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{[0,H]^p}\varphi_j(x)\exp(-i\mu_k,x)dx,\quad j=1,\dots,n.$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (9), (10) *із простору* $C^n([0,T],\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$ *називаємо ряд*

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(i\mu_k,x),\quad \mu_k\in\mathcal{M},$$

де кожен із коефіцієнтів u_k, $k\in\mathbb{Z}^p$, *належить простору* $C^n([0,T])$ *і задовольняє рівняння*

$$\left(A_n(\mu_k)\frac{d^n}{dt^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(t,\mu_k)\frac{d^j}{dt^j}\right)u_k(t)=f_k(t),\tag{11}$$

та рівності

$$U_j[u_k]:=\alpha_j L_j[u_k]+\beta_j\int_0^T t^{r_j}u_k(t)dt=\varphi_{jk},\quad j=1,\dots,n.\tag{12}$$

Нехай функції $u_{qk} := u_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (11), а $\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[u_{qk}]\|_{j,q=1}^n$ — характеристичний визначник задачі (11), (12)(див. [55, с. 98]).

Твердження 1. *Для того, щоб задача* (9), (10) *мала не більше одного майже періодичного за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку у просторі $C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{13}$$

За умови (13) розв'язок задачі (9), (10) зображується у вигляді формального ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{q,j=1}^n \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} u_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{14}$$

де $G_k(t,\tau)$ — функція Гріна задачі (11), (12) [55], $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ — алгебраїчне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$ елемента j-го рядка та q-го стовця.

Твердження 2. *Нехай справджується умова* (13). *Якщо $f(t,x) \in C([0,T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$, $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ $(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, $j = 1, \ldots, n$, то існує єдиний розв'язок задачі* (9), (10) *із простору $C^n([0,T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$. Цей розв'язок зображується формулою* (14).

Твердження 1, 2 безпосередньо переносяться на випадок систем рівнянь вигляду (9).

Для проміжних просторів між $C^n([0,T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ та $C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$ питання існування майже періодичного за x із заданим спектром $\mathcal{M}$ розв'язку задачі (9), (10) у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вирази $|\Delta(\mu_k, T)|$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, у формулі (14), будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які тут мають складну нелінійну структуру, використано метричний підхід. Із доведених у роботах авторів метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників випливає (за певних умов на вихідні дані задач) існування єдиного розв'язку для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів крайових умов.

5. Гіперболічні рівняння та системи

Однією з перших робіт, де вивчались задачі з інтегральними умовами за часом для гіперболічних рівнянь у класі майже періодичних функцій за просторовими змінними була робота [64].

У праці [24] досліджена задача із загальнішими, ніж у [64], умовами для гіперболічного рівняння другого порядку:

$$N[u] := \partial_t^2 u(t,x) - a^2 \Delta u(t,x) + c^2 u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D^p, \tag{15}$$

$$U_j[u] := \alpha_j \, u|_{t=t_j} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j=1,2, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{16}$$

де $a > 0, c > 0$; $t_1 = 0, t_2 = T$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, j = 1,2$; $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+, r_2 > r_1$, а функції $f(t,x)$ та $\varphi_j(x), j = 1,2$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Для єдиності розв'язку задачі (15), (16) у просторі $C^2_{\mathcal{M}}([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (13), в якій $\Delta(\mu_k, T)$ визначений формулою

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = (\alpha_1 + \beta_1 I_{12})(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{21}) - \\ - (\alpha_1 + \beta_1 I_{11})(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}), \end{aligned} \tag{17}$$

де $\gamma_k = \sqrt{a^2 \left\|\mu_k\right\|^2 + c^2}$,

$$I_{qj} := -\sum_{l=1}^{r_q+1} \frac{(-1)^{(l+1)} r_q!}{(r_q - l + 1)!} \frac{T^{r_q - l + 1}}{(i\gamma_k)^l} \exp((-1)^j i\gamma_k T) + \frac{(-1)^{r_q(j+1)} r_q!}{(i\gamma_k)^{r_q+1}}, \quad q, j = 1, 2.$$

Теорема 1. *Нехай справджується умова* (13) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{18}$$

Якщо $f \in C_{\mathcal{M}}^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}(\overline{D}^p)$, $\varphi_j \in C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+3}(\mathbb{R}^p), j = 1, 2$, *де* θ_1 *– стала з оцінок* (7), *то існує єдиний розв'язок задачі* (15), (16) *із простору* $C_{\mathcal{M}}^2(\overline{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t, x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$.

На підставі лем 1 та 2 встановлено, що для довільних фіксованих $a, c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ та $\beta_2 \neq 0$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ оцінка (18) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ при

$$\eta > \begin{cases} 1 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ r_1 + 2 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Отримані результати поширено [26] на гіперболічні рівняння порядку $2n$, $n \geqslant 1$, зі сталими коефіцієнтами. В області D^p розглянуто таку задачу:

$$L[u] := \sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t, x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{19}$$

$$
\begin{cases}
U_j[u] := \alpha_j \left. \dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}} \right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \\
U_{n+j}[u] := \alpha_{n+j} \left. \dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}} \right|_{t=T} + \\
\qquad\qquad\qquad + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}} u(t,x)dt = \varphi_{n+j}(x),
\end{cases}
\tag{20}
$$

де $j = 1, \dots, n$, $A_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $A_{(2n,0,\dots,0)} = 1$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, 2n\}$, $r_1 < r_2 < \dots < r_{2n}$, $r = r_1 + \dots + r_{2n}$; функції $\varphi_l(x), l = 1, \dots, 2n$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Вважаємо, що оператор L є гіперболічним за Гордінгом [12, с. 148].

Нехай $\Delta(\mu_k, T) := \det \|U_j[f_{qk}]\|_{j,q=1}^{2n}$, де $\{f_{qk}(t), q = 1, \dots, 2n\}$ — нормальна (при $t = 0$) фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння $\sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} i^{|\hat{s}|} \mu_k^s f^{(s_0)}(t) = 0$.

Для того, щоб задача (19), (20) мала не більше одного розв'язку у шкалі просторів $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$, необхідно і достатньо, щоб $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

За умови єдиності існує розв'язок u задачі (19), (20) із простору $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$, якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується нерівність

$$
|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma|\mu_k|), \qquad \eta > 0, \ \sigma \geqslant 0, \tag{21}
$$

а $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+1+\alpha,\, \sigma+\beta}$, $j = 1, \dots, 2n$; при цьому $\|u; C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})\| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+1+\alpha,\, \sigma+\beta}\|$.

Позначимо: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$, $\mathcal{D}(\mu_k, \tau) := \Delta(\mu_k, T)|_{T=\tau}$, λ_{lk} — різні корені рівняння

$$
\sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} i^{|\hat{s}|} \mu_k^s \lambda^{s_0} = 0, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{22}
$$

із кратностями n_l, $l \in \{1, \dots, m\}$, відповідно, причому кратності коренів не залежать від μ_k.

Лема 5. *Існує таке число $\eta_0(\vec{\alpha}) \in \mathbb{N}$, що виконуються рівності*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \left.\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ C_7 \eta_0(\vec{\alpha})!, & q = \eta_0(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{23}$$

де C_7 — стала, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j = 1, \ldots, 2n$.

На підставі лем 4, 5 доведено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність (21) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли

$$\sigma = (2n)^{p+1} T_0 \max_{|\hat{s}| \leqslant 2n} \{|A_{\hat{s}}|\},$$

$$\eta > \eta_0(\vec{\alpha}) + 1 + (p/\theta_1 + 1)(4^n(1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)) - 1),$$

де $\eta_0(\vec{\alpha})$ — стала, визначена з рівності (23), θ_1 — з оцінок (7), $r = r_1 + \cdots + r_{2n}$, а n_l, $l = 1, \ldots, m$, – кратності λ-коренів рівняння (22).

Якщо λ-корені рівняння (22) є такими, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності $\mathrm{Re}\lambda_{lk} \geqslant -\kappa \ln |\mu_k|$, $l = 1, \ldots, m$, $\kappa > 0$, то за умов єдиності, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20) із простору $C^{2n}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, якщо $\varphi_j \in C^{[\eta+p/\theta_1]+4n^2+3n+2}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)$, $j = 1, \ldots, 2n$, де $\eta > \eta_0(\vec{\alpha}) + 1 + 2n\kappa T + \left(4^n(1+r+\sum_{l=1}^m n_l(n_l-1))-1\right)(p/\theta_1+1)$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Задачі з інтегральними умовами для гіперболічних систем рівнянь розглядались у працях [27, 72]. Зокрема, у [72] в області D^p розглянуто таку задачу:

$$\mathbf{L}\left(\partial_t^2, \partial_x\right)[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|^* = 2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = \vec{0}, \ (t,x) \in D^p, \tag{24}$$

$$\begin{cases} U_j[\vec{u}] := \alpha_j \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \\ U_{n+j}[\vec{u}] := \alpha_{n+j} \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \\ \qquad\qquad\qquad + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_{n+j}(x), \end{cases} \tag{25}$$

де $j = 1,\dots,n$; $\mathbf{A}_{\hat{s}} = \|a^{\hat{s}}_{q,l}\|^m_{l,q=1}$, $a^{\hat{s}}_{q,l} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{(n,0,\dots,0)} = \mathbf{I}_m$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l = 1,\dots,2n$; $r_1 < r_2 < \dots < r_{2n}$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x),\dots,u^m(t,x)\right)$, вектор-функції $\vec{\varphi}_l(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_l^1(x),\dots,\varphi_l^m(x)\right)$, $l = 1,\dots,2n$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Вважаємо, що система (24) — гіперболічна за Петровським у вузькому сенсі. Тоді всі корені γ_{jk}, $j = 1,\dots,2nm$, рівняння $\det \mathbf{L}\left(\gamma^2, i\mu_k\right) = 0$ є дійсними і різними, а отже, відмінними від нуля.

Для єдиності розв'язку задачі (24), (25) у шкалі просторів $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (13), у якій

$$\Delta(\mu_k, T) := \det \|U_q[\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t)]\|^{q=1,\dots,2n}_{j=1,\dots,2nm}, \tag{26}$$

де $\vec{h}_{jk}$ — деякий ненульовий стовпець матриці $\mathbf{L}^*(\gamma^2_{jk}, i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $\mathbf{L}(\gamma^2_{jk}, i\mu_k)$.

Запровадимо величини $\psi_l(\alpha_l)$ визначені наступним чином:

$$\psi_l(\alpha_l) := \begin{cases} 0, & \alpha_l = 0 \quad 1 \leqslant l \leqslant 2n, \\ 2(l-1), & \alpha_l \neq 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant n, \\ 2(l-n-1), & \alpha_l \neq 0, \quad n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{cases}$$

Позначимо:

$$\psi := \psi_1(\alpha_1) + \dots + \psi_{2n}(\alpha_{2n}), \quad \vartheta_l := m\psi - \psi_l(\alpha_l), \quad l = 1,\dots,2n.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (13) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів*

$\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{27}$$

Якщо $\vec{\varphi}_l \in \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m}$, $\xi_l = 2n(2nm(m-1)+1) + \eta + \vartheta_l + \alpha$, $l = 1, \ldots, 2n$, *то існує розв'язок* $\vec{u}$ *задачі* (24), (25) *із простору* $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right)$; *при цьому справджується оцінка* $\|\vec{u}; C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right)\| \leqslant C_8 \sum_{l=1}^{2n} \|\varphi; \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m}\|$.

Встановлено, що існує число $\delta(\vec{\alpha}) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left.\frac{d^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{d\tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \delta(\vec{\alpha}), \\ \delta(\vec{\alpha})!\, C_9 W(\mu_k), & q = \delta(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{28}$$

де C_9 — стала, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j = 1, \ldots, 2n$, $\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = \Delta(\mu_k, T)|_{T=\tau}$, $W(\mu_k) = \det \|\vec{h}_{jk} \gamma_{jk}^{l-1}\|^{j=1,\ldots,2nm}_{l=1,\ldots,2n}$.

На підставі (28) та леми 4 доведено наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай існує стала* $\eta_0 \geqslant 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|W(\mu_k)| > C_{10}(1 + |\mu_k|)^{\eta_0}. \tag{29}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівність* (27) *справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *при*

$$\eta > \delta(\vec{\alpha}) - \eta_0 + 1 + \left(1 + 2^{nm+1}\right)(1 + p/\theta_1)\left(1 + m(r_1 + \cdots + r_{2n})\right),$$

де θ_1 — *стала з нерівностей* (7).

Якщо $p = 1$, то нерівність (29) виконується при $\eta_0 > 4n^2 m(m-1) + nm(2n-1)$, а у скалярному випадку ($m = 1$) — при $\eta_0 = 0$.

У праці [27] в області D^3 для системи диференціальних рівнянь, яка описує напружений стан ізотропного та однорідного пружного тіла у переміщеннях (система Ламе)

$$\begin{aligned} &L\left(\partial_t^2, \partial_x\right) \vec{u}(t,x) := \\ &\sigma \partial_t^2 \vec{u}(t,x) = \mu^* \Delta \vec{u}(t,x) + (\lambda^* + \mu^*) \partial_x' \partial_x \vec{u}(t,x),\ (t,x) \in D^3, \end{aligned} \tag{30}$$

розглянуто задачу з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j \vec{u}(t_j, x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x),\ j = 1,2,\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{31}$$

де $\vec{u} := \vec{u}(t,x) = \operatorname{col}(u^1(t,x), u^2(t,x), u^3(t,x))$ — вектор переміщень; t — час; $\lambda^* > 0$, $\mu^* > 0$ — коефіцієнти Ламе, $\sigma > 0$ — густина середовища; $\partial'_x = \operatorname{col}(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $t_1 = 0$, $t_2 = T$; $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $j = 1,2$; $r_1,\ r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $r_1 < r_2$; кожна з компонент вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \operatorname{col}(\varphi_j^1(x), \varphi_j^2(x), \varphi_j^3(x))$, $j = 1,2$, є майже періодичними із заданим спектром $\mathcal{M}$.

Характеристичне рівняння, яке відповідає системі (30), має вигляд

$$\det \left\| \left(\sigma\gamma^2 - \mu^* \|\eta\|^2 \right) \mathbf{I}_3 - (\lambda^* + \mu^*) \|\eta_j \eta_l\|_{j,l=1}^3 \right\| = 0,$$

де $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$; γ-корені цього рівняння визначаються формулами

$$\gamma_1(\eta) = \gamma_2(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \quad \gamma_3(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}},$$
$$\gamma_4(\eta) = \gamma_5(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \quad \gamma_6(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}},$$

з яких видно, що система (30) є гіперболічною за Петровським у широкому сенсі.

Позначимо:

$$\vec{h}_{1k} = \operatorname{col}\left(\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}, 0, -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|} \right), \quad \vec{h}_{2k} = \operatorname{col}\left(0, \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}, -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|} \right),$$
$$\vec{h}_{3k} = \operatorname{col}\left(\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}, \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}, \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|} \right);$$

$$\vec{u}_{jk}(t) = \vec{h}_{jk} \exp(i\gamma_j(\mu_k)t), \quad \vec{u}_{3+j,k}(t) = \vec{h}_{jk} \exp(-i\gamma_j(\mu_k)t),$$
$$j = 1,2,3;$$

$$\Delta(\mu_k, T) := \det \|U_j[\vec{u}_{lk}]\|_{j=1,2}^{l=1,\ldots,6}. \qquad (32)$$

Для єдиності розв'язку задачі (30), (31) у шкалі просторів $C^2([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},3})$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (13), у якій $\Delta(\mu_k, T)$ — визначник (32).

Запровадимо величину $\delta(\alpha_1, \alpha_2)$, визначену наступним чином:

$$\delta(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} 3, & \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ 3(r_1+2), & \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ 3(r_2+2), & \alpha_2 = 0, \ \ \alpha_1 \neq 0, \\ 3(r_2+r_1+3), & \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 = 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Якщо виконується умова (13) та $\vec{\varphi}_j \in \overline{H}^{\eta+\alpha+2}_{\mathcal{M},3}$, $j = 1, 2$, де $\eta > \delta(\alpha_1, \alpha_2) + 17\left(\dfrac{3}{\theta_1} + 1\right)(1 + 3(r_1 + r_2))$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ існує розв'язок $\vec{u}$ задачі (30), (31) із простору $C^2([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},3})$, який неперервно залежить від функцій $\vec{\varphi}_j$, $j = 1, 2$.

6. Параболічні рівняння та системи

На відміну від гіперболічних рівнянь, для параболічних рівнянь вдається виділити випадки задач з інтегральними умовами вигляду (10), у яких відсутня проблема малих знаменників.

В області D^p для факторизованого рівняння

$$L(\partial_t, \Delta)\, u(t,x) := \prod_{j=1}^{n} (\partial_t - a_j(t)\Delta)\, u(t,x) = 0, \qquad (34)$$

у роботі [25] розглядалася задача з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_j, x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \ \ j = 1, \ldots, n, \qquad (35)$$

де $a_j(t) \in C^{n-j}([0,T])$, $a_j(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_s(t)$, $q \neq s$, $t \in [0,T]$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$,

$r_1 < \ldots < r_n$; оператори $(\partial_t - a_j(t)\Delta)$, $j = 1, \ldots, n$, у рівнянні (34) діють на функцію $u(t, x)$ у порядку зростання індексу j; функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Очевидно, що рівняння (34) є параболічним за Петровським.

Запровадимо такі позначення:

$$I_0(t) \equiv 0, \quad I_j(t) = -\int_0^t a_j(\tau)d\tau, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\Theta_q(t) = I_q(t) - I_{q-1}(t), \quad \mathcal{E}_{qk}(\tau) = \exp\left(\Theta_q(\tau)\|\mu_k\|^2\right), \ q = 1, \ldots, n;$$

$$\begin{cases} f_{1k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t), \\ f_{2k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1)d\tau_1, \\ f_{3k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \left(\mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_{3k}(\tau_2)d\tau_2\right) d\tau_1, \\ \quad \vdots \\ f_{nk}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \times \ldots \left(\int_0^{\tau_{n-2}} \mathcal{E}_{nk}(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}\right) \ldots d\tau_1. \end{cases}$$

$$\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) := \det \|\alpha_j f_{qk}(t_j) + \beta_j \mathcal{I}_{jq}\|_{j,q=1}^n, \ \vec{t} = (t_1, \ldots, t_n),$$

$$\mathcal{I}_{jq} := \int_0^T t^{r_j} f_{qk}(t)dt, \ j, q = 1, \ldots, n.$$

Для того, щоб задача (34), (35) мала не більше одного розв'язку у шкалі просторів $C^n([0, T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha, \beta, 2})$, необхідно і достатньо, щоб $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0$ для всіх векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова єдиності розв'язку задачі* (34), (35) *та існують додатні сталі* η, ν *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2). \tag{36}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1, q_2, 2}$, $q_1 = \eta + 2n + \alpha$, $q_2 = n(n-1)A_1/2 + \nu + \beta$,

$$A_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \max_{t \in [0,T]} \int_0^t \left(a_j(\tau) - a_{j+1}(\tau)\right) d\tau \right\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то існує розв'язок задачі (34), (35) *із простору* $C^n([0,T], W^{\alpha,\beta,2}_{\mathcal{M}})$*; при цьому*

$$\|u; C^n([0,T], W^{\alpha,\beta,2}_{\mathcal{M}})\| \leqslant C_{11} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; W^{q_1,q_2,2}_{\mathcal{M}})\|.$$

На підставі леми 3 встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і для довільних фіксованих решти параметрів задачі (34), (35) оцінка (36) виконується при $\eta > n(n+1)p/(2\theta_1)$ та $\nu > n(n+1)A_2T/2$, $A_2 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|a_j; C[0,T]\|$.

Встановлено, що якщо в умовах (35) $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, то існування розв'язку задачі (34), (35) у шкалі просторів $C^n([0,T], W^{\alpha,\beta,2}_{\mathcal{M}})$ не пов'язане з проблемою малих знаменників.

У цьому випадку визначник $\Delta(\mu_k, T) := \Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ вдається зобразити [43] у вигляді :

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{\tilde{\beta}}{n!} \int\limits_{\Pi^n_T} \widetilde{\Delta}(\tau)\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau, \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (37)$$

де $\widetilde{\Delta}(\tau) = \det \|\tau_j^{r_l}\|^n_{j,l=1}$, $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) = \det \|f_{lk}(\tau_j)\|^n_{l,j=1}$, $\tilde{\beta} = \prod_{j=1}^n \beta_j$.

Нехай S_n — симетрична група перестановок елементів множини $\{1, \ldots, n\}$. Позначимо через $\mathcal{S}^n_\omega$, $\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, симплекс $\{(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Pi^n_T : \tau_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{i_n}\}$. Очевидно, що $\widetilde{\Delta}(\tau) > 0$, якщо $\tau = \mathcal{S}^n_{\omega_0}$, де $\omega_0 = (1, \ldots, n)$. На симплексі $\mathcal{S}^n_{\omega_0}$ визначник $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)$ співпадає з характеристичним визначником задачі з умовами

$$\overline{U}_j[u_k] := u_k(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

для рівняння $L\left(d/dt, -\|\mu_k\|^2\right) u_k(t) = 0$. Із теореми Скоробогатька [7, с. 31] про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального оператора n-ого порядку, що розпадається на лінійні дійсні множники першого порядку, випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) > 0$ або $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) < 0$ на симплексі $\mathcal{S}^n_{\omega_0}$.

Легко помітити, що для довільної перестановки $\omega \in S_n$ справджуються такі тотожності

$$\widetilde{\Delta}(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \widetilde{\Delta}(\tau_1, \dots, \tau_n), \tag{38}$$

$$\bar{\Delta}(\mu_k, \tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \bar{\Delta}(\mu_k, \tau_1, \dots, \tau_n), \tag{39}$$

де ρ_ω — кількість інверсій у перестановці $\omega \in S_n$. На підставі (37)–(39) отримуємо, що

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{\tilde{\beta}}{n!} \sum_{\omega \in S_n} \int\limits_{\mathcal{S}^n_\omega} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau = \tilde{\beta} \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau. \tag{40}$$

Зі сказаного вище та рівності (40) випливає, що $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$, тобто виконується умова єдиності розв'язку задачі (34), (35).

З формули (40) отримуємо, що

$$|\Delta(\mu_k, T)| = |\tilde{\beta}| \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| d\tau. \tag{41}$$

Уведемо такі множини:

$$\Omega(\xi) = \{\tau \in S^n_{\omega_0} : \widetilde{\Delta}(\tau) > \xi,\, \xi > 0\},$$
$$E(\mu_k) = \{\tau \in \Omega(\xi) : |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| < \varepsilon_k\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M},$$

де $\varepsilon_k := (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2)$, $\eta > n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\nu > n(n+1)A_2 T/2$.

Із (41) випливає, що

$$\begin{aligned} |\Delta(\mu_k, T)| >& |\tilde{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| d\tau > \\ & > |\tilde{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi) \setminus E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| d\tau. \end{aligned} \tag{42}$$

Очевидно, що (див. теорему 5 у [56])

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E(\mu_k) < (1+|k|)^{-p+\theta}, \ \theta > 0, \ \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{43}$$

На підставі леми 3 отримуємо таку оцінку:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} \Omega(\xi) \geqslant \frac{T^n}{n!} - \left(\xi / \prod_{j=1}^{n} r_j!\right)^{1/r} := \chi(\xi), \ r = r_1 + \cdots + r_n. \tag{44}$$

З оцінок (42)–(44) випливає, що

$$\begin{aligned} |\Delta(\mu_k, T)| > |\tilde{\beta}| \xi \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}(\Omega(\xi) \setminus E(\mu_k)) \varepsilon_k > \\ > |\tilde{\beta}|\, \xi \left(\chi(\xi) - (1+|k|)^{-p+\theta}\right) \varepsilon_k, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{45}$$

На підставі (45) отримуємо, що для достатньо великих $|\mu_k|$ виконується оцінка

$$|\Delta(\mu_k, T)| > \frac{|\bar{\beta}|}{2} \xi\, \chi(\xi) \varepsilon_k > C_{13}(1+|\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2), \tag{46}$$

де $C_{12} = |\tilde{\beta}|\, \xi\, \chi(\xi)/2$, $\eta > n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\nu > n(n+1)A_2 T/2$.

З нерівності (46) випливає, що, якщо в умовах (35) $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, то оцінка (36) при $\eta > n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\nu > n(n+1)A_2T/2$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ та для довільних фіксованих параметрів задачі (34), (35), тобто розв'язність задачі не пов'язана з проблемою малих знаменників.

Отримані результати частково поширено [29] на параболічні системи рівнянь порядку n, $n \geqslant 1$, за часовою змінною зі сталими коефіцієнтами. В області D^p для параболічної за Шиловим системи рівнянь з показником параболічності h (див. [12, с. 130])

$$\mathbf{L}\left(\partial_t, \partial_x\right)[u] := \partial_t^n \vec{u}(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_j\left(\partial_x\right) \partial_t^j \vec{u}(t,x) = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^p, \tag{47}$$

досліджено задачу з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j\, \partial_t^{j-1}\vec{u}(t,x)\Big|_{t=0} + \beta_j \int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^p, \tag{48}$$

де $\mathbf{A}_j(\eta) := \|\sum_{|s|\leqslant N} a_{ql,s}^j \eta^s\|_{q,l=1}^m$, $a_{ql,s}^j \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, $N > n$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$; $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), \ldots,\ u^m(t,x))$, вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x), \ldots, \varphi_j^m(x)\right)$, $j = 1, \ldots, n$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Для єдиності розв'язку задачі (19), (20) у шкалі просторів $C^n([0,T], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (13), в якій $\Delta(\mu_k, T)$ визначений формулою

$$\Delta(\mu_k, T) := \det\left\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\int_0^T \mathbf{R}(t)\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)dt\right\|,$$

де $\mathbf{A} := \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \otimes \mathbf{I}_m$, $\mathbf{B} := \mathrm{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \otimes \mathbf{I}_m$,

$$\mathbf{R}(t) := \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_m,$$

$$\mathcal{L}\left(i\mu_k\right) := \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m(n-1),m} & \mathbf{I}_{m(n-1)} \\ -\mathbf{A}_0(i\mu_k) & -\mathbf{A}_1(i\mu_k)\cdots - \mathbf{A}_{n-1}(i\mu_k) \end{pmatrix},$$

Нехай

$$\{j_1, \ldots, j_l\} \subset \{1, \ldots, n\}, \quad \{q_1, \ldots, q_{n-l}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_l\},$$

$$\eta_0 := r_{q_1} + \cdots + r_{q_{n-l}} + q_1 + \cdots + q_{n-l},$$

$$\psi_j(\beta_j) := \begin{cases} \max\left\{0, (mn-1)N - hr_j\right\}, & \text{якщо } \beta_j \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \beta_j = 0, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Якщо в (48) $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, виконується умова (13), і $\vec{\varphi}_j \in \overline{W}^{\xi_j,\sigma+\beta,h}_{\mathcal{M},m}$, $j = 1, \ldots, n$, де

$$\xi_j = \alpha + (m\eta_0(\alpha) + 1)N + 2^{mn}\left(1 + p/\theta_1\right)(1 + mr) +$$

$$+(2mn + 1)N - \psi_j(\beta_j) + m\sum_{g=1}^{n}\psi_g(\beta_g),$$

$$\sigma = 2^{N-1}mnT_0(nm)^p \max_{|s|\leqslant N} \max_{\substack{1\leqslant q,l\leqslant m\\ 0\leqslant j\leqslant n-1}} \left\{|a^j_{ql,s}|\right\}, \quad T_0 > 0,$$

то встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [0, T_0]$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}$ задачі (47), (48) із простору $C^n([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})$; при цьому справджується оцінка $\|\bar{u}; C^n([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})\| \leqslant C_{13}\sum_{j=1}^{n}\|\vec{\varphi}_j; \overline{W}^{\xi_j,\sigma,h}_{\mathcal{M},m}\|$.

Якщо в задачі (47), (48) $n = 1$, то встановлено, що існування розв'язку задачі (47), (48) не пов'язане з проблемою малих знаменників.

7. Мішані параболо-гіперболічні рівняння

Важливим напрямком сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є теорія крайових задач для рівнянь мішаного типу, які мають важливе застосування у газовій динаміці, у магнітній гідродинаміці, у теорії електричних кіл, у теорії нескінченно малих згинів поверхонь, у безмоментній теорії оболонок з кривизною змінного знаку та інші.

Уперше на необхідність розгляду крайових задач для мішаних рівнянь параболо-гіперболічного типу, де в одній частині області задано параболічне рівняння, а в іншій — гіперболічне, було вказано І. М. Гельфандом [11]. Крайові задачі з локальними та нелокальними умовами (у тому числі інтегральними) для таких рівнянь досліджувались у роботах Г. М. Стручіної [54], Я. С. Уфлянда [59], Л. А. Золіної [15], А. М. Нахушева та

Х. Г. Бжихатлова [6], К. Б. Сабітова [48, 74], В. О. Капустяна та І. О. Пишнограєва [20], І. Я. Савки [49] та ін.

В області $\mathcal{D}^p = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (-T_1, T_2), x \in \mathbb{R}^p\}$, $T_1, T_2 > 0$, досліджено [30] задачу про знаходження майже періодичного за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку рівняння

$$\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = 0, & (t,x) \in \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}, \\ \partial_t^2 u - b^2 \Delta u = 0, & (t,x) \in \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}, \end{cases} \tag{49}$$

який справджує умови

$$\alpha u(-T_1, x) + \beta u(T_2, x) + \gamma \int_{-T_1}^{T_2} u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{50}$$

$$u \in C^1([-T_1, T_2]; W_{\mathcal{M}}^{q,s,2}) \cap C^2([-T_1, 0], W_{\mathcal{M}}^{q,s,2}), \;\; q \in \mathbb{R}, s \geqslant 0, \tag{51}$$

де $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, $\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2) \neq 0$, функція $\varphi(x)$ є майже періодичною зі спектром $\mathcal{M}$.

Для того, щоб задача (49)-(51) мала не більше одного розв'язку, необхідно і достатньо, щоб для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$

$$\frac{A(\mu_k)\sin(b\|\mu_k\|T_1 + \psi_k) + B(\mu_k, T_2)}{ab^2\|\mu_k\|^2} \neq 0,$$

де

$$A(\mu_k) = a\|\mu_k\|\sqrt{a^2b^2\alpha^2\|\mu_k\|^4 + (b^4\alpha^2 + a^2\gamma^2)\|\mu_k\|^2 + b^2\gamma^2},$$

$$B(\mu_k, T_2) = a^2\gamma\|\mu_k\|^2 + b^2\left(\gamma + (a\beta\|\mu_k\|^2 - \gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2 T_2)\right),$$

$$\psi_k = \arctan\frac{(\alpha b^2 - a\gamma)\|\mu_k\|}{ab\alpha\|\mu_k\|^2 + \gamma b}.$$

За умови єдиності, якщо $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$ та $\varphi \in W_{\mathcal{M}}^{q+5,0}$ (або $\alpha \neq 0$ та $\varphi \in W_{\mathcal{M}}^{q+2+p/\theta_1,0}$), то існує (існує для майже всіх, стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$, точок $T_1 > 0$) розв'язок u задачі (49), (50), у шкалі просторів $C^1([-T_1, T_2]; W_{\mathcal{M}}^{q,0}) \cap C^2([-T_1, 0], W_{\mathcal{M}}^{q,0})$, який неперервно залежить від функції $\varphi(x)$.

Якщо в (49) $\alpha = \gamma = 0$ і $\varphi(x) \in W_{\mathcal{M}}^{q+3,s+aT_2}$, то доведено існування єдиного розв'язку u задачі (49)-(51), який неперервно залежить від функції $\varphi(x)$.

8. Рівняння, не розв'язані відносно старшої похідної за часом

Математичне моделювання багатьох задач гідродинаміки (малі коливання ідеальної рідини у посудині, що обертається [52], фільтрація рідини у тріщинуватих породах [2] та ін.), призводить до задач з крайовими та нелокальними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

Такі задачі досліджувались багатьма авторами, зокрема, у працях [3, 21, 23] вивчались багатоточкові задачі та задачі типу Діріхле для рівнянь та систем рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом у класах функцій, 2π-періодичних за просторовими змінними. Однак задачі з інтегральними умовами для таких рівнянь практично не досліджувались.

У роботі [29] в області D^p для рівняння

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] := L(\partial_x)\partial_t^n u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x)\partial_t^j u(t,x) = 0, \qquad (52)$$

де $L(\partial_x) = \sum_{|s|=2d} a_s \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $a_s \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, — еліптичний диференціальний вираз, $A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant d_j} b_{j,s}\partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $b_{j,s} \in \mathbb{R}$, $d_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, досліджено у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними зі спектром $\mathcal{M}$, задачу з умовами

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(0,x) + \\ \qquad\qquad + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \;\; j = 1, \ldots, \tilde{n}_1, \\ U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(T,x) + \\ \qquad\qquad + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \;\; j = \tilde{n}_1 + 1, \ldots, n, \end{cases} \qquad (53)$$

де $0 \leqslant \tilde{n}_1 \leqslant n-1$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $r_1 < \ldots < r_n$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $\vartheta_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{\tilde{n}_1} \leqslant n-1$,

$0 \leqslant \vartheta_{\tilde{n}_1+1} < \ldots < \vartheta_n \leqslant n-1$; функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, є майже періодичними із заданим спектром $\mathcal{M}$.

Нехай $\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[f_{qk}]\|_{j,q=1}^n$, де $\{f_{qk}(t), q = 1, \ldots, n\}$ — нормальна (в точці $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння $N(d/dt, \mu_k)f(t) = 0$.

Для того, щоб задача (52), (53) мала не більше одного розв'язку у шкалі просторів $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, необхідно і достатньо, щоб $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Нехай у рівнянні (52) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} \geqslant 2d$. Позначимо:

$$\chi_1 = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\frac{d_j - 2d}{n-j}\right\},$$

$$C_{14} = 2\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\left(\frac{\max_{|s|\leqslant d_j}\{|b_{j,s}|\}}{p^{-d}\inf_{\|\xi\|=1} L(\xi)}\right)^{\frac{1}{n-j}}\right\}, \ \xi \in \mathbb{R}^p,$$

$$\gamma_j(\alpha_j) = \begin{cases} 0, & & j = 1, \ldots, \tilde{n}_1, \\ 0, & \alpha_j = 0, & j = \tilde{n}_1 + 1, \ldots, n, \\ \vartheta_j, & \alpha_j \neq 0, & j = \tilde{n}_1 + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

$$\gamma(\vec{\alpha}) = \gamma_1(\alpha_1) + \cdots + \gamma_n(\alpha_n), \ \vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Теорема 5. *Нехай* $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} \geqslant 2d$, *справджуються умови єдиності розв'язку задачі* (52), (53) *та існують сталі* $\eta > 0$ *і* $\sigma \geqslant 0$ *такі, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma|\mu_k|^{\chi_1}). \tag{54}$$

Якщо

$$\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1+\alpha,\, q_2+\beta, \chi_1},$$
$$q_1 = \chi_1\left((n+1)(n+2)/2 + \gamma(\vec{\alpha}) - \gamma_j(\alpha_j)\right) + \eta,$$
$$q_2 = \theta + nC_{14}T,$$

$j = 1,\dots,n$, то існує розв'язок задачі (52), (53) із простору $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\chi_1})$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Нехай λ-корені λ_{lk}, $l = 1,\dots,mn$, рівняння $N(\lambda,\mu_k) = 0$ є попарно різними та відмінними від нуля для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$. Тоді встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0,T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність (54) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\theta = nC_\lambda T_0$ і $\eta > \chi_1\eta_0(\vec{\alpha}) + (p/\theta_1 + \chi_1)(2^n(1+r)-1)$, де $C_\lambda = -\min\left\{0, \inf_{\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}} \min_{l\in\{1,\dots,nm\}}\left\{\frac{\mathrm{Re}\lambda_{lk}}{|\mu_k|^{\chi_1}}\right\}\right\}$, $r = r_1 \cdots + r_n$, а стала $\eta_0(\vec{\alpha})$ визначена рівністю

$$\left.\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial\tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ \eta_0(\vec{\alpha})!C_{15}, & q = \eta_0(\vec{\alpha}), \end{cases}$$

у якій $\mathcal{D}(\mu_k,\tau) := \Delta(\mu_k,T)|_{T=\tau}$, а C_{15} — стала, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j = 1,\dots,n$.

Якщо у рівнянні (52) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} < 2d$ та $\varphi_j \in H_{\mathcal{M}}^{\alpha}$, $j = 1,\dots,n$, то встановлено, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $T > 0$ існує єдиний розв'язок u задачі (52), (53) із простору $C^n([0,T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha})$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$. Іншими словами, у цьому випадку існування розв'язку задачі (52), (53) не пов'язане з проблемою малих знаменників.

Отримані результати поширено на системи рівнянь вигляду (52).

Література

[1] *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 2. – С.91–192.

[2] *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. механика и математика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

[3] *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С.1592–1602.

[4] *Бейкер Дж. (мл)., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М. : Мир 1986. – 502 с.

[5] *Берник В. И., Пташник Б. Й., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

[6] *Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 2. – С. 261–264.

[7] *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 1972. – 173 с.

[8] *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для рівнянь не розв'язаних відносно старшої похідної за часом// Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 46–55.

[9] *Борок В. М., Кенне Э.* Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 338–346.

[10] *Борок В. М., Кенне Э.* Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе // Изв. вузов. Математика. – 1994. – **384**, № 5. – С. 3–12.

[11] *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – **14**, № 3. – С. 3–19.

[12] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М. : Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

[13] *Дезин А. А.* Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Докл. АН СССР. – 1963.– **148**, № 5. – С. 1013—1016.

[14] *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісник ДУ „Львівська політехніка“. Прикл. матем. – 1999. – № 364. – С. 318–323.

[15] *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 991–1001.

[16] *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

[17] *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Когут І. В.* Про ядро задачі з інтеграль- ною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. фізико-математичні науки. – 2008. – Вип. 625, № 625. – С. 5–11.

[18] *Каленюк П. І., Ільків В. С., Нитребич З. М., Когут І. В.* Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. фізико-математичні науки. – 2013. – Вип. 768, № 768. – С. 5–11.

[19] *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – **4**, № 6. – С. 1006–1024.

[20] *Капустян В. О., Пишнограєв І. О.* Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУ "Київський політехнічний інститут". – 2012. – № 4. – С. 72–76.

[21] *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604–1613.

[22] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.

[23] *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом// Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.

[24] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 41–53.

[25] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фізико-математичні науки. – 2012. – № 740. – С. 25–33.

[26] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь гіперболічних за Гордінгом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for Garding hyperbolic equations // Ukrainian Mathematical Journal – 2013. – **65**, N. 2. – P. 277–293.)

[27] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 40–53. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasicity theory // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, N. 3. – P. 310–326.)

[28] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 200–224.

[29] *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для систем рівнянь, параболічних за Шиловим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 16–28.

[30] *Кузь А. М.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 635–644.

[31] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272с.

[32] *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза // Вестн. ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование". – 2011. – Вип.8, №17. – С. 52–61.

[33] *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. Вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.

[34] *Медвідь О. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Математичні студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–141.

[35] *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 32–39.

[36] *Медвідь О. М.* Інтегральна задача для навантажених рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 201–213.

[37] *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.

[38] *Мельник З. О., Кирилич В. М.* Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 716-721.

[39] *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179–238.

[40] *Муравей Л. А., Филиновский А. В.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Мат. зам. – 1993. – **54**. № 4. – С. 98–116.

[41] *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.

[42] *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М. : Высш. шк. – 1995. – 301 с.

[43] *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М. : Наука, 1978. – Ч. 1 – 391 с.

[44] *Пукальський І. Д.* Нелокальна параболічна крайова задача та задача оптимального керування для лінійних рівнянь з виродженням // Приклад. пробл. механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 102–114.

[45] *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 10. – С. 32–44.

[46] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К. : Наук. думка, 1984. – 264 с.

[47] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416с.

[48] *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1472–1481.

[49] *Савка І. Я., Симотюк М. М.* Задача спряження з інтегральною умовою для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Одинадцята відкрита наукова конференція ІМФН "PSC-IMFS-11"(Львів, 13-14 червня 2013 р.): Збірник матеріалів та програма конференції. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – С. 84–85.

[50] *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнения // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.

[51] *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 98–107.

[52] *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – 18, № 1. – С. 3–50.

[53] *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М. : Наука, 1977. – 144 с.

[54] *Стручина Г. М.* Задача о сопряжении двух уравнений // Инженер.-физ. журн. – 1961. – 4, № 11. – С. 99–104.

[55] *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV с.

[56] *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача із кратними вузлами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, № 2. – С. 120–130.

[57] *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М. : Изд-во иностр. лит., 1959. — 131 с.

[58] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М. : Наука, 1978. – 112 с.

[59] *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. – 1964. – **7**, № 1.– С. 89–92.

[60] *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с ин- тегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.

[61] *Фардигола Л. В.* Свойства T–устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1991. – № 55. – С. 78–80.

[62] *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Матем. заметки. – 1993. – **53**, вып. 6. – С. 122–129.

[63] *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. матем. журн. – 1993. – **34**, № 2. – С. 191–207.

[64] *Штабалюк П. І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами//Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153–165.

[65] *Шубин М. А.* Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 2. – С. 3–47.

[66] *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differentail equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, № 1. – P. 31–37.

[67] *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publications, Inc., 1954. – 180 p.

[68] *Ivanchov M.* Inverse problem for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003. – 238 p.

[69] *Cannon J. R.* The solution of the heat equation sub ject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963 – **21**, No. 2. – P. 155–160.

[70] *Dell'acqua G., Santucci P.* Embedding theorems of Sobolev-Besicovitch spaces $W^{k,1}_{ap}(\mathbb{R}^s)$// Rendiconti di Matematica. – 1996. – Serie VII, Vol. 16. – P. 525–536.

[71] *Kmit I.* Generalized solutions to hyperbolic problems with strongly singular coefficients // J. for Analysis and its Applications. – 2001. – **20**, No. 3. – P. 637–659.

[72] *Kuz A. M.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, No. 2. – P. 282–299.

[73] *Mesluob S., Bouziani A.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations// Journal of Applied Math. – 2001. – No. 3. – P.107-116.

[74] *Sabitov K. B.* Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain // Math. Notes. – 2011. – **89**, No. 4. – P. 562–567.