Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 108–155

УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен, І. П. Мединський

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ; Національний університет "Львівська політехніка", Львів; Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних

ivasyshen_sd@mail.ru, **i.p.medynsky@gmail.com**

We construct and investigate the classical fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate Kolmogorov's equation whose coefficients depend on two groups of spatial variables. We obtain exact estimates of the fundamental solution and its derivatives.

Для виродженого рівняння Колмогорова із залежними від двох груп просторових змінних коефіцієнтами побудовано й досліджено класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші. Одержано точні оцінки фундаментального розв'язку та його похідних.

1. Вступ

Клас рівнянь, який вивчається в роботі, є природним узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [1]. Це рівняння і його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами [2]. Основна увага при цьому приділялась побудові, одержанню точних оцінок і дослідженню різних властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) за якомога слабших припущень на коефіцієнти рівняння. На жаль, на сьогоднішній час точних результатів, що стосуються класичних ФРЗК для вироджених рівнянь Колмогорова з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, немає. Як і для невироджених параболічних рівнянь, для вироджених рівнянь типу Колмогорова у випадку, коли коефіцієнти сталі або залежать лише від часової змінної, вдається одержати повне аналітичне описання ФРЗК і з його допомогою встановити досить точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Якщо коефіцієнти вироджених рівнянь типу Колмогорова залежать від усіх змінних, то дослідження ФРЗК істотно ускладнюється. Крім традиційних виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженістю рівнянь. Аналіз праць показав, що вирішення проблеми побудови класичного ФРЗК полягає не тільки у виборі підходящих умов на коефіцієнти, але і в удалому виборі параметриксу при застосуванні методу Леві. Наш підхід полягає у поетапному застосуванні методу Леві. На першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать від основних змінних і параметра. За параметрикс беремо ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать тільки від t і параметра y. Досліджуються властивості ФРЗК як функції усіх змінних і параметра. На другому етапі побудови ФРЗК за параметрикс беремо ФРЗК, побудований на першому етапі. Результатом цієї процедури є класичний ФРЗК. Реалізації такого підходу й присвячена ця праця.

Робота складається з семи пунктів. Пункт 1 – вступ. У пункті 2 наведено необхідні позначення, припущення на коефіцієнти та допоміжні твердження. Для рівняння, коефіцієнти якого залежать лише від t і параметра $y := (y_1, y_2)$, у цьому пункті, зокрема, подано оцінки та властивості ФРЗК, а також відповідного об'ємного потенціалу. Пункт 3 присвячений першому етапу побудови ФРЗК Z_1 для рівняння, коефіцієнти якого залежать від t, основної змінної x_1 і параметра y_2. У ньому наведено властивості параметриксу Z_0, здійснено ітераційну процедуру, результатом якої є існування та оцінки ФРЗК Z_1. Оцінки приростів похідних від Z_1 за змінними x_1 і x_2, а також за параметром y_2 випливають із результатів пункту 4, присвяченого властивостям об'ємного потенціалу W_1. У пункті 5 сформульовано основні результати першого етапу побудови класичного ФРЗК Z. Результати другого, завершального, етапу побудови Z містяться у пункті 6. В останньому пункті 7 наведено загальні висновки.

Бібліографію та огляд праць, присвячених побудові, дослідженню і застосуванню ФРЗК для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова можна знайти в [2–6].

2. Позначення, припущення та допоміжні відомості

Нехай n, n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2$; $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$, $M := m_1 n_1 + m_2 n_2$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$, записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2)$, де $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$.

Будемо користуватися ще такими позначеннями:
$\Pi_H := \{(t, x) | \, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot), s \in \{1, 2\}$, $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $X(t) := (X_1(t), X_2(t))$, $X_1(t) := x_1$,

$X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $Z^{(s)}(t) := X(t)|_{x_s=z_s}, s \in \{1,2\}$.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C і c) будемо позначати різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$Lu(t,x) := (S - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}};$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x).$$

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) вони є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1{:=}(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2; \tag{2}$$

2) вони є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0\ \exists\, \alpha_1 \in (0,1)\ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leq H_1|x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \tag{3}$$

$$\exists\, H_2 > 0\ \exists\, \alpha_2 \in (1/3, 2/3]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}\ \forall h \in [0,T] :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq H_2(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}), \tag{4}$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0.

З умови (4) при $h = 0$ випливає звичайна умова Гельдера за змінною x_2. Достатня умова виконання (4) наведена в наступній лемі.

Лема 1. *Нехай a – неперервна й обмежена функція на $\Pi_{[0,T]}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, H_3 > 0\ \exists\, \alpha \in (1/2, 1]\ \forall \{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq H_3(T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\alpha} |x_2 - z_2|^{\alpha}. \tag{5}$$

Тоді справджується нерівність (4) *з* $\alpha_2 = \alpha/m_2$.

Доведення. Досить довести обмеженість відношення

$$R := |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| (h^{\alpha} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2})^{-1}$$

для всіх $\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}$ і $h \in [0,T]$.

У випадку, коли $h^{\alpha} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2} > T^{\alpha}$, маємо

$$R \leq T^{-\alpha} |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq 2MT^{-\alpha}, \tag{6}$$

де M – стала, яка обмежує модуль функції a.

Нехай справджується протилежна нерівність

$$h^{\alpha} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2} \leq T^{\alpha}. \tag{7}$$

Оскільки $X_2(h) = x_2 + h\hat{x}_1$, то

$$|x_2 - z_2| \leq h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|. \tag{8}$$

Можливі такі випадки : 1) $h|\hat{x}_1| \leq |X_2(h) - z_2|$ і 2) $h|\hat{x}_1| > |X_2(h) - z_2|$. У випадку 1) за допомогою нерівностей (5) і (8) отримуємо

$$R \leq H_3(h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|)^{\alpha} (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\alpha} \times$$

$$\times (h^{\alpha} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2})^{-1} \leq 2^{\alpha} H_3 |X_2(h) - z_2|^{\alpha} \times$$

$$\times (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\alpha} (h^\alpha + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2})^{-1},$$

а оскільки на підставі нерівності (7) $T^{-m_2}|X_2(h) - z_2| \le 1$ і $\alpha > \alpha/m_2$, то $|X_2(h) - z_2|^\alpha = T^{m_2\alpha}(T^{-m_2}|X_2(h) - z_2|)^\alpha \le T^{m_2\alpha}(T^{-m_2}|X_2(h) - z_2|)^{\alpha/m_2} = T^{m_1\alpha}|X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2}$ і

$$R \le 2^\alpha H_3 \left(\frac{T^{m_1}}{T^{m_1} + |\hat{x}_1|} \right)^\alpha \left(\frac{|X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2}}{h^\alpha + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2}} \right) \le 2^\alpha H_3. \quad (9)$$

У випадку 2) аналогічно одержуємо

$$R \le H_3(h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|)^\alpha (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\alpha} \times$$

$$\times (h^\alpha + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2})^{-1} \le 2^\alpha H_3 (h|\hat{x}_1|)^\alpha \times$$

$$\times (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\alpha} (h^\alpha + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2})^{-1} \le$$

$$\le 2^\alpha H_3 \left(\frac{|\hat{x}_1|}{T^{m_1} + |\hat{x}_1|} \right)^\alpha \left(\frac{h^\alpha}{h^\alpha + |X_2(h) - z_2|^{\alpha/m_2}} \right) \le 2^\alpha H_3. \quad (10)$$

З нерівностей (6),(9) і (10) випливає оцінка (4) з $\alpha_2 = \alpha/m_2$ і $H_2 = \max\{2MT^{-\alpha}, 2^\alpha H_3\}$. □

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

$$E_c^j(t, z_j) := \exp\{-ct^{1-2j}|z_j|^2\}, t > 0, z_j \in \mathbb{R}^{n_j}, j \in \{1, 2\}; \quad (11)$$

$$E_c(t, x, \xi) := E_c^1(t, X_1(t) - \xi_1) \times$$

$$\times E_c^2(t, X_2(t) - \xi_2), t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$F_c(t, x, \xi) := \exp\{-c[(4t)^{-1}|x_1 - \xi_1|^2 + 3t^{-3}|x_2 +$$

$$+ 2^{-1}t(\hat{x}_1 + \hat{\xi}_1) - \xi_2|^2]\}, t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Наведемо потрібні нам властивості цих функцій з [7].

Лема 2. *Функції (11)–(13) мають такі властивості:*

$$E_c(t, x, \xi) \le F_{c_1}(t, x, \xi) \le E_{c_2}(t, x, \xi),$$

$$t > 0, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, 0 < c_2 < c_1 < c; \quad (14)$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c(t,x,\xi)d\xi_2 \le Ct^{-m_1n_1}E_c^1(t,x_1-\xi_1),$$

$$t>0, x\in\mathbb{R}^n, x_1\in\mathbb{R}^{n_1}; \qquad (15)$$

$$t^{-m_sn_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^s(t,x_s-\xi_s)d\xi_s = C,\ t>0,\ x_s\in\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\{1,2\}; \qquad (16)$$

$$t^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E_c(t,x,\xi)\,d\xi = C,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n; \qquad (17)$$

$$E_c^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1) \le E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1),$$

$$0\le\tau<\beta<t,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \qquad (18)$$

$$((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi),\ 0\le\tau<\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \qquad (19)$$

$$|x_1-\xi_1|^{\alpha_1}E_c^1(t,x_1-\xi_1)\le Ct^{m_1\alpha_1}E_{c_0}^1(t,x_1-\xi_1),$$

$$t>0,\ \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \qquad (20)$$

$$|X_s(t)-\xi_s|^{\alpha_s}E_c(t,x,\xi)\le Ct^{m_s\alpha_s}E_{c_0}(t,x,\xi),$$

$$t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\{1,2\}; \qquad (21)$$

$$E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)\le E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\le\tau<\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \qquad (22)$$

$$E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)\le E_c^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E_{-c}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c/2}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2),$$

$$(t+\tau)/2=:t_1<\beta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \qquad (23)$$

де C, c *і* c_0 *– додатні сталі, причому* $c_0<c$.

Наступні твердження стосуються ФРЗК для рівняння

$$L_0u(t,x) = (S - A(t,y,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (24)$$

коефіцієнти якого залежать тільки від змінної t і параметра $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (24), як функції t і y, задовольняють умови* **1** *і* **2**. *Тоді для рівняння (24) існує ФРЗК G_0, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k \partial_\xi^l G_0(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_{kl}(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (25)$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^k \partial_\xi^l G_0(t,x;\tau,\xi;y)| \le C_{kl}(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c(t-\tau,x,\xi) \times$$
$$\times \begin{cases} |y_1 - z_1|^{\alpha_1}, & \text{якщо } s=1, \\ h^{m_2\alpha_2} + |Y_2(h) - z_2|^{\alpha_2}, & \text{якщо } s=2, \end{cases} \qquad (26)$$

а також рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi = \exp\{(t-\tau)\int\limits_0^1 a_0(\tau+(t-\tau)\beta,y)d\beta\}, \quad (27)$$

$$\partial_x^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi = 0, \qquad (28)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2 = 0, \qquad (29)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} G_0(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2} G_0(t,x;\tau,\xi;y). \qquad (30)$$

Тут $0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \{y_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, s \in \{1,2\}, \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n, k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ *в (28) і* $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2} \setminus \{0\}$ *в* (29) *і* (30), C_{kl} *і* c *– додатні сталі,* $M_{kl} := m_1(|k_1|+|l_1|) + m_2(|k_2|+|l_2|)$, $\alpha_s, s \in \{1,2\}, h$ *– числа з умов* (3) *і* (4).

Доведення тверджень теореми проводиться аналогічно до доведення відповідних тверджень з [2, с. 185 – 192].

Для обґрунтування застосовності методу Леві необхідні властивості об'ємних потенціалів вигляду

$$W_0(t,x;\tau,\xi;y) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda. \quad (31)$$

Ці властивості наводяться в наступних лемах.

Функцію f вважатимемо неперервною там, де вона визначена. Для неї будемо використовувати такі умови:

3) $$|f(t,x;\tau,\xi;y)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma} E_c(t-\tau,x,\xi); \quad (32)$$

4) $$|\Delta_{x_s}^{z_s} f(t,x;\tau,\xi;y)| \le C\,|x_s-z_s|^{\gamma_s}(t-\tau)^{-M-1+\gamma-m_s\gamma_s}\times$$
$$\times(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)); \quad (33)$$

5) існують неперервні похідні $\partial_{x_{2l}} f$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}} f(t,x;\tau,\xi;y)| \le C\,(t-\tau)^{-M-1+\gamma-m_2} E_c(t-\tau,x,\xi). \quad (34)$$

В умовах (32) – (34) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1,2\}$, $l \in \{1,\dots,n_2\}$, $\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\} \subset (0,1]$.

Лема 3. *Нехай функція f задовольняє умови 3 і 4. Тоді правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) =$$
$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda; \quad (35)$$

$$\partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) =$$
$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\beta,\lambda;y)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}}\partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\beta,\lambda;y)d\lambda \right) f(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y)d\beta; \quad (36)$$

$$SW_0(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y)+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\beta,\lambda;y)\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} \big(\int_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\beta,\lambda;y)d\lambda f(\beta,X(t-\beta);\tau,\xi;y)\big)d\beta; \quad (37)$$

$$L_0W_0(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y)+$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} L_0G_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y)d\lambda$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1} W_0(t,x;\tau,\xi;y)| \le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|+\gamma} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \quad (38)$$

$$|SW_0(t,x;\tau,\xi;y)| \le C(t-\tau)^{-M-1+\gamma} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi). \quad (39)$$

У формулах (35)– (37) *та оцінках* (38) *і* (39) $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n_1\}$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| \le 2$, $t_1 := (t+\tau)/2$, C *і* c_0 *– деякі додатні сталі, причому* $c_0 < c$, *де* c *– стала з умов* (3) *і* (4).

Доведення леми 3 проводиться за методикою, розробленою в [2] при доведенні аналогічних властивостей об'ємних потенціалів у випадку рівномірно параболічних рівнянь і вироджених рівнянь типу Колмогорова.

Лема 4. *Якщо функція f задовольняє умови **3** і **5**, то правильні формули*

$$\partial_{x_{2l}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) = \int\limits_{\tau}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{2l}} G_0(t,x;\beta,\lambda;y) f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\tau,\xi;y) \partial_{\lambda_{2l}} f(\beta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda \qquad (40)$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}} W_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq C(t-\tau)^{-M-m_2+\gamma} E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \qquad (41)$$

в яких $0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, l \in \{1,\ldots,n_2\}, c_0 \in (0,c)$, c – стала з умов (3) і (5), число t_1 таке, як у лемі 3.

Доведення. Існування відповідних невласних інтегралів доводиться аналогічно до того, як це робилося у [2] і, отже, при доведенні леми 3. Можливість перекидання похідних на другий співмножник забезпечується властивістю (30) з теореми 1 та оцінками (25) і (34). □

Зробимо деякі зауваження.

Зауваження 1. *Твердження лем 3 і 4 залишаються правильними, якщо функція f залежить від основної (t,x) і параметричної (τ,ξ) точок та параметра $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ або лише від основної точки (t,x), тобто $f = f(t,x;\tau,\xi;y_2)$ або $f = f(t,x)$.*

Зауваження 2. *Твердження лем 3 і 4 залишаються правильними, якщо замість умов (32)–(34) припускати, що функція f є неперервною і обмеженою разом із похідними за x_2 та задовольняє за просторовими змінними локальну умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1]$.*

3. Перший етап побудови ФРЗК

На першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t,x) := (S - A(t,(x_1,y_2),\partial_{x_1})u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{42}$$

у вигляді

$$Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) + W_1(t,x;\tau,\xi;y_2), \tag{43}$$

де

$$W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) :=$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{\ltimes}} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2) Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda, \tag{44}$$

Z_0 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція.

За параметрикс беремо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) := G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2)),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{45}$$

її властивості наводяться у наступній лемі.

Лема 5. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (42) *виконуються умови **1** і **2** . Тоді є правильними такі твердження :*

$$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C_{k0}(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi); \tag{46}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{k0}-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times (E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)); \tag{47}$$

$$|\Delta_{y_2}^{z_2} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$

$$\le C_{k0}\,(h^{m_2\alpha_2} + |Y_2(h) - z_2|^{\alpha_2})(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi); \tag{48}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\right| \le C_{k0}(t-\tau)^{-M_{k0}+m_1\alpha_1}; \tag{49}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\right| \le$$

$$\le C\,|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M_{k0}+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0}; \tag{50}$$

$$|SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x,\xi); \tag{51}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\right| \le C\,|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1-m_s\alpha_s^0}\times$$

$$\times(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)); \tag{52}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}; \tag{53}$$

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\right| \le$$

$$\le C\,|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0}; \tag{54}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = 0; \tag{55}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \tag{56}$$

Тут $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi,z^{(1)},z^{(2)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_2,z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, *причому в (49),(50)* $k\ne 0$ *і в (55), (56)* $k_2 \ne 0, s\in\{1,2\}, \alpha_1^0$ *і* α_2^0 *– довільні числа з* $(0,1]$*,* α_1 *і* α_2 *– числа з умов* (3) *і* (4)*,* $h\in[0,T]$.

Доведення тверджень (46), (47), (49) – (56) проводиться аналогічно до доведення відповідних тверджень леми 2 з [7]. Оцінки (48) є наслідком означення (45) та оцінок (26).

Зауваження 3. *На підставі оцінок (14) в нерівностях* (46)–(48)*,(51) і (52), як і в (25),(26), замість оцінюючої функції* E_c *можна брати* F_c.

Припускаючи, що функція Q_1 з формули (44) задовольняє умови леми 3, отримуємо для цієї функції інтегральне рівняння

$$Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, \qquad (57)$$

в якому

$$K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) :=$$

$$= \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}} + \right.$$

$$\left. +\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y_2))\right) Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \qquad (58)$$

З (58) і (56) випливають рівності

$$\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}} + \right.$$

$$\left. +\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y_2))\right) \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2), \qquad (59)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2), \qquad (60)$$

в яких $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, |k_2| \in \mathbb{Z}_+^{n_2} \setminus \{0\}$. За допомогою (59) запишемо такі зображення для приростів:

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(z_1,y_2))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{j}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{\xi_1} a_{j}(t,(z_1,y_2))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{z_1} a_0(t,(x_1,y_2))\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{z_1}^{\xi_1} a_0(t,(z_1,y_2))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2), \qquad (61)$$

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{j}(t,(x_1,y_2))\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y_2))\Delta_{z_2}^{x_2}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \qquad (62)$$

Оцінюючи доданки з виразів (59), (61) і (62) за допомогою умов **1** і **2**, оцінок (46) і (47) та нерівності (21), одержуємо оцінки

$$|\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|} E_c(t-\tau,x,\xi); \qquad (63)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_s\alpha_s^0-m_2|k_2|}\times$$

$$\times(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{64}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,z^{(s)},\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_s,z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}, y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\alpha_1^0 = \alpha_1$, α_1 – число з умови (3), α_2^0– довільне число з проміжку (0,1].

З оцінки (63) для K_1 та оцінок (14) випливає, що для ядра K_1 виконуються умови леми 1.10 з [2, с. 44], на підставі якої для функції Q_1 справджується оцінка (32) з $\gamma = m_1\alpha_1$, тобто виконується для неї умова **3**.

Перейдемо до оцінок похідних від функції Q_1 за змінною x_2. Для цього потрібно дослідити властивості регулярності повторних ядер $\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}, l>1, k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$. Як і в (40), маємо

$$\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2)K_{1(l-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{1(l-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, \tag{65}$$

де

$$K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2) := K_1(t,x;\tau,\xi;y_2),$$

$$K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times K_{1(l-1)}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, l>1.$$

Зауважимо, що при встановленні формул (65) істотно використовуються рівності (60). Інтеграли в правій частині (65) оцінюємо послідовно за допомогою оцінки (63) та нерівності (19). Повторюючи міркування, які наведено в [7], одержуємо

$$|\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C^l \left(\frac{\pi}{c}\right)^{l-1} \frac{\Gamma^l(m_1\alpha_1)}{\Gamma(lm_1\alpha_1)}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-1+lm_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_c(t-\tau,x,\xi),\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}, l\geq 1, \qquad (66)$$

де Γ – гамма-функція Ейлера. Оцінки (66) гарантують абсолютну та рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{l=1}^{\infty}\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)=\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)$$

та оцінку

$$|\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)|\leq C(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$0\ \leq\ \tau\ <\ t\ \leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, y_2\in\mathbb{R}^{n_2}, k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}. \qquad (67)$$

Отже, функція Q_1 задовольняє умову **5** з $\gamma=m_1\alpha_1$ і $|k_2|=1$.

Далі треба довести, що функція Q_1 задовольняє умову **4**, тобто одержати потрібні оцінки приростів цієї функції. Для цього будемо оцінювати прирости $\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1$, $s\in\{1,2\}$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$. Але перш за все зробимо наступне зауваження.

Зауваження 4. *Оцінки цих приростів досить провести у випадку, коли* $|x_s-z_s|^{1/m_s}\leq(t-\tau)/4, s\in\{1,2\}$. *Якщо* $|x_s-z_s|^{1/m_s}>(t-\tau)/4$, *то потрібні оцінки приростів безпосередньо випливають з оцінок (67). За умови* $|x_s-z_s|^{1/m_s}\leq(t-\tau)/4\}$ *справджується нерівність (див. нерівність (36) із [7])*

$$E_c(t-\tau,y^{(s)},\xi)\leq\ C_1E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \qquad (68)$$

де $c_0\in(0,c), y^{(s)}$ *– точка на відрізку прямої, що сполучає точки* x *і* $z^{(s)}$.

За допомогою рівностей (57) і (60), оцінок (63) і (67) та нерівності (19) отримуємо таке зображення:

$$\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)=\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}. \qquad (69)$$

Розглянемо спершу прирости $\partial_{x_2}^{k_2} Q_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, за змінною x_2. За допомогою (69) записуємо зображення

$$\Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) +$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2} \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{z_{2j}}^{x_{2j}} \left(\partial_{\zeta_{2j}} \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda \right) d\zeta_{2j} =$$

$$=: \sum_{k=1}^{3} Q_{1k}^2, \qquad (70)$$

в якому t_1 таке, як вище, а

$$\zeta_2^{(j)} := \left(x_1, (z_{21}, \ldots, z_{2(j-1)}, \zeta_{2j}, x_{2(j+1)}, \ldots, x_{2n_2})\right), \ j \in \{1, \ldots, n_2\}.$$

Оцінимо доданки з (70). При цьому в Q_{13}^2 попередньо перекинемо диференціювання $\partial_{\zeta_{2j}}$ на другий співмножник і користуватимемося нерівностями (19), (63), (64), (67) і (68). Маємо

$$|Q_{11}^2| \le C\,|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2(|k_2|+\alpha_2^0)} \times$$

$$\times E_{c_0}(t-\tau,x,\xi), \qquad (71)$$

$$|Q^2_{12}| \leq C\,|x_2 - z_2|^{\alpha^0_2} \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(|k_2|+\alpha^0_2)} \times$$

$$\times E_{c_0}(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1} \leq C\,|x_2 - z_2|^{\alpha^0_2} (t-t_1)^{-m_2(|k_2|+\alpha^0_2)} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t_1} (t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1} \Big(((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \Big)\, d\beta \leq C\,|x_2 - z_2|^{\alpha^0_2} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(|k_2|+\alpha^0_2)} E_{c_1}(t-\tau, x, \xi), \tag{72}$$

$$|Q^2_{13}| \leq \left| \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{z_{2_j}}^{x_{2j}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| K_1(t, \zeta_2^{(j)}; \beta, \lambda; y_2) \right| \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left| \partial^{k_2}_{\lambda_2} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_2) \right| d\lambda \right) d\zeta_{2j} \right| \leq$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{z_{2_j}}^{x_{2j}} \left((t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta, \zeta_2^{(j)}, \lambda) \times \right.$$

$$\left. \times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(|k_2|+1)} E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \right) d\zeta_{2j} \leq$$

$$\leq C(t_1-\tau)^{-m_2(|k_2|+1)} \int\limits_{t_1}^{t} (t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1} d\beta \times$$

$$\times ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n_2} |z_{2j} - x_{2j}| \le C\,|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} (t-\tau)^{-M-1+\alpha_1-m_2(|k_2|+\alpha_2^0)} \times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau, x, \xi). \tag{73}$$

З рівності (70), нерівностей (71) – (73) і (67) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_2 - z_2|^{\alpha_2^0} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(|k_2|+\alpha_2^0)} (E_{c_1}(t-\tau,x,\xi) + E_{c_1}(t-\tau, z^{(2)}, \xi)),$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{x_2, y_2, z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}, k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}. \tag{74}$$

Щоб оцінити прирости $\partial_{x_2}^{k_2} Q_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, за змінною x_1, на підставі (69) записуємо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) +$$

$$+ \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{t}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,z^{(1)};\beta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda =$$

$$=: \sum_{k=1}^{5} Q_{1k}^1, \quad \eta_1 := t - |x_1 - z_1|^{1/m_1}. \tag{75}$$

Доданки з (75) оцінюємо аналогічно до оцінок доданків з (70), припускаючи, що $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \le (t-\tau)/4$. Маємо

$$|Q_{11}^1| \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-1-m_2|k_2|}E_{c_0}(t-\tau, x, \xi),$$

$$|Q_{12}^1| \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_{c_0}(t-\beta, x, \lambda)E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi)d\lambda \le$$

$$\le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-t_1)^{-1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}d\beta\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}(t-\beta, x, \lambda)E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi)d\lambda \le$$

$$\le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_{c_1}(t-\tau, x, \xi),$$

$$|Q_{13}^1| \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1'}\int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-1+m_1(\alpha_1-\alpha_1')}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_c(t-\beta, x, \lambda)E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi)d\lambda \le$$

$$\le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1'}(t_1-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}\int\limits_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-1+m_1(\alpha_1-\alpha_1')}d\beta\times$$

$$\times((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta, x, \lambda)E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi)d\lambda \le$$

$$\le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1'}(t-\eta_1)^{m_1(\alpha_1-\alpha_1')}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau, x, \xi) \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1'}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times |x_1 - z_1|^{\alpha_1 - \alpha_1^{'}} E_{c_1}(t-\tau, x, \xi) =$$
$$= C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2|k_2|} E_{c_1}(t-\tau, x, \xi),$$

де $\alpha_1^{'} < \alpha_1$.

Доданки Q_{14}^1 і Q_{15}^1 оцінюються однаково. Оцінимо перший з них. Маємо

$$|Q_{14}^1| \le C \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\beta, x, \lambda) \times$$
$$\times (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2|k_2|} E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \le$$
$$\le C\,(\eta_1 - \tau)^{-1+m_1\alpha_1 - m_2|k_2|} \int\limits_{\eta_1}^{t} (t-\beta)^{-1+m_1\alpha_1} d\beta \times$$
$$\times ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \le$$
$$\le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2|k_2|} E_{c_1}(t-\tau, x, \xi),$$

оскільки $\eta_1 - \tau = t - \tau - |x_1 - z_1|^{1/m_1} \ge 3(t-\tau)/4$.

Із формули (75), одержаних вище оцінок Q_{1k}^1 та оцінки (74) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t, x; \tau, \xi; y_2)| \le$$
$$\le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2|k_2| - m_s\alpha_s^0} \times$$
$$\times (E_{c_1}(t-\tau, x, \xi) + E_{c_1}(t-\tau, z^{(s)}, \xi)), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{y_2, z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}, \quad k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}, \quad s \in \{1, 2\}. \qquad (76)$$

В оцінках (76) α_1 – число з умови **3**, $\alpha_1^0 = \alpha_1$, α_2^0 – довільне число з проміжку $(0, 1]$. З цих оцінок випливає, що функція Q_1 задовольняє й умову **4** з $\gamma = m_1\alpha_1$, $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2^0$. Отже, апріорні припущення щодо Q_1 є правильними.

З наведеного вище випливає, що для інтегрального рівняння (57) існує розв'язок Q_1, який задовольняє умови **3** і **4**. Це дозволяє встановити факт існування всіх похідних від об'ємного потенціалу W_1 з (44), що входять у рівняння (42), та, отже, довести існування ФРЗК Z_1 для цього рівняння. Похідні від функції W_1 визначаються формулами (35)–(37), в яких замість W_0, G_0 і f треба взяти відповідно W_1, Z_0 і Q_1. На підставі лем 3 і 4 для похідних від W_1 справджуються оцінки (38), (39) і (41) з відповідними числами γ. Звідси та з леми 5 випливають відповідні оцінки ФРЗК Z_1. Але для далі потрібні оцінки приростів похідних від функції Z_1 і її властивості як функції параметра y_2. Для цього досить установити відповідні властивості функції W_1. Ці властивості наводяться у наступному пункті 4.

4. Властивості об'ємного потенціалу W_1

Оцінимо прирости похідних від W_1. На підставі зауваження 4 досить розглянути випадок $|x_s - z_s|^{1/m_s} \leq (t-\tau)/4$, $s \in \{1,2\}$. Спочатку оцінимо $\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1$, $|k_1| \leq 2$. Користуючись відповідно зміненими формулами (35) і (36), запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\eta_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda -$$

$$-\int_{\eta_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, z^{(1)}; \beta, \lambda; y_2) \Delta_{\lambda}^{Z^{(1)}(t-\beta)} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1} \Delta_{x_1}^{z_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2) d\lambda \right) Q_1(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y_2) d\beta +$$

$$+\int_{\eta_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2) d\lambda \right) Q_1(\beta, X(t-\beta); \tau, \xi; y_2) d\beta -$$

$$-\int_{\eta_1}^{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, z^{(1)}; \beta, \lambda; y_2) d\lambda \right) \times$$

$$\times Q_1(\beta, Z^{(1)}(t-\beta); \tau, \xi; y_2) d\beta =: \sum_{j=1}^{7} W_{1j}^1, \qquad (77)$$

де числа t_1 і η_1 такі, як вище.

Доданок W_{11}^1 оцінюємо за допомогою нерівностей (47), (67) і (19):

$$|W_{11}^1| \leq \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2)| |Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_2)| d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} \int_{\tau}^{t_1} (t-\beta)^{-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)} (\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta, x, \lambda) E_c(\beta-\tau, \lambda, \xi) d\lambda \, ((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M} d\beta \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)} E_{c_1}(t-\tau, x, \xi). \qquad (78)$$

Щоб оцінити W_{12}^1, використаємо оцінки (47) з $\alpha_1^0 \geq \alpha_1$ і (76). Тоді отримаємо

$$|W_{12}^1| \leq \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)| \times$$

$$\times |\Delta_\lambda^{X(t-\beta)} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)| d\lambda \leq C \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} \times$$

$$\times (t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)} E_c(t-\beta,x,\lambda) \Big[|x_1 - \lambda_1|^{\alpha_1} (\beta-\tau)^{-M-1} \times$$

$$\times \Big(E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) + E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) \Big) +$$

$$+ |X_2(t-\beta) - \lambda_2|^{\alpha_2^0} (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2^0} \times$$

$$\times \Big(E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) + E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) \Big) \Big] d\lambda =$$

$$= C \Big[\int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1 - \lambda_1|^{\alpha_1} E_c(t-\beta,x,\lambda) E_c(\beta-\tau, X(t-\beta),\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)} \times$$

$$\times (\beta-\tau)^{-M-1} |x_1-\lambda_1|^{\alpha_1} E_c(t-\beta,x,\lambda) E_c(\beta-\tau,(\lambda_1, X_2(t-\beta)),\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - z_1|^{\alpha_1^0} (\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2^0} E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) \times$$

$$\times (t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)} |X_2(t-\beta) - \lambda_2|^{\alpha_2^0} E_c(t-\beta,x,\lambda) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2^0}\times$$

$$\times|X_2(t-\tau)-\lambda_2|^{\alpha_2^0}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda\Bigg]=$$

$$=: C\sum_{j=1}^{4} W_{12}^{1j}. \qquad (79)$$

Доданки суми (79) оцінюються за допомогою нерівностей (19)–(23), рівності (17) і того, що

$$\int_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)}d\beta \le$$

$$\le C\begin{cases} (t-\tau)^{1-m_1|k_1|}, & \text{якщо } |k_1|<2, \alpha_1^0=\alpha_1,\\ (t-\eta_1)^{m_1(\alpha_1-\alpha_1^0)}=|x_1-z_1|^{\alpha_1-\alpha_1^0}, & \text{якщо } |k_1|=2, \alpha_1^0>\alpha_1.\end{cases}$$

Для прикладу оцінимо доданок W_{12}^{11}. Маємо

$$W_{12}^{11}\le|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t_1-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-\lambda_1|^{\alpha_1}E_c(t-\beta,x,\lambda)d\lambda E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|+\alpha_1^0-\alpha_1)}d\beta\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda E_c(t-\tau,x,\xi)\le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-M-1}\int_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)}d\beta\times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi)\le C|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюючи інші доданки суми (79), прийдемо до оцінки

$$|W_{12}^1|\le C|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\tau,x,\xi). \qquad (80)$$

Вирази W_{13}^1 і W_{14}^1 оцінюються однаково, оцінимо перший з них. За допомогою (46) і (76) отримуємо

$$|W_{13}^1|\le C\Big[\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha_1}\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1}E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\beta,x,\lambda)|x_1-\lambda_1|^{\alpha_1}(\beta-\tau)^{-M-1}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)\,|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2^0}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2^0}\times$$
$$\times E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+\int\limits_{\eta_1}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|}\times$$
$$\times|X_2(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2^0}E_c(t-\beta,x,\lambda)\,(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2^0}\times$$
$$E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2(t-\beta)),\xi)d\lambda\Big]=:C\sum_{k=1}^{4}W_{13}^{1k}. \qquad (81)$$

За допомогою (17), (21) і (22) маємо

$$W_{13}^{11}\le C(t_1-\tau)^{-M-1}E_c(t-\tau,x,\xi)\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)d\lambda d\beta \le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}|x_1-z_1|^{\alpha_1}E_c(t-\tau,x,\xi).$$

Використовуючи (12), (16), (18) і (21), а також нерівність (23) з $c=c_0/3$, де c_0 – стала з оцінки (21), отримуємо

$$W_{13}^{12} \le C(t_1-\tau)^{-M-1}\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^2(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)\times$$

$$\times E_{-c_0/3}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)\,E_{c_0/3}^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda\Big)\;d\beta\times$$

$$\times E_{c_0/6}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1}E_{c_0/6}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}(t-\beta)^{-m_1n_1}E_{2c_0/3}^1(t-\beta,x_1-\lambda_1)E_{c_0/3}^1(\beta-\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda_1\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}(t-\beta)^{-m_2n_2}E_{c_0}^2(t-\beta,X_2(t-\beta)-\lambda_2)d\lambda_2\Big)\,d\beta \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-1}E_{c_0/6}^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)E_{c_0/3}^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$

$$\times|x_1-z_1|^{1/m_1-|k_1|+\alpha_1} \le C|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}E_{c_0/6}(t-\tau,x,\xi).$$

За допомогою (21) і (19), узявши $\alpha_2^0=\alpha_1/3$, отримуємо

$$W_{13}^{13} \le C(t_1-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_2\alpha_2^0}\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_2\alpha_2^0}d\beta\times$$

$$\times((t-\beta)(\beta-\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,x,\lambda)E_{c_1}(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}|x_1-z_1|^{\alpha_1}E_{c_0}(t-\tau,x,\xi).$$

Інтеграл W_{13}^{14} оцінюється аналогічно до W_{13}^{12}.

Із (79) та оцінок W_{13}^{1k}, $k\in\{1,2,3,4\}$, випливає оцінка

$$|W_{13}^1| \le C|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|}E_c(t-\tau,x,\xi). \tag{82}$$

Вираз W_{15}^1 оцінюємо за допомогою оцінок (50), (67) і (22). Маємо

$$|W_{15}^1| \le C|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}\int\limits_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \le C|x_1-z_1|^{\alpha_1^0}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{\eta_1}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)}d\beta(t_1-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1|k_1|+m_1\alpha_1}E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{83}$$

де $\alpha_1^0=\alpha_1$, якщо $|k_1|<2$, і $\alpha_1^0>\alpha_1$ для $|k_1|=2$.

Вирази W_{16}^1, W_{17}^1 оцінюємо аналогічно. Для першого з них за допомогою оцінок (49), (67) і (22) отримаємо

$$|W_{16}^1| \le C\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,X(t-\beta),\xi)d\beta \le$$

$$\le C\int\limits_{\eta_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}d\beta(t_1-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(t-\tau,x,\xi) \le$$

$$\le C|x_1 - z_1|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)}E_c(t-\tau, x, \xi). \qquad (84)$$

Із зображення (77) і нерівностей (78), (80), (82)–(84) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_1 - z_1|^{\alpha_1^0}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1+\alpha_1^0)}\times$$

$$\times(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(1)},\xi)), 0\ \le\ \tau\ <\ t\ \le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$z_1\in\mathbb{R}^{n_1},\quad y_2\in\mathbb{R}^{n_2},\quad |k_1|\le 2,\quad \alpha_1^0\in(0,\alpha_1]. \qquad (85)$$

Перейдемо до оцінок приростів $\partial_{x_1}^{k_1}W_1, |k_1| \le 2$, за змінною x_2. Для цього використаємо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}}\left(\partial_{\zeta_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda\right)d\zeta_{2j} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda\right)d\zeta_{2j} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)\Delta_{\lambda}^{X^{(j)}(t-\beta)}\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\,d\lambda d\zeta_{2j}+\sum_{j=1}^{n_2}\int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)\,d\lambda\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\Big|_{\lambda=X^{(j)}(t-\beta)}d\zeta_{2j},\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \{z_2,y_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},\quad k_1\in\mathbb{Z}_+^{n_1},\ |k_1|\le 2, \qquad (86)$$

де $\zeta_2^{(j)}$ таке, як вище, $X^{(j)}(t-\beta) := X(t-\beta)\Big|_{x=\zeta_2^{(j)}}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$. Обгрунтування (86) проводиться за допомогою оцінок (46), (67) і (74) та рівності (56).

На підставі рівностей (86) запишемо зображення

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) := \sum_{j=1}^{3} W_{1j}^2, |k_1| \le 2, \tag{87}$$

де

$$W_{11}^2 := \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,$$

$$W_{1l}^2 := \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}} W_{1l}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)d\zeta_{2j}, \quad l \in \{2,3\},$$

$$W_{12}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)}x;\tau,\xi;y_2) := \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_{\lambda}^{X^{(j)}(t-\beta)}\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,$$

$$W_{13}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)}x;\tau,\xi;y_2) := \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)d\lambda\times$$

$$\times\left(\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\right)\Big|_{\lambda=X^{(j)}(t-\beta)}.$$

Оцінимо W_{11}^2 за допомогою (47), (67) і (19) за умови $|x_2 - z_2|^{1/m_2} \le (t-\tau)/4$. Маємо

$$|W_{11}^2| \le C\int\limits_{\tau}^{t_1}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x_2 - z_2|^{\alpha_2^0}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|-m_2\alpha_2^0}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1} E_c(t-\beta,x,\lambda)\, E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\, d\lambda \Bigg)\, d\beta \le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2\alpha_2^0}\, E_{c_1}(t-\tau,x,\xi). \quad (88)$$

Для оцінки W_{12}^2 використовуємо нерівності (46), (76) і (19)–(23). Спочатку отримуємо

$$|W_{12}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)| \le C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)|\times$$

$$\times\left(\left|\Delta_{\lambda}^{(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\beta))}\partial_{\lambda_{2j}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\right| +\right.$$

$$\left.+\left|\Delta^{X^{(j)}(t-\beta)}_{(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\beta))}\partial_{\lambda_{2j}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\Big|_{\lambda=X^{(j)}(t-\beta)}\right|\right) d\lambda \le$$

$$\le C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_1|k_1|} E_c(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda)\times$$

$$\times\Big(|X_2^{(j)}(t-\beta)-\lambda_2|^{\alpha_2^0}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(1+\alpha_2^0)}\Big(E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)+$$

$$+E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\beta)),\xi)\Big)+|x_1-\lambda_1|^{\alpha_1^0}(\beta-\tau)^{-M-1+m_1(\alpha_1-\alpha_1^0)-m_2}\times$$

$$\times\Big(E_c(\beta-\tau,X^{(j)}(t-\beta)),\xi)+E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\beta)),\xi)\Big)\Big)\, d\lambda \le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_2(1+\alpha_2^0)}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1|k_1|+m_2\alpha_2^0} d\beta\times$$

$$\times\Big((t-\beta)(\beta-\tau)\Big)^{-M}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda) E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi) d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda)E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\tau)),\xi)d\lambda\Bigg)+$$

$$+C(t_1-\tau)^{-1+m_1(\alpha_1-\alpha_1^0)-m_2}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1^0)}d\beta\,\Big(\,(t-\beta)\times$$

$$\times(\beta-\tau)\,\Big)^{-M}\,\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda)\,E_c(\beta-\tau,X^{(j)}(t-\beta),\xi)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda)\,E_c(\beta-\tau,(\lambda_1,X_2^{(j)}(t-\beta)),\xi)\,d\lambda\Bigg)\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2}E_{c_2}(t-\tau,\zeta_2^{(j)},\xi),$$

тому за допомогою (68), оскільки $|x_2-z_2|^{1/m_2}\le(t-\tau)/4$, маємо

$$|W_{12}^2|\le\sum_{j=1}^{n_2}\left|\int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}}|W_{12}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)|d\zeta_{2j}\right|\le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2\alpha_2^0}E_{c_3}(t-\tau,x,\xi),\qquad(89)$$

де α_2^0– довільне число з проміжку $(0,1]$, $c_3<c_2<c_1<c$.

За допомогою нерівностей (49), (67) і (22) подібно отримуємо

$$|W_{13}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\beta,\lambda;y_2)|\le C\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2}E_c(\beta-\tau,X^{(j)}(t-\beta),\xi)d\beta\le$$

$$\le C(t_1-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}d\beta\times$$

$$\times E_c(t-\tau,\zeta_2^{(j)},\xi) \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2} E_c(t-\beta,\zeta_2^{(j)},\lambda),$$

$$|W_{13}^2| \le \sum_{j=1}^{n_2} \left| \int_{z_{2j}}^{x_{2j}} |W_{13}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)| d\zeta_{2j} \right| \le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2\alpha_2^0} E_{c_1}(t-\tau,x,\xi). \qquad (90)$$

З рівностей (87) та оцінок (89)–(90) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_2\alpha_2^0}\times$$

$$\times(E_{c_1}(t-\tau,x,\xi)+E_{c_1}(t-\tau,z^{(2)},\xi)), \qquad (91)$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{z_2,y_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $|k_1| \le 2$, α_1 – число з умови **2**, а α_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$.

Перейдемо до оцінок приростів похідних від W_1 за параметром $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Оскільки для приростів похідних від Z_0 справджуються оцінки (48), то треба ще мати оцінки приростів від Q_1. Щоб ці оцінки отримати, досить установити відповідні оцінки для повторних ядер K_{1l}, $l \ge 1$, де $K_{11} := K_1$.

За допомогою рівності (59) для $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ запишемо зображення

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2} K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{y_2}^{z_2} a_{jl}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{z_2}^{y_2} a_{jl}(t,(\xi_1,z_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y_2))\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_2}^{z_2}a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_2}^{y_2}a_j(t,(\xi_1,z_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y_2))\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{y_2}^{z_2}a_0(t,(x_1,y_2))\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\Delta_{z_2}^{y_2}a_0(t,(x_1,z_2))\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2).$$

Використовуючи оцінки (46) і (48) та нерівності (4) при $h=0$, отримаємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-1-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}\times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi), \quad \alpha_2^0\in(0,\alpha_2]. \tag{92}$$

Далі користуємось зображенням

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_2)=$$

$$=\int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y_2)K_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_\tau^{t_1} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y_2)\Delta_{y_2}^{z_2}K_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}K_{11}(t,x;\beta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{11}(t,x;\beta,\lambda;z_2)\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{11}(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda$$

і оцінюємо його доданки за допомогою оцінок (63) і (92) та нерівності (19). Маємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq$$

$$\leq C\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y_2-z_2|^{\alpha_2}(t-\beta)^{-M-1-m_2|k_2|}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda + C\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}|y_2-z_2|^{\alpha_2}(\beta-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda+$$

$$+C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+m_2(\alpha_2-\alpha_2^0)}|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)\,d\lambda+$$

$$+C\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\beta)^{-M-1+m_1\alpha_1}|y_2-z_2|^{\alpha_2}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-M-1-m_2(|k_2|-\alpha_2)}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda \leq$$

$$\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi),$$

де $\alpha_2^0 \in (0,\alpha_2)$. За індукцією отримуємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}\,E_c(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-m_1(2-l\alpha_1+\alpha_1)-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}, \quad l\geq 2, \quad \alpha_2^0 \in (0,\alpha_2).$$

Наслідком цих оцінок є оцінка

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}\times$$
$$\times E_c(t-\tau,x,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \{y_2,z_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},$$
$$k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2},\quad \alpha_2^0\in(0,\alpha_2). \tag{93}$$

Цю оцінку використовуватимемо для оцінки приросту за параметром $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$ похідних за x_2 від W_1. Запишемо зображення

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)=$$
$$=\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$
$$+\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\beta,\lambda;z_2)\Delta_{y_2}^{z_2}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$
$$+\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\beta,\lambda;z_2)\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{\lambda_2}^{k_2}Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda=$$
$$=:\sum_{k=1}^{4}L_k. \tag{94}$$

Використовуючи оцінки (48) з $h=0$, (67) і (19), маємо

$$|L_1|\le C|y_2-z_2|^{\alpha_2}\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-M-m_2|k_2|}E_c(t-\beta,x,\lambda)\times$$
$$\times(\beta-\tau)^{-M-1+m_1\alpha_1}E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le C|y_2-z_2|^{\alpha_2}(t-t_1)^{-m_2}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t_1}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1}\Big(\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)d\beta\leq$$

$$\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-M+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi).$$

На підставі оцінок (46), (93) і (19) отримуємо

$$|L_2|\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}\int\limits_{\tau}^{t_1}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\beta)^{-m_2|k_2|}(\beta-\tau)^{-1-m_2(\alpha_2^0-\alpha_2)}\times$$

$$\times\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi).$$

Аналогічно за допомогою оцінок (46), (48), (67) і (76) маємо

$$|L_3|\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2}\int\limits_{t_1}^{t}(\beta-\tau)^{-1+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\times$$

$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)d\beta\leq$$

$$\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2}(t-\tau)^{-M+m_1\alpha_1-m_2|k_2|}E_{c_1}(t-\tau,x,\xi),$$

$$|L_4|\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}\int\limits_{t_1}^{t}(\beta-\tau)^{-1-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\times$$

$$\times E_c(t-\beta,x,\lambda)E_c(\beta-\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)d\beta\leq$$

$$\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}E_{c_1}(t-\tau,\lambda,\xi).$$

З формули (94) та одержаних оцінок виразів L_k, $k\in\{1,...,4\}$, випливає оцінка

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)|\leq C|y_2-z_2|^{\alpha_2^0}(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)}\times$$

$$\times E_c(t-\tau,x,\xi),\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \{y_2,z_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},$$

$$k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2},\quad \alpha_2^0\in(0,\alpha_2). \tag{95}$$

5. Основні результати першого етапу побудови ФРЗК

Наведемо результати першого етапу побудови ФРЗК Z, а саме побудови й дослідження ФРЗК Z_1 для рівняння (42).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***1*** *і* ***2*** *. Тоді для рівняння (42) існує класичний ФРЗК* Z_1*, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{96}$$

$$|SZ_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{97}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times$$
$$\times (t-\tau)^{-M-M_{k0}-m_s\alpha_s^0} (E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{98}$$

$$\Big|\ \Delta_{y_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)\ \Big| \le C\,|y_2 - z_2|^{\alpha_2^0} \times$$
$$\times (t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)} E_c(t-\tau,x,\xi); \tag{99}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\ \Big| \le C(t-\tau)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}, \tag{100}$$

$$\Big|\ \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\ \Big| \le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} \times$$
$$\times (t-\tau)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_s\alpha_s^0}, \tag{101}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)d\xi_2\ \Big| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2(|k_2|-\alpha_2)} \times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \tag{102}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)d\xi\ \Big| \le C(t-\tau)^{-m_2(|k_2|-\alpha_2)}, \tag{103}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_s, z_s\} \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1, 2\}$, $\alpha_1^0 \in (0, \alpha_1]$, $\alpha_2^0 \in (0, 1]$ *в (98) і* $\alpha_2^0 \in (0, \alpha_2)$ *в (99), (101),* α_1, α_2 *– числа з умови* **2**, $k := (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, *причому* $|k_1| \leq 2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у (96)–(99), а в (100)–(103)* $k_1 \neq 0$ *і* $k_2 \neq 0$.

Доведення. Оцінки (96)–(99) випливають із відповідних оцінок Z_0 і W_1, встановлених у пунктах 3 і 4. Для одержання оцінок (100) і (101) скористаємося формулою (43) і тим, що на підставі (49) і (50) такі оцінки справджуються для Z_0. Щоб довести, що вони є правильними й для W_1, використаємо оцінки

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t, x; \tau, \xi; y_2) d\xi \Big| \leq C(t - \tau)^{-1+m_1\alpha_1} \tag{104}$$

і

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t, x; \tau, \xi; y_2) d\xi \Big| \leq C|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t - \tau)^{-1+m_1\alpha_1 - m_s\alpha_s^0}, \tag{105}$$

які безпосередньо випливають з оцінок (67) і (76) та рівності (17). За допомогою означення (44) для W_1 записуємо зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t, x; \tau, \xi; y_2) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\xi \right) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2) \left(\Delta_{\lambda}^{X(t-\beta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(\beta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\xi \right) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, x; \beta, \lambda; y_2) d\lambda \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(\beta, X(t - \beta); \tau, \xi; y_2) d\xi.$$

Оцінивши його доданки за допомогою оцінок (46), (49), (104) і (105), рівності (17) та нерівностей (21)–(23), подібно до попереднього отримуємо

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi \Big| \leq C(t-\tau)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}.$$

Аналогічно доводиться оцінка (101) .

Залишилось отримати оцінки (102) і (103). Для цього зауважимо, що справджується рівність

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = 0, \quad k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2} \setminus \{0\}. \tag{106}$$

Ця рівність випливає з аналогічних рівностей для повторних ядер K_{1l}, $l \geq 2$, які є наслідками означення цих ядер і рівностей (55) для Z_0. За допомогою рівностей (55) і (106) отримуємо рівності

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2)d\lambda_2 \Big)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 \Big) d\lambda_1 +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\beta,\lambda;y_2) \Big(\partial_{\lambda_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\beta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 \Big) d\lambda = 0$$

і

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = \partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 +$$

$$+ \partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = 0,$$

з яких на підставі (15), (16), (20) і (99) випливають оцінки

$$\Big| \partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2) d\xi_2 \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) \Big|_{y_2 = X(t-\tau)} d\xi_2 \Big| \leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2+\alpha_2^0)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} |X_2(t-\tau)-\xi_2|^{\alpha_2^0} E_c(t-\tau,x,\xi) d\xi_2 \leq C(t-\tau)^{-M-m_2(|k_2|-\alpha_2)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} E_{c_1}(t-\tau,x,\xi) d\xi_2 \leq C(t-\tau)^{-m_1 n_1 - m_2(|k_2|-\alpha_2)} E_{c_1}^1(t-\tau, x_1-\xi_1),$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2) d\xi \Big| \leq C(t-\tau)^{-m_2(|k_2|-\alpha_2)}.$$

□

6. Другий етап побудови ФРЗК

Перейдемо до завершального етапу побудови ФРЗК Z для рівняння (1), який шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z_2(t,x;\tau,\xi) + W_2(t,x;\tau,\xi), \tag{107}$$

в якому функція

$$Z_2(t,x;\tau,\xi) := Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{108}$$

є параметриксом, побудованим за ФРЗК Z_1 з пунктів 3–5, а

$$W_2(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^\ltimes} Z_2(t,x;\beta,\lambda) Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda, \tag{109}$$

де Q_2 – невідома функція.

Властивості параметриксу Z_2 містяться у наступній лемі, яка безпосередньо випливає з теореми 2 та означення (108).

Лема 6. *За умов* ***1*** *і* ***2*** *правильні такі оцінки:*

$$|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{110}$$

$$|SZ_2(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{111}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-M-M_{k0}-m_s\alpha_s^0} \times$$

$$\times (E_c(t-\tau,x,\xi) + E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{112}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big| \le C(t-\tau)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)}, \tag{113}$$

$$\Big| \, \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \, \Big| \le$$

$$\le C\,|x_s - z_s|^{\alpha_s^0} (t-\tau)^{-m_1(|k_1|-\alpha_1)-m_s\alpha_s^0}, \tag{114}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 \, \Big| \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-m_1 n_1 - m_2(|k_2|-\alpha_2)} E_c^1(t-\tau, x_1-\xi_1), \tag{115}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big| \le C(t-\tau)^{-m_2(|k_2|-\alpha_2)}, \tag{116}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1,2\}$, $\alpha_1^0 \in (0,\alpha_1]$, $\alpha_2^0 \in (0,1]$ *в* (110) *і* $\alpha_2^0 \in (0,1)$ *в* (112), (114), α_1, α_2 *– числа з умови* ***2****,* $k := (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, *причому* $|k_1| \le 2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у (110)–(112), а в (113)–(116)* $k_1 \ne 0$ *і* $k_2 \ne 0$.

Нехай функція Q_2 задовольняє умови **3** і **4**. Тоді для неї отримаємо інтегральне рівняння

$$Q_2(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=K_2(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_2(t,x;\beta,\lambda)Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \qquad (117)$$

в якому ядро K_2 визначається формулою

$$K_2(t,x;\tau,\xi):=\left(\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}+\right.$$

$$\left.+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,x)\right)Z_2(t,x;\tau,\xi),\quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (118)$$

Доведення існування розв'язку інтегрального рівняння (117) та встановлення потрібних властивостей резольвенти проводиться аналогічно до того, як це робилось на першому етапі. За допомогою нерівностей (4), (21) і (110) маємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2}E_{c_0}(t,x;\tau,\xi).$$

Ця оцінка дозволяє отримати таку саму оцінку для резольвенти інтегрального рівняння (117), тобто оцінку

$$|Q_2(t,x;\tau,\xi)|\le C(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2}E_{c_0}(t,x;\tau,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (119)$$

Для отримання оцінок приростів функції Q_2 скористаємось формулами

$$\Delta_{x_s}^{z_s}Q_2(t,x;\tau,\xi)=\Delta_{x_s}^{z_s}K_2(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}K_2(t,x;\beta,\lambda)\times$$

$$\times Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \quad 0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\{1,2\}. \quad (120)$$

і оцінками

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}K_2(t,x;\tau,\xi)|\le C\,|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}\times$$

$$\times(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)), \quad \alpha_s^0\in(0,\alpha_s),\ s\in\{1,2\}, \quad (121)$$

які отримуються звичним оцінюванням членів таких зображень:

$$\Delta_{x_1}^{z_1}K_2(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,z^{(1)})\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{x_1}a_{jl}(t,(z_1,\xi_2))\times$$

$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,z^{(1)};\tau,\xi)+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,z^{(1)})\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{x_1}a_j(t,(z_1,\xi_2))\times$$

$$\times\partial_{z_{1j}}Z_2(t,z^{(1)};\tau,\xi)+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,x)Z_2(t,x;\tau,\xi)+\Delta_{z_1}^{x_1}a_0(t,(z_1,\xi_2))\times$$

$$\times Z_2(t,z^{(1)};\tau,\xi)+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,z^{(1)})\Delta_{x_1}^{z_1}Z_2(t,x;\tau,\xi),$$

$$\Delta_{x_2}^{z_2}K_2(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,x)\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{j,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi)+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,x)\times$$

$$\times\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{z_2}a_0(t,x)Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi)+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,z^{(1)})\Delta_{x_2}^{z_2}Z_2(t,x;\tau,\xi).$$

На підставі (119)–(121) маємо

$$\left|\Delta_{x_s}^{z_s} Q_2(t,x;\tau,\xi)\right| \le C\Bigg(|x_s - z_s|^{\alpha_s^0}(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}\times$$

$$\times\big(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\big)+|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\int\limits_\tau^t (t-\beta)^{-1+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{-1+m_2\alpha_2}\big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(E_c(t-\tau,x,\xi)+$$

$$+E_c(t-\tau,z^{(s)})\big)E_c(\beta-\tau,x,\xi)d\lambda\, d\beta\Bigg) \le C|x_s-z_s|^{\alpha_s^0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-M-1+m_2\alpha_2-m_s\alpha_s^0}\Big(E_c(t-\tau,x,\xi)+E_c(t-\tau,z^{(s)},\xi)\Big),$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \alpha_s^0\in(0,\alpha_s),\ s\in\{1,2\}. \tag{122}$$

Отже, функція Q_2 задовольняє умову **3** з показником $\gamma = m_2\alpha_2$ та умову **4** з $\gamma_s = \alpha_s^0, s \in \{1,2\}$, де α_s^0 – числа з оцінок (122). Тому, для функції W_2 правильні формули (35), (36) і (37) та справджуються оцінки (38) і (39), в яких W_0, G_0 і f замінено на W_2, Z_2 і Q_2 відповідно. Умова (34), яка є важливою для обґрунтування диференційовності потенціалів W_0 і W_1 за змінною x_2, для функції Q_2 не виконується. Але за рахунок кращих властивостей ядра Z_2 і густини Q_2 можна довести, що потенціал W_2 має неперервні похідні першого порядку за x_2, та отримати їх потрібні оцінки. Точні формулювання наведено у наступній лемі.

Лема 7. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови **1** і **2**. Тоді для функції (109) правильні формули*

$$\partial_{x_{2l}}W_2(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_\tau^{t_1} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2l}}Z_2(t,x;\beta,\lambda)Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_{2l}} Z_2(t,x;\beta,\lambda) d\lambda_2 \Big)\times$$

$$\times \Delta_{(\lambda_1, X_2(t-\beta))}^{X(t-\beta)} Q_2(\beta,(\lambda_1, X_2(t-\beta));\tau,\xi) d\lambda_1 +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_{2l}} Z_2(t,x;\beta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t-\beta))} Q_2(\beta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{t} \partial_{x_{2l}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} Z_2(t,x;\beta,\lambda) d\lambda \right) Q_2(\beta, X(t-\beta);\tau,\xi) d\beta,$$

$$l \in \{1, ..., n_2\},$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}} W_2(t,x;\tau,\xi)/ \le C(t-\tau)^{-M-m_2(1-\alpha_2^0)} E_c(t-\tau,x,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad l \in \{1, ..., n_2\},$$
$$\alpha_2^0 \in (1/3, \alpha_2), \quad \alpha_2 \text{ – число з умови } \mathbf{2}.$$

Підсумком усіх попередніх міркувань є наступна теорема, яка є основним результатом статті.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови **1** і **2**. Тоді для рівняння (1) існує класичний ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k := (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k_1|+2|k_2| \le 2$.

7. Висновки

У статті запропоновано умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з однією групою змінних виродження, за яких новою модифікацією звичайного методу Леві побудовано класичний ФРЗК та одержано його оцінки. Ці результати і методика їх отримання знайдуть застосування для побудови й дослідження ФРЗК для загальніших рівнянь, а також для встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші.

Література

[1] *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116–117.

[2] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

[3] *Di Franchesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Express. – 2005. – No 3. – P. 77–116.

[4] *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker-Planck-Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory of stochastic processes. – 2010. – **16 (32)**, № 1. – P. 57–66.

[5] *Івасишен С. Д., Лаюк В. В.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1469–1500.

[6] *Івасишен С. Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, № 2. – С. 172–181.

[7] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 94–106.