Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 1, 76–87

УДК 517.927

Є. В. Гнип, В. А. Михайлець

(Ін-т математики НАН України, Київ)

Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького

evgeniyagnyp27@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua

We investigate the broadest class of linear boundary-value problems for systems of the first order ordinary differential equations whose solutions belong to the complex Slobodetsky space. For these problems, we establish a constructive criterion under which their solutions are continuous in a parameter in this space.

Досліджено найбільш широкий клас лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать до комплексного простору Слободецького. Для таких задач встановлено конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків у цьому просторі.

1. Вступ

Питання щодо обґрунтування граничного переходу у системах диференціальних рівнянь виникають у різних задачах сучасної математики. Найбільш ґрунтовно ці питання досліджено стосовно задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. У роботах І. І. Гіхмана [1], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [2], Я. Курцвейля і З. Ворела [3], А. М. Самойленка [4] встановлено фундаментальні теореми про умови неперервної залежності за параметром її розв'язків. Більшість із цих результатів характеризується спільним підходом до дослідження лінійних і нелінійних систем.

Крайові задачі, залежні від параметра, істотно менш вивчені, ніж задача Коші. У роботах І. Т. Кігурадзе [5, 6] і М. Ашордіа [7] введено і досліджено клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Ці задачі характеризуються тим, що їх розв'язки є абсолютно неперервними на відрізку $[a, b]$ функціями. У цих роботах встановлено умови неперервної залежності за параметром розв'язків у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Недавно ці результати були уточнені та узагальнені на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку [8, 9, 10].

У цій статті ми досліджуємо клас тотальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку на просторі Слободецького [12, 11], який був введений у роботі [13]. Основний результат статті — конструктивний критерій неперервності за параметром їх розв'язків у цьому просторі. Буде також показано, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок.

Відмітимо, що тотальні крайові задачі щодо інших важливих класів функцій — просторів Соболєва і просторів $C^{(n+1)}$ — введено і досліджено у роботах [14, 15, 16] і [17] відповідно. Там встановлено достатні умови неперервності за параметром розв'язків цих задач.

2. Постановка задачі

Нехай задані числа $p \in (1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}_+$, $s := [s] + \{s\}$, де $[s] \in \mathbb{N}, 0 \leq \{s\} < 1$ і скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Введемо позначення: $W_p^s := W_p^s\left((a, b), \mathbb{C}\right)$, $\left(W_p^s\right)^m := W_p^s\left((a, b), \mathbb{C}^m\right)$,

$\left(W_p^s\right)^{m\times m} := W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}^{m\times m}\right)$ є простори Слободецького на інтервалі (a,b) відповідно комплекснозначних функцій, векторфункцій і матриць-функцій.

Простір Слободецького W_p^s з нецілим додатним s означається [12] (п.2.5.1, зауваж. 4) як простір функцій f, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b \frac{|f^{[s]}(x)-f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy\right)^{1/p} < +\infty,$$

де $\|f\|_{[s],p}$ норма в просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Тут, звісно, $W_p^0 := L_p$. Функціонал $\|f\|_{s,p}$ є нормою на просторі W_p^s.

Позначимо $M(W_p^s) := \{\varphi : \varphi f \in W_p^s, \forall f \in W_p^s\}$ - простір мультиплікаторів на класі W_p^s. При $s \in (0,\frac{1}{p}]$ і $p>1$ простір W_p^s містить необмежені функції, які не будуть мультиплікаторами в W_p^s. Тому для вказаних значень s і p простір W_p^s не є алгеброю відносно множення. Тоді в роботі [13] було встановлено наступне

Твердження 1. *Нехай $p>1$, $s\in(0,1)$. Тоді $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ і виконується нерівність*

$$\|\varphi\|_{M(W_p^s)} \le c\|\varphi\|_{1,p},$$

де c - деяка стала.

Розглянемо лінійну крайову задачу на просторі $(W_p^{s+1})^m$ для системи m диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$By(\cdot) = c. \tag{2}$$

Тут матриця-функція $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^s)^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$, а B є лінійний неперервний оператор

$$B : \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Розв'язок цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (1) в кожній точці (a, b) (при $[s] = 0$, майже скрізь). Крім того, $y(\cdot)$ повинна задовольняти рівність (2).

Неоднорідна крайова умова (2) охоплює всі класичні види крайових умов: задачі Коші, двоточкові та багатоточкові, інтегральні та мішані крайові задачі; а також ряд некласичних задач, бо може містити похідні аж до порядку $[s] \geq 1$. За аналогією з [14, 15] крайову задачу (1), (2) можна називати тотальною щодо простору W_p^{s+1}.

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то природньо виникає питання про неперервність розв'язку $y(\cdot, \varepsilon)$ такої задачі за параметром ε в банаховому просторі $\left(W_p^{s+1}\right)^m$. Мета даної роботи полягає в тому, щоб знайти конструктивний критерій неперервності за параметром розв'язків у просторі $(W_p^{s+1})^m$ та показати, що похибка і нев'язка цих розв'язків мають однаковий порядок.

3. Крайові задачі, тотальні щодо простору Слободецького

Перепишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді $(L, B)y = (f, c)$ за допомогою лінійного неперервного оператора

$$(L, B) : (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{4}$$

Нагадаємо властивості даного оператора, які доведені у роботі [13].

Теорема 1. *Оператор* (4) *є фредгольмовим з індексом 0.*

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні та мають однакову вимірність. Якщо цей оператор фредгольмів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс $\dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1))$ дорівнює нулю.

Дамо критерій оборотності оператора (4). Виберемо довільним чином точку $t_0 \in [a,b]$. Позначимо через $Y = (y_{j,k})_{j,k=1}^{m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) = -A(t)Y(t), \quad a \le t \le b, \qquad Y(t_0) = I_m, \tag{5}$$

де I_m — одинична матриця порядку m. Зауважимо, що $Y \in (W_p^{n+1})^{m\times m}$. Покладемо

$$[BY] := \left(B\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{m,1} \end{pmatrix} \ \dots \ B\begin{pmatrix} y_{1,m} \\ \vdots \\ y_{m,m} \end{pmatrix} \right).$$

Теорема 2. *Оператор* (4) *оборотний тоді і тільки тоді, коли* $\det[BY] \neq 0$.

4. Основні результати

Припустимо, що крайова задача (1), (2) залежить від числового параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, де фіксоване число $\varepsilon_0 > 0$. Отже, розглянемо крайову задачу

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = (\varepsilon), \tag{7}$$

залежну від $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ ця задача є тотальною щодо простору W_p^{s+1}, тобто шукана вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ належить до $(W_p^{s+1})^m$ і довільно задано матрицю-функцію $A(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$, лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (W_p^{n+1})^m \to \mathbb{C}^m$ і вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$.

Для крайової задачі (6), (7) розглянемо такі

Граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (W_p^{s+1})^m$;

(III) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^m$, $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^m$.

Розглянемо ще одну умову

Припущення $\mathcal{E}$. *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тепер сформулюємо наше

Основне означення 1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (6), (7) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$, *якщо виконуються такі дві умови:*

($*$) *Існує додатне число* $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$ *і будь-яких правих частин* $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^s)^m$ *і* $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^m$.

($**$) *Граничні умови (III) тягнуть за собою збіжність*

$$y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) \quad \textit{в} \quad (W_p^{s+1})^m \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{8}$$

Перейдемо до основного результату роботи

Основна теорема. *Розв'язок крайової задачі* (6), (7) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє припущення* $\mathcal{E}$ *і граничні умови* (I) *і* (II).

Основну теорему доповнює такий результат.

Теорема 3. *Нехай крайова задача* (6), (7) *задовольняє припущення* $\mathcal{E}$ *і граничні умови* (I) *і* (II). *Тоді існують додатні числа*

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2 такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ виконується двобічна оцінка

$$\begin{aligned}&\gamma_1\big(\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \\ &\quad \le \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p} \le \gamma_2\big(\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} \\ &\quad + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}\big).\end{aligned} \tag{9}$$

Тут числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot,0)$, $y(\cdot,\varepsilon)$, $f(\cdot,\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$.

Згідно з теоремою 3 похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (6), (7) мають однаковий порядок. При цьому $y(\cdot,0)$ розглядаємо як наближений розв'язок цієї задачі.

5. Обґрунтування основного результату

Спочатку доведемо основну теорему за допомогою трьох наступних лем.

Зіставимо неперервний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) :\, (W_p^{s+1})^m \to (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m \tag{10}$$

з крайовою задачею (6), (7), де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Згідно з теоремою 1, оператор (10) є фредгольмовим з індексом 0.

Тому припущення $\mathcal{E}$ еквівалентне тому, що оператор (10) при $\varepsilon = 0$ є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0)) :\, (W_p^{s+1})^m \leftrightarrow (W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{11}$$

Лема 1. *Нехай виконуються припущення $\mathcal{E}$ і граничні умови* (I) *і* (II). *Тоді існує додатне $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що оператор* (10) *оборотний для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$.*

Лема 2. *Нехай виконуються припущення $\mathcal{E}$ і граничні умови* (I)–(III). *Тоді єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+1})^m$ крайової задачі* (6), (7), *де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, задовольняє граничну властивість* (8).

Доведення лем 1 та 2 наведено в роботі [13] у теоремі 3. Таким чином обґрунтована достатність в основній теоремі.

Лема 3. *Нехай крайова задача* (6), (7) *задовольняє Основне означення. Тоді виконуються граничні умови* (I) *і* (II).

Доведення цієї леми розіб'ємо на 3 кроки.

Крок 1. Доведемо, що крайова задача (6), (7) задовольняє граничну умову (I). В силу умови $(*)$ основного означення, оператор (10) оборотний для будь якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$. Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$ розглянемо матричну крайову задачу

$$Y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon) = 0 \cdot I_m, \quad t \in [a,b],$$

$$[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m.$$

Ця крайова задача є сукупністю m крайових задач (6), (7) із правими частинами, не залежними від ε. Тому, за припущенням, вона має єдиний розв'язок $Y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$ і він задовольняє умову $Y(\cdot,\varepsilon) \to Y(\cdot,0)$ у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$. Відмітимо, що $\det Y(t,\varepsilon) \neq 0$ для довільного $t \in [a,b]$, бо інакше стовпці-функції матриці $Y(\cdot,\varepsilon)$ будуть лінійно залежними, що суперечитиме умові $[BY(\cdot,\varepsilon)] = I_m$. Тому

$$A(\cdot,\varepsilon) = -Y'(\cdot,\varepsilon)(Y(\cdot,\varepsilon))^{-1} \to -Y'(\cdot,0)(Y(\cdot,0))^{-1} = A(\cdot,0)$$

у просторі $(W_p^{s+1})^{m\times m}$ при $\varepsilon \to 0+$, тобто виконується умова (I).

Крок 2. Покажемо, що виконується умова (II) . Спочатку доведемо, що $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора $B(\varepsilon) : (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$. Припустимо супротивне: існує числова послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty} \subset (0, \varepsilon_1)$ така, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і

$$0 < \|B(\varepsilon^{(k)})\| \to \infty, \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для кожного номера k виберемо функцію $x_k \in (W_p^{s+1})^m$ таку, що

$$\|x_k\|_{s+1,p} = 1 \quad i \quad \|B(\varepsilon^{(k)})x_k\|_{\mathbb{C}^m} \geq \frac{1}{2}\|B(\varepsilon^{(k)})\|.$$

Покладемо

$$y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := \|B(\varepsilon^{(k)})\|^{-1}x_k,$$
$$f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) := L(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}),$$
$$c(\varepsilon^{(k)}) := B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}).$$

Оскільки $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ у просторі $(W_p^{s+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$, то $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^{s})^m$, бо, за доведеним, $A(\cdot,\varepsilon)$ задовольняє умову (I). Оскільки $1/2 \leq \|c(\varepsilon^{(k)})\|_{\mathbb{C}^m} \leq 1$, то, перейшовши до підпослідовності чисел $\varepsilon^{(k)}$, можна вважати, що $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0)$ при $k \to \infty$, де $c(0)$ — деякий ненульовий вектор в $\mathbb{C}^m$. Таким чином, для кожного номера k вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \in (W_p^{n+1})^m$ є єдиним розв'язком крайової задачі

$$L(\varepsilon^{(k)})\, y(t,\varepsilon^{(k)}) = f(t,\varepsilon^{(k)}), \quad t \in (a,b),$$
$$B(\varepsilon^{(k)})\, y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) = c(\varepsilon^{(k)}).$$

Тут, нагадаємо, $f(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ в $(W_p^{n+1})^m$ і $c(\varepsilon^{(k)}) \to c(0) \neq 0$ при $k \to \infty$. Тому на підставі умови $(**)$ базового означення функція $y(\cdot,\varepsilon^{(k)})$ збігається у просторі $(W_p^{n+1})^m$ до єдиного розв'язку $y(\cdot,0)$ граничної крайової задачі, яка складається з диференціального рівняння $L(0)y(t,0) = 0$, $t \in (a,b)$, і неоднорідної крайової умови $B(0)y(\cdot,0) = c(0)$. Але, згадаємо, $y(\cdot,\varepsilon^{(k)}) \to 0$ у тому ж просторі. Отож, $y(\cdot,0) \equiv 0$, що суперечить крайовій умові. Тому зроблене припущення є хибним, тобто $\|B(\varepsilon)\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Крок 3. Тепер можемо показати, що виконується умова (II). За доведеним у попередніх двох абзацах, існують числа $\gamma' > 0$ і $\varepsilon' \in (0,\varepsilon_1)$ такі, що $\|(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\| \leq \gamma'$ для усіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon')$, де $\|\cdot\|$ є норма обмеженого оператора, що діє з простору $(W_p^{n+1})^m$ у простір $(W_p^{n})^m \times \mathbb{C}^m$. Виберемо функцію $y \in (W_p^{n+1})^m$ довільним чином та покладемо $f(\cdot,\varepsilon) := L(\varepsilon)y$ і $c(\varepsilon) := B(\varepsilon)y$ для кожного

$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$. Тоді при $\varepsilon \to 0+$ маємо:

$$\begin{gathered} \left\| B(\varepsilon)y - B(0)y \right\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\ \leq \left\| (f(\cdot,\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0), c(0)) \right\|_{(W_p^s)^m \times \mathbb{C}^m} \leq \\ \leq \gamma' \left\| (L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \big((f(\cdot,\varepsilon), c(\varepsilon)) - (f(\cdot,0), c(0)) \big) \right\|_{s+1,p} = \\ = \gamma' \left\| (L(0), B(0))^{-1} (f(\cdot,0), c(0)) - \right. \\ \left. -(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} (f(\cdot,0), c(0)) \right\|_{s+1,p} \to 0 \end{gathered}$$

за умовою $(**)$. Отже, крайова задача (6), (7) задовольняє умову (II).

Таким чином, основна теорема доведена.

Доведемо теорему 3. Доведемо спочатку ліву частину подвійної нерівності (9). Згідно з граничними умовами (I) і (II)

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \xrightarrow{s} (L(0), B(0)), \quad \varepsilon \to 0+.$$

Тому норми операторів обмежені деяким числом $\gamma' > 0$ при $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Дійсно, припустивши протилежне, можна знайти послідовність $(\varepsilon^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ таку, що $\varepsilon^{(k)} \to 0$ і $\|(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Але за теоремою Банаха-Штейнгауза це суперечить сильній збіжності $(L(\varepsilon^{(k)}), B(\varepsilon^{(k)}))$ до $(L(0), B(0))$ при $k \to \infty$. Тому для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2')$

$$\begin{gathered} \|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m} \leq \\ \leq \gamma' \|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p}, \end{gathered}$$

тобто встановлена ліва частина (9) із $\gamma_1 := 1/\gamma'$.

Доведемо праву частину подвійної нерівності (9). За лемою 1 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ має обмежений обернений оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}$ для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon)$, причому виконується

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{s} (L(0), B(0))^{-1}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Справді, вибравши $f \in (W_p^n)^m$ та $c \in \mathbb{C}^m$, маємо

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))^{-1}(f, c) =: y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0) := (L(0), B(0))^{-1}(f, c),$$

в $(W_p^{n+1})^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тоді за теоремою Банаха-Штейнгауза аналогічним чином, який наведений у попередньому абзаці, випливає, що норми цих обернених операторів обмежені. Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$

$$\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{s+1,p} \leq$$
$$\leq \gamma_2\big(\,\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - c(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}\big).$$

Звідси негайно випливає права частина двобічної оцінки (9). Теорема 3 доведена.

Література

[1] *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 2. – С. 215–219.

[2] *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, вып. 3. – С. 147–153

[3] *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Czechoslovak Math. J. – 1957. – **7**, № 4. – С. 568–583.

[4] *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 289–298.

[5] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[6] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[7] *M. Ashordia.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. – 1996. – **46**, No. 3. – P. 385–404.

[8] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[9] *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 70–81.

[10] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333–342.

[11] *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 404 с.

[12] *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.

[13] *Hnyp E. V.* Continuity with respect to a parameter of solutions of one-dimentional linear boundary value problem on the Slobodetsky space. // Ukrainian Math. J. – 2016. – **68**, № 6. – P. 746–756.

[14] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[15] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, No. 4. – P. 589–599.

[16] *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584–591.

[17] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.