Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 338–374

УДК 517.956.223

І. С. Чепурухіна

(Інститут математики НАН України, Київ)

Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі

Chepuruhina@mail.ru

In the extended Sobolev scale, we investigate a class of elliptic problems with additional unknown functions in boundary conditions, which is introduced by B. Lawruk. This scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces for pairs of Sobolev inner-product spaces and, moreover, admits a constructive description in terms of Hörmander spaces. We prove a theorem on the Fredholm property of the bounded operators corresponding to these problems on the extended Sobolev scale and a theorem on local regularity of their solutions in Hörmander spaces. We find sufficient conditions under which the generalized derivatives (of a given order) of the solutions are continuous.

У розширеній соболєвській шкалі досліджено клас еліптичних задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах, введений Б. Лавруком. Ця шкала складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва, і припускає конструктивний опис у термінах просторів Хермандера. Доведено теорему про нетеровість обмежених операторів, відповідних цим задачам у розширеній соболєвській шкалі, і теорему про локальну регулярність їх розв'язків у просторах Хермандера. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) розв'язків.

1. Вступ

У 1963 році польським математиком Б. Лавруком [1–3] був введений важливий клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Цей клас природно виникає при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової до формально спряженої задачі і є замкненим відносно такого переходу. Як з'ясувалося, до цього класу належать різні крайові задачі, які виникають у теорії пружності і гідродинаміці [4–6].

Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком були досліджені у соболєвських просторах В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю і Й. Россманом [7, розд. 3] переважно для одного еліптичного рівняння та І. Я. Ройтберг [8, 9] для еліптичних систем мішаного порядку. (Результати І. Я. Ройтберг викладено у монографії Я. А. Ройтберга [10, розд. 2]). Було доведено теореми про нетеровість обмежених операторів, що відповідають цим задачам, і породжені ними ізоморфізми, теореми про апріорні оцінки розв'язків задач і підвищення регулярності розв'язків. Відмітимо, що з точки зору застосувань є найбільш цікавим саме випадок гільбертових просторів, розглянутий у монографії [7].

Мета цієї роботи — встановити теореми про характер розв'язності еліптичних крайових задач за Б. Лавруком і властивості їх розв'язків в розширеній соболєвській шкалі, яка складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. З теореми В. І. Овчинникова [11, п. 11.4] випливає, що ця шкала утворена просторами Хермандера [12, 13]

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{B}_{2,\alpha(\langle\cdot\rangle)} := \bigl\{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \alpha(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\bigr\},$$

де α є довільна додатна функція, RO-змінна на нескінченності за В. Г. Авакумовичем [14, 15]. Тут $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є повільно зростаючого розподілу w, а $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

Розширена соболєвська шкала була виділена і досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [16–19]. Вона отримується з гільбертової соболєвської шкали методом інтерполяції з функціональним параметром пар просторів і припускає коректне означення на гладких компактних многовидах за допомогою локальних карт. Оскільки при інтерполяції просторів успадковується обмеженість лінійних операторів та їх нетеровість (при незмінному дефекті), то цей метод є дуже корисним у теорії еліптичних рівнянь. Так, у роботах В. А. Михайлеця, О. О. Мурача і А. В. Аноп [20–28] на основі методу інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів була побудована теорія розв'язності еліптичних крайових задач у різних шкалах гільбертових просторів Хермандера. Втім, клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах не був охоплений цією теорією.

В останній час у роботах О. О. Мурача та І. С. Чепурухіної [29–31] цей клас було досліджено в уточненій соболєвській шкалі. Вона є вужчою за розширену соболєвську шкалу і складається з просторів Хермандера H^{α}, де функція α є правильно змінною на нескінченності за Й. Караматою [14, 15]. Остання, на відміну від довільної RO-змінної функції, має числовий порядок змінення на нескінченності, що суттєво полегшує дослідження еліптичних крайових задач в уточненій соболєвській шкалі.

Ця робота складається з восьми пунктів. Пункт 1 — вступ. У п. 2 дано означення еліптичної задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах, запропоноване Б. Лавруком. Там же розглянуто формальну спряжену до неї задачу і деякі приклади. У п. 3 описано функціональні простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. Основні результати роботи сформульовано у п. 4. Це — теорема про нетеровість обмежених операторів, відповідних задачі у цій шкалі, і теорема про локальну регулярність розв'язків задачі. Пункт 5 містить відомі й потрібні у роботі результати з теорії інтерполяції просторів. Там наведено означення інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів і розглянуто її важливі властивості. Також сформульовано інтерполяційні властивості розширеної соболєвської шкали. У п. 6 доведено основні результати, наведені у п. 4. Деякі їх застосування розглянуто у п. 7. Там встановлено тонкі достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку розв'язків досліджуваної задачі, зокрема, умови класичності узагальненого розв'язку. Ці умови сформульовано у термінах приналежності правих частин задачі до відповідних просторів Хермандера. У завершальному п. 8 наведено висновки до роботи.

2. Постановка задачі

Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$. Припускається, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим (компактним і без краю) многовидом вимірності $n-1$ (при цьому C^∞-структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$). Як зазвичай, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Позначимо через $\nu(x)$ орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$.

Виберемо довільно цілі числа $q \geq 1$, $\varkappa \geq 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa} \in [0, 2q-1]$ і $r_1, \ldots, r_\varkappa$.

Розглянемо в області Ω (лінійну) крайову задачу із $\varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{2}$$

Тут

$$A := A(x, D) := \sum_{|\mu| \leq 2q} a_\mu(x) D^\mu$$

є лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q \geq 2$, кожне

$$B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu$$

є крайовий диференціальний оператор на Γ порядку m_j, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ є (дотичний) диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно.

Тут і надалі використовуються такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс, $|\mu| := \mu_1 + \cdots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \cdots D_n^{\mu_n}$, $D_l := i\partial/\partial x_l$, де i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Окрім того, покладаємо $D_\nu := i\partial/\partial\nu(x)$ та $\xi^\mu := \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$ для вектора $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

У крайовій задачі (1), (2) функція u на Ω, і $\varkappa$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ є шуканими. В роботі усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

Надалі припускаємо, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω за Б. Лавруком [2, п. 1]. Слідуючи [7, п. 3.1.3], подамо означення еліптичності цієї задачі у такій еквівалентній формі.

Позначимо через $A^{(0)}(x, \xi)$ і $B_j^{(0)}(x, \xi)$ головні символи диференціальних операторів $A(x, D)$ і $B_j(x, D)$ відповідно. Нагадаємо, що для кожного фіксованого $x \in \overline{\Omega}$ вираз

$$A^{(0)}(x, \xi) := \sum_{|\mu|=2q} a_\mu(x)\xi^\mu$$

є однорідним поліномом порядку $2q$ змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$, і для кожного фіксованого $x \in \Gamma$ вираз

$$B_j^{(0)}(x, \xi) := \sum_{|\mu|=m_j} b_{j,\mu}(x)\xi^\mu$$

є однорідним поліномом порядку m_j змінної $\xi \in \mathbb{C}^n$. Окрім того, позначимо через $C_{j,k}^{(0)}(x, \tau)$ головний символ дотичного диференціального оператора $C_{j,k}(x, D_\tau)$, якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} = m_j + r_k$. Для кожної точки $x \in \Gamma$ вираз $C_{j,k}^{(0)}(x, \tau)$ є однорідним поліномом порядку $m_j + r_k$ змінної τ, де τ— довільний дотичний вектор до межі Γ у точці x. Якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} < m_j + r_k$, то покладаємо $C^{(0)}_{j,k}(x,\tau) := 0$.

Крайова задача (1), (2) називається еліптичною в області Ω, якщо виконуються такі три умови:

(i) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є еліптичним у кожній точці $x \in \overline{\Omega}$, тобто $A^{(0)}(x,\xi) \neq 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є правильно еліптичним у кожній точці $x \in \Gamma$, тобто для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, многочлен $A^{(0)}(x,\tau+\zeta\nu(x))$ комплексної змінної ζ має q коренів з додатною уявною частиною і стільки ж коренів з від'ємною уявною частиною (підрахованих з урахуванням їх кратності).

(iii) Система крайових умов (2) накриває рівняння (1) у кожній точці $x \in \Gamma$. Це значить, що для кожного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, крайова задача

$$A^{(0)}(x,\tau+D_t\,\nu(x))\theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t>0,$$

$$B^{(0)}_j(x,\tau+D_t\,\nu(x))\theta(t)\big|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{(0)}_{j,k}(x,\tau)\lambda_k = 0,$$

$$j = 1,...,q+\varkappa,$$

має лише тривіальний (нульовий) розв'язок. Ця задача розглядається відносно невідомої функції $\theta \in C^\infty([0,\infty))$, що задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, і невідомих комплексних чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_\varkappa$. Тут $A^{(0)}(x,\tau+D_t\,\nu(x))$ і $B^{(0)}_j(x,\tau+D_t\,\nu(x))$ є диференціальні оператори відносно $D_t := i\partial/\partial t$, які отримуємо, поклавши $\zeta := D_t$ у відповідно многочленах $A^{(0)}(x,\tau+\zeta\nu(x))$ і $B^{(0)}_j(x,\tau+\zeta\nu(x))$ змінної ζ.

Відмітимо, що умова (ii) є наслідком умови (i) у випадку, коли $n \geq 3$.

Приклад 1. Простим прикладом еліптичної крайової задачі (1), (2), де $n=2$ і $\varkappa=1$, служить така задача:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u + v = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тут Δ — оператор Лапласа, а $\partial/\partial\tau$ є похідна вздовж кривої Γ.

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійне відображення

$$\Lambda : (u, v_1, ..., v_\varkappa) \mapsto$$
$$\mapsto \left(Au,\ B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k \right), \tag{3}$$
$$\text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma).$$

У роботі буде досліджено властивості продовження за неперервністю цього відображення у підходящих парах гільбертових просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження нам знадобиться така формула Гріна [1, п. 4] (див. також [7, теорема 3.1.2]):

$$(Au, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \left(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j \right)_\Gamma = (u, A^+ w)_\Omega +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2q} \left(D_\nu^{j-1} u, K_j w + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left(v_j, \sum_{k=1}^{q+\varkappa} C_{k,j}^+ h_k \right)_\Gamma,$$

де функції $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_\varkappa, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa} \in C^\infty(\Gamma)$ довільні, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно. Тут

$$A^+ w := A^+(x, D) w(x) := \sum_{|\mu| \le 2q} D^\mu (\overline{a_\mu(x)} w(x)),$$

тобто A^{+} є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Окрім того, $C^{+}_{k,j}$ і $Q^{+}_{k,j}$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення крайових операторів B_j у вигляді

$$B_j(x,D)=\sum_{k=1}^{2q} Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1}.$$

(Звісно, якщо $k>m_j$, то $Q_{j,k}=0$). Нарешті, $K_j:=K_j(x,D)$ є деякий лінійний крайовий диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_j\leq 2q-j$.

З огляду на формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q+\varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$A^{+}w=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_j w+\sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^{+}_{k,j}h_k=\chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j=1,...,2q, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^{+}_{k,j}h_k=\chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j=1,...,\varkappa. \tag{6}$$

Ця задача формально спряжена до задачі (1), (2) відносно зазначеної формули Гріна. Відмітимо [7, теорема 3.1.2], що еліптичність задачі (1), (2) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (4), (5), (6).

Зауважимо, що ця формула Гріна правильна і у випадку, коли $\varkappa=0$. (Звісно, тоді у ній відсутні суми, у яких підсумовування здійснюється за індексом k або j, що пробігає значення від 1 до $\varkappa$.) Узявши довільну еліптичну крайову задачу (без додаткових невідомих функцій) і перейшовши до формально спряженої задачі відносно цієї формули Гріна, отримаємо еліптичну задачу з q додатковими невідомими функціями у крайових умовах, де $2q$ — порядок правильно еліптичного рівняння, що фігурує у вихідній крайовій задачі. Якщо ця задача нерегулярна, то додаткові невідомі функції не можна, взагалі кажучи, виключити з крайових умов формально спряженої задачі. Наведемо такий приклад [7, п. 3.1.5].

Приклад 2. Для рівняння Пуассона у двовимірній області Ω розглянемо еліптичну крайову задачу з косою похідною:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тут коефіцієнти α, β є дійсними функціями класу $C^\infty(\Gamma)$ такими, що $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. (Як і раніше, $\partial/\partial\tau$ є похідна вздовж кривої Γ.) Для цієї задачі формально спряженою відносно розглянутої формули Гріна (при $\varkappa = 0$) є така крайова задача:

$$\Delta w = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial(\alpha h)}{\partial \tau} = \chi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$w - \beta h = \chi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

(Останнє рівняння помножили на i.) Ця задача містить додаткову невідому функцію h у крайових умовах і є еліптичною за Б. Лавруком в області Ω. У випадку, коли $\beta(x_0) = 0$ для деякої точки $x_0 \in \Gamma$, функцію h не можна виключити з крайових умов. У цьому випадку вихідна еліптична крайова задача не є регулярною.

3. Розширена соболєвська шкала

Як говорилося у вступі, ця шкала складається з гільбертових просторів Хермандера $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, для яких показником регулярності служить довільна додатна функція α, RO-змінна на нескінченності за В. Г. Авакумовичем. Клас таких функцій позначаємо через RO.

У цьому пункті спочатку дамо означення класу RO, обговоримо деякі його властивості і наведемо приклади. Потім сформулюємо означення простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ та його аналогів для Ω і Γ.

Множина RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c \quad \text{для довільних} \quad t \geq 1,\ \lambda \in [1, b] \tag{7}$$

(сталі b і c можуть залежати від α).

Клас RO був введений В. Г. Авакумовичем [32] у 1936 р. і є достатньо вивченим (див. [14, додаток 1] і [15, пп. 2.0 – 2.2]).

Цей клас допускає простий опис [14, с. 87]:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \text{ для } t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1, \infty)$.

Для нас важлива наступна властивість [14, с. 88] класу RO. Для кожної функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_1 \geq 1$ такі, що

$$c_1^{-1} \lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \ \ \lambda \geq 1. \tag{8}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{ виконується ліва нерівність в } (8)\},$$
$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{ виконується права нерівність в } (8)\}.$$

Звісно, $-\infty < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < \infty$. Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ називають відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ (див. [33] і монографію [15, п. 2.1.2]).

Нагадаємо деякі приклади RO-змінних функцій.

Приклад 3. Розглянемо неперервну функцію $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ таку, що

$$\alpha(t) := t^s (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{k \text{ разів}} t)^{r_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1.$$

Тут $k \in \mathbb{N}$ і $s, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ є довільно вибрані параметри. Функція α належить до класу RO. Для неї $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = s$.

Приклад 4. Покладемо

$$\eta(t) := t^\sigma e^{(\ln t)^r} \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Тут $\sigma \in \mathbb{R}$ і $r \in (0, 1)$ є довільно вибрані параметри. Функція η належить до класу RO, причому $\sigma_0(\eta) = \sigma_1(\eta) = \sigma$. Відмітимо, що ця функція зростає швидше, ніж будь-яка функція α з прикладу 3 при $s = \sigma$, але повільніше за будь-яку функція з цього ж прикладу при $s > \sigma$.

Функції з прикладів 3 і 4 є правильно змінними на нескінченності за Й. Караматою [34]. Остання властивість для вимірної за Борелем функції $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ означає існування числа $s \in \mathbb{R}$ такого, що

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} = \lambda^s \quad \text{для кожного} \;\; \lambda > 0.$$

Число s називається порядком змінення функції α на нескінченності. З теореми про рівномірну збіжність [14, теорема 1.1] випливає такий факт: якщо неперервна функція $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$ правильно змінна на нескінченності за Й. Караматою порядку s, то $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = s$.

Відмітимо, що існують функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ такі, що $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha)$, але α не еквівалентна в околі нескінченності жодній функції $\eta > 0$, правильно змінній на нескінченності. (Додатні функції α і η називаємо еквівалентними в околі нескінченності, якщо обидві функції $\alpha(t)/\eta(t)$ і $\eta(t)/\alpha(t)$ обмежені при $t \gg 1$.)

Приклад 5. Прикладом такої функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ служить функція $\alpha(t) := e^{h(\ln t)}$ аргументу $t \geq 1$, де h означено за формулами: $h(x) := 0$ при $x \in [0,1]$ та $h(x) := h(2^j) + (x - 2^j)^{1/2}$ при $x \in [2^j, 2^{j+1}]$ для кожного цілого $j \geq 0$. Для неї $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = 0$. Це обґрунтовано в [15, твердження 2.2.8].

Дамо також приклад функції класу RO з різними індексами Матушевської.

Приклад 6. Покладемо

$$\alpha(t) := \begin{cases} t^{\theta+\delta \sin(\ln \ln t)^r} & \text{при } t > e, \\ t^{\theta} & \text{при } 1 \leq t \leq e. \end{cases}$$

Тут довільно вибрані числові параметри $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1]$. Безпосередньо перевіряється, що $\alpha \in \mathrm{RO}$, причому $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

Перейдемо тепер до просторів Хермандера. Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, де $n \in \mathbb{N}$, складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Тут $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, введений Л. Шварцом. (Нагадаємо, що $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ є згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$). У роботі розподіли трактуємо як *анти*лінійні функціонали на просторі $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ основних функцій.

Скалярний добуток у просторі $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ введений за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Він задає на $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і породжує норму

$$\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Цей простір сепарабельний; у ньому щільна множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

Простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Л. Хермандером в [12, п. 2.2] (див. також його монографію [13, п. 10.1]). А саме, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ для усіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, то $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$. Відмітимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [35, § 2].

У випадку степеневої функції $\alpha(t) \equiv t^s$, простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ стає (гільбертовим) простором Соболєва $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ порядку $s \in \mathbb{R}$.

У загальній ситуації

$$\begin{gathered}(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n);\end{gathered} \tag{9}$$

тут обидва вкладення неперервні й щільні. Властивість (9) є прямим наслідком нерівності (8), записаної для $t = 1$.

Слідуючи [18, 19], клас функціональних просторів

$$\left\{H^\alpha(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathrm{RO}\right\} \tag{10}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Відмітимо, що вона містить уточнену соболєвську шкалу, введену в [20]. Остання складається з усіх просторів $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, де функція η є правильно змінною на нескінченності за Й. Караматою.

У роботі потрібні аналоги розширеної соболєвської шкали для області Ω та її межі Γ. Вони будуються стандартним чином за класом (10) (див. [19, с. 139] і [24, с. 139]). Наведемо відповідні означення. Припускаємо тепер, що $n \geq 2$.

Як і раніше, $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω усіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Норма в $H^{\alpha}(\Omega)$ введена за формулою

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} : \, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n), \; w = u \; \text{в} \; \Omega \,\bigr\},$$

де $u \in H^{\alpha}(\Omega)$. Відносно цієї норми простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний, оскільки він є факторпростір простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ за підпростором

$$\bigl\{w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega\bigr\}.$$

Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{\alpha}(\Omega)$.

Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах належать до $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. А саме, нехай довільним чином вибрано скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Окрім того, нехай функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, утворюють розбиття одиниці на Γ, яке задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$. Тоді, за означенням, комплексний лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є представлення розподілу h у локальній карті π_j. У просторі $H^{\alpha}(\Gamma)$ заданий скалярний добуток за формулою

$$(h_1, h_2)_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} \bigl((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j\bigr)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^{\alpha}(\Gamma)$. Цей простір гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [24, с. 139]. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\alpha}(\Gamma)$.

Означені щойно функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали

$$\{H^{\alpha}(\Omega) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \quad \text{і} \quad \{H^{\alpha}(\Gamma) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{11}$$

на Ω і Γ відповідно. Вони містять шкали гільбертових просторів Соболєва: якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\alpha}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є соболєвські простори порядку s.

Вкладення просторів є відношенням часткового порядку на шкалах (11), яке має таку властивість. Нехай $\alpha, \eta \in \mathrm{RO}$ і $G \in \{\Omega, \Gamma\}$. Відношення функцій α/η обмежене в околі нескінченності тоді і тільки тоді, коли $H^{\eta}(G) \hookrightarrow H^{\alpha}(G)$. Це вкладення щільне і неперервне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha(t)/\eta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Ця властивість є наслідком теорем 2.2.2 і 2.2.3 з монографії Л. Хермандера [12].

На її підставі робимо висновок, що властивість (9) залишається правильною, якщо у ній замінити $\mathbb{R}^n$ на Ω або Γ. При цьому вкладення просторів є щільними і компактними.

Потрібні нам інтерполяційні властивості розширеної соболєвської шкали будуть розглянуті у п. 5.

4. Основні результати

Сформулюємо основні результати статті про характер розв'язності еліптичної крайової задачі (1), (2) і регулярність її розв'язків у розширеній соболєвській шкалі.

Попередньо домовимося про таке. Далі будемо використовувати простори Хермандера $H^{\alpha}(G)$ із $G \in \{\Omega, \Gamma\}$, для яких показник регулярності поданий у вигляді $\alpha(t) \equiv \eta(t)t^s$, де $\eta \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$. Для того, щоб не писати аргумент t у верхньому індексі, що служить показником регулярності, будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t) := t$ аргументу $t \geq 1$. Тоді $H^{\alpha}(G) = H^{\eta\varrho^s}(G)$. Звісно, якщо $\eta \in \mathrm{RO}$ і $s \in \mathbb{R}$, то $\eta\varrho^s \in \mathrm{RO}$ та $\sigma_0(\eta\varrho^s) = \sigma_0(\eta) + s$ і $\sigma_1(\eta\varrho^s) = \sigma_1(\eta) + s$.

Пов'яжемо із задачею (1), (2) гільбертові простори

$$\mathcal{D}^{\eta}(\Omega, \Gamma) := H^{\eta}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{\eta\varrho^{r_k - 1/2}}(\Gamma),$$

та

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) := H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma),$$

де $\eta \in \mathrm{RO}$. У соболєвському випадку, коли $\eta(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, ці простори позначаємо через $\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{(s-2q)}(\Omega,\Gamma)$ відповідно.

Окрім того, із досліджуваною задачею і формально спряженою до неї задачею пов'яжемо лінійні простори N і N^+ нескінченно гладких розв'язків цих задач у випадку нульових правих частин. А саме: N складається з усіх розв'язків

$$(u, v_1, ..., v_\varkappa) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$$

задачі (1), (2) у випадку, коли $f = 0$ на Ω і $g_j = 0$ на Γ для кожного $j \in \{1, \ldots, q + \varkappa\}$. Аналогічно, N^+ складається з усіх розв'язків

$$(w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

задачі (4), (5), (6) у випадку, коли $\omega = 0$ на Ω і $\chi_j = 0$ на Γ для кожного $j \in \{1, \ldots, 2q + \varkappa\}$. Оскільки ці задачі еліптичні в області Ω, простори N і N^+ скінченновимірні [7, лема 3.4.2].

Теорема 1. *Для довільного функціонального параметра $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$, відображення* (3) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda : \mathcal{D}^\eta(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma). \tag{12}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро збігається з N, а область значень $\Lambda(\mathcal{D}^\eta(\Omega,\Gamma))$ складається з усіх векторів

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \tag{13}$$

таких, що

$$(f, w)_\Omega + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \ \text{ для всіх } \ (w, h_1, ..., h_{q+\varkappa}) \in N^+. \tag{14}$$

Індекс оператора (12) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *і не залежить від* η.

У формулі (14) і далі через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначено скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$, а також продовження цих добутків за неперервністю.

Тут доречно нагадати, що лінійний обмежений оператор $T: E_1 \to E_2$, який діє у парі банахових просторів E_1 і E_2, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2 (див., наприклад, [36, Лемма 19.1.1]). Число

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(E_2/T(E_1))$$

називають індексом фредгольмового оператора T.

В окремому випадку, коли $N = \{0\}$ і $N^{+} = \{0\}$, оператор (12) встановлює ізоморфізм між просторами $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор задає ізоморфізм між деякими їх (замкненими) підпросторами, які мають скінченну ковимірність. У цьому зв'язку корисно розглянути такі розклади цих просторів у прямі суми підпросторів:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) = N \dotplus \bigl\{(u,v_1,\ldots,v_{\varkappa}) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma):\\ (u,\theta)_{\Omega} + \sum_{k=1}^{\varkappa}(v_k,\theta_k)_{\Gamma} = 0 \ \text{ для всіх } \ (\theta,\theta_1,\ldots,\theta_{\varkappa}) \in N\bigr\}\end{gathered} \tag{15}$$

та

$$\begin{gathered}\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) = N^{+} \dotplus\\ \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma): \text{ виконується } (14)\bigr\}.\end{gathered} \tag{16}$$

Тут, як і у теоремі 1, параметр $\eta \in \mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Ці розклади існують, оскільки у їх правих частинах підпростори мають перетин $\{0\}$ і скінченна вимірність першого підпростору дорівнює ковимірності другого.

Позначимо через P і P^{+} відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок у сумах (15) і (16) паралельно першому доданку. Відображення P і P^{+} не залежать від η.

Теорема 2. *Для будь-якого параметра* $\eta \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ *звуження відображення* (12) *на підпростір* $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ *є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\ P\bigl(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\bigr) \leftrightarrow P^{+}\bigl(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\bigr). \tag{17}$$

Розглянемо питання про регулярність узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1), (2). Спочатку дамо означення такого розв'язку. Покладемо

$$\mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma) := \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathrm{RO}:\\ \sigma_0(\alpha)>2q-1/2}} H^{\alpha}(\Omega) = \bigcup_{s>2q-1/2} H^{(s)}(\Omega)$$

(остання рівність виконується з огляду на властивість (9)). Вектор

$$(u,v) := (u, v_1, \ldots, v_{\varkappa}) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$$

називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2) з правою частиною

$$(f,g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \bigl(\mathcal{D}'(\Gamma)\bigr)^{q+\varkappa},$$

якщо $\Lambda(u,v) = (f,g)$, де Λ є оператор (12) для деякого $\eta \in \mathrm{RO}$ із $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Звісно, це означення коректне, тобто не залежить від η. Тут і далі $\mathcal{D}'(\Omega)$ і $\mathcal{D}'(\Gamma)$ є лінійні топологічні простори усіх розподілів на Ω і Γ відповідно.

Нехай V є довільна відкрита множина у просторі $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$. Покладемо $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Позначимо через $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{\alpha}(\Omega)$

для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно, позначимо через $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^\alpha(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. Покладемо

$$\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) := H^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0),$$

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) := H^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{j=1}^{q+\varkappa} H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0),$$

де $\eta \in \mathrm{RO}$.

Теорема 3. *Нехай вектор* $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1), (2)*, права частина якої задовольняє умову* $(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ *для деякого* $\eta \in \mathrm{RO}$ *із* $\sigma_0(\eta) > 2q-1/2$*. Тоді* $(u,v) \in \mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$*.*

Відмітимо такі окремі випадки цієї теореми.

Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$, то, звісно, $\mathcal{D}^{\eta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) = \mathcal{D}^{\eta}(\Omega)$ і $\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) = \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega)$. У цьому випадку теорема 3 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку (u,v) підвищується глобально, тобто в усій області Ω аж до її межі Γ.

Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \varnothing$, то за теоремою 3 регулярність компоненти u цього розв'язку підвищується в околах усіх внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Для соболєвської шкали, коли $\eta(t) \equiv t^s$, теореми 1–3 доведено В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю і Й. Россманом [7, пп. 3.2, 3.4] для цілих $s \geq 2q$ та І. Я. Ройтберг [8, 9] для дійсних $s > 2q-1/2$ і загальних еліптичних систем (див. також [10, п. 2.4]). Для уточненої соболєвської шкали, коли $\eta(t)$ є правильно змінною функцією на нескінченності порядку s, ці теореми доведено в [29] у випадку $s > 2q$ і в [30] у випадку $2q-1/2 < s \leq 2q$.

5. Інтерполяція з функціональним параметром

Розширена соболєвська шкала має важливу інтерполяційну властивість, на яку буде спиратися наше доведення ключової теореми 1. А саме: кожний простір $H^{\alpha}(G)$, де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$ і $\alpha \in \mathrm{RO}$, є результатом інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари соболєвських просторів $H^{(s_0)}(G)$ і $H^{(s_1)}(G)$, якщо $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha) < s_1$. Більше того, ця шкала замкнена відносно методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів.

Тому нагадаємо означення цього методу та його основні властивості. Він уперше з'явився в роботі К. Фояша і Ж.-Л. Ліонса [37, с. 278]. У його викладі будемо слідувати монографії [24, п. 1.1]. Для наших цілей достатньо обмежитися сепарабельними гільбертовими просторами.

Нехай задана упорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо припустимою. Існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1, який є ізометричним ізоморфізмом $J : X_1 \leftrightarrow X_0$. Оператор J визначається за парою X однозначно; він називається породжуючим для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які обмежені на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, і відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$, де $r > 0$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектральної теореми, у гільбертовому просторі X_0 означений (взагалі, необмежений) оператор $\psi(J)$ як борелева функція від самоспряженого оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_{\psi}$ або, коротше, через X_{ψ} область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів та для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така властивість. Якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо казати, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто еквівалентна там деякій угнутій додатній функції. Цей фундаментальний результат випливає з теореми Ж. Петре [38, 39] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного степеня (див. також монографію [40, п. 5.4]). Доведення цього результату наведено, наприклад, в монографії [24, п. 1.1.9].

Вказана на початку цього пункту інтерполяційна властивість розширеної соболєвської формулюється так.

Твердження 1. *Нехай задані функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha\big(t^{1/(s_1-s_0)}\big) & \text{при} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \text{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і виконується така рівність гільбертових просторів з еквівалентністю норм у них:

$$\big[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)\big]_\psi = H^\alpha(G),$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. *Якщо* $G = \mathbb{R}^n$, *то буде навіть рівність норм у цих просторах.*

Цей результат встановлено В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем в [24, теореми 2.19 і 2.22] для $G \in \{\mathbb{R}^n, \Gamma\}$ і в [19, теорема 5.1] для $G = \Omega$. Там же показано, що розширена соболєвська шкала замкнена відносно розглянутого методу інтерполяції і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)]$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ і $s_0 < s_1$. (Останній факт випливає з теореми В. І. Овчинникова [11, с. 511] про опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для заданої пари гільбертових просторів.) У цьому зв'язку нагадаємо, що властивість гільбертового простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ означає виконання таких двох умов: а) наявні неперервні вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$, б) якщо лінійний обмежений оператор $T : X_0 \to X_0$ такий, що його звуження на простір X_1 є обмеженим оператором $T : X_1 \to X_1$, то і звуження оператора T на простір H є обмеженим оператором $T : H \to H$.

Наприкінці цього пункту наведемо дві загальні властивості інтерполяції, які будуть використані в доведеннях. Перша з них показує, що при інтерполяції просторів успадковується не лише обмеженість, але й нетеровість лінійних операторів при деяких додаткових умовах [24, п. 1.1.7].

Твердження 2. *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *є припустимі пари гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задане лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j, *де* $j = 0, 1$, *є обмеженими і нетеровими операторами* $T : X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень дорівнює* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Друга властивість зводить інтерполяцію ортогональних сум гільбертових просторів до інтерполяції її доданків [24, п. 1.1.5].

Твердження 3. *Нехай задане скінченне число припустимих пар* $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ *гільбертових просторів, де* $k = 1, \dots, p$. *Тоді для довільного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *виконується рівність гільбертових просторів*

$$\Big[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Big]_{\psi} = \bigoplus_{k=1}^{p} \big[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\big]_{\psi}$$

разом із рівністю норм у них.

6. Доведення основних результатів

Дамо послідовно доведення теорем 1, 2 і 3, сформульованих у п. 4.

Доведення теореми 1. У випадку просторів Соболєва, тобто коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s > 2q - 1/2$, ця теорема доведена в монографії [7, теорема 3.4.1] для цілих s і в статтях [8, 9] та у книзі [10, теорема 2.4.1] для дійсних $s > 2q - 1/2$ і загальних еліптичних систем. Виведемо теорему 1 із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Нехай параметр $\eta \in \mathrm{RO}$ задовольняє умову $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$. Виберемо дійсні числа l_0 і l_1 такі, що $2q - 1/2 < l_0 < \sigma_0(\eta)$ і $\sigma_1(\eta) < l_1$. Відображення (3) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\Lambda : \mathcal{D}^{(l_i)}(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{E}^{(l_i - 2q)}(\Omega, \Gamma) \quad \text{для кожного} \quad i \in \{0, 1\}, \qquad (19)$$

які діють у парах просторів Соболєва. Оператори (19) мають спільне ядро N та однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim N^{+}$. Окрім того,

$$\Lambda\big(\mathcal{D}^{(l_i)}(\Omega, \Gamma)\big) = \big\{(f, g) \in \mathcal{E}^{(l_i - 2q)}(\Omega, \Gamma) : \text{правильно (14)}\big\}. \qquad (20)$$

Означимо функцію ψ за формулою (18), в якій беремо $\eta := \alpha$ та $s_0 := l_0$ і $s_1 := l_1$. Згідно з твердженням 1 функція ψ є інтерполяційним параметром. Тому на підставі твердження 2 з обмеженості і нетеровості обох операторів (19) випливає обмеженість і нетеровість оператора

$$\begin{aligned}\Lambda:\ &\big[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}\to\\ &\to\big[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}.\end{aligned}\tag{21}$$

Він є звуженням оператора (19) з $i=0$. Покажемо, що (21) є оператор (12) із формулювання теореми 1.

Для цього опишемо інтерполяційні простори, у яких діє оператор (21). Згідно з твердженням 3 маємо:

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}&=\big[H^{(l_0)}(\Omega),H^{(l_1)}(\Omega)\big]_{\psi}\oplus\\ &\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}\big[H^{(l_0+r_k-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1+r_k-1/2)}(\Gamma)\big]_{\psi}\end{aligned}\tag{22}$$

та

$$\begin{aligned}&\big[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi}=\\ &=\big[H^{(l_0-2q)}(\Omega),H^{(l_1-2q)}(\Omega)\big]_{\psi}\oplus\\ &\oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}\big[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\big]_{\psi}.\end{aligned}\tag{23}$$

Тут на підставі твердження 1 виконуються такі рівності просторів разом еквівалентністю норм у них:

$$\big[H^{(l_0)}(\Omega),H^{(l_1)}(\Omega)\big]_{\psi}=H^{\eta}(\Omega),\tag{24}$$

$$\big[H^{(l_0+r_k-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1+r_k-1/2)}(\Gamma)\big]_{\psi}=H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma)\tag{25}$$

та

$$\big[H^{(l_0-2q)}(\Omega),H^{(l_1-2q)}(\Omega)\big]_{\psi}=H^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega),\tag{26}$$

$$\big[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\big]_{\psi}=H^{\eta\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma).\tag{27}$$

Щодо останніх трьох формул зауважимо таке. Рівність (25) отримали, поклавши

$$\alpha := \eta\varrho^{r_k-1/2}, \quad s_0 := l_0 + r_k - 1/2, \quad s_1 := l_1 + r_k - 1/2$$

у твердженні 1. Аналогічно, рівності (26) та (27) отримали, поклавши у цьому твердженні

$$\alpha := \eta\varrho^{-2q}, \quad s_0 := l_0 - 2q, \quad s_1 := l_1 - 2q$$

та

$$\alpha := \eta\varrho^{-m_j-1/2}, \quad s_0 := l_0 - m_j - 1/2, \quad s_1 := l_1 - m_j - 1/2$$

відповідно. При цьому в усіх випадках функція ψ задовольняє (18).

На підставі формул (22), (24) і (25) маємо рівність

$$\bigl[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} = \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma). \tag{28}$$

Окрім того, на підставі формул (23), (26) і (27) маємо ще одну рівність

$$\bigl[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} = \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma). \tag{29}$$

Ці рівності просторів виконуються разом з еквівалентністю норм.

З останніх двох рівностей негайно випливає, що обмежений і нетерів оператор (21) діє у парі просторів (12). Оскільки, до того ж, цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (3), то він є оператором (12). Згідно з твердженням 2 ядро цього оператора та його індекс збігаються з спільним ядром N та однаковим індексом $\dim N - \dim N^{+}$ операторів (19). Окрім того, на підставі цього ж твердження і формули (20) маємо:

$$\begin{aligned}\Lambda\bigl(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\bigr) &= \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\bigl(\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma)\bigr) = \\ &= \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується } (14)\bigr\}.\end{aligned}$$

Тут також скористалися вкладенням

$$\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{E}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma),$$

що є наслідком властивості (9). Таким чином, обгрунтовано усі властивості оператора (12), вказані у теоремі 1.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. За теоремою 1 звуження оператора (12) на підпростір $P(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma))$ є неперервним і взаємно однозначним лінійним відображенням цього підпростору на підпростір $P^{+}(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma))$. Тому згідно з теоремою Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом (17). Теорема 2 доведена.

Доведення теореми 3. За умовою, $(u,v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega,\Gamma)$. Тому $(u,v) \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ для деякого числа s такого, що $2q-1/2 < s < \sigma_0(\eta)$. Відмітимо, що $\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$ з огляду на властивість (9).

Спочатку встановимо цю теорему у випадку глобальної регулярності, тобто коли $\Omega_0=\Omega$ і $\Gamma_0=\Gamma$. Тоді, за умовою,

$$(f,g) = \Lambda(u,v) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma).$$

Звідси на підставі теореми 1 запишемо

$$(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda\bigl(\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)\bigr) = \Lambda\bigl(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\bigr).$$

Отже, поряд з умовою $\Lambda(u,v) = (f,g)$ виконується рівність $\Lambda(u',v') = (f,g)$ для деякого вектора $(u',v') \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$. Тоді

$$(u^{\circ},v^{\circ}) := (u,v) - (u',v') \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma) \quad \text{і} \quad \Lambda(u^{\circ},v^{\circ}) = 0,$$

що за теоремою 1 (розглянутою у соболєвському випадку) тягне за собою включення

$$(u^{\circ},v^{\circ}) \in N \subset C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times \bigl(C^{\infty}(\Gamma)\bigr)^{\varkappa}.$$

Звідси
$$(u,v)=(u',v')+(u^{\circ},v^{\circ})\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma).$$
Тим самим теорема 3 доведена у розглянутому випадку.

Звідси виведемо її у загальній ситуації. Позначимо
$$\Upsilon:=\bigl\{\chi\in C^{\infty}(\overline{\Omega}):\,\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0\bigr\}.$$
Попередньо доведемо, що за умови теореми 3 є правильною для кожного $i\in\mathbb{N}$ імплікація
$$\begin{gathered}\bigl(\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)+\mathcal{D}^{(s+i-1)}(\Omega,\Gamma)\ \text{ для всіх }\ \chi\in\Upsilon\bigr)\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\ \bigl(\chi(u,v)\in\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)+\mathcal{D}^{(s+i)}(\Omega)\ \text{ для всіх }\ \chi\in\Upsilon\bigr).\end{gathered}\tag{30}$$
Тут і далі у доведенні використовуємо алгебраїчні суми просторів. Звісно, добуток функції $\chi\in\Upsilon$ на вектор вигляду (u,v) розуміємо по-компонентно, до того ж $\chi h:=(\chi\restriction\Gamma)h$ для $h\in\mathcal{D}'(\Gamma)$.

Виберемо довільне $i\in\mathbb{N}$ і припустимо, що посилка імплікації (30) істинна. Розглянемо будь-яку функцію $\chi\in\Upsilon$ та функцію $\theta\in\Upsilon$ таку, що $\theta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. За умовою, $\chi(f,g)\in\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$, де $(f,g)=\Lambda(u,v)$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з усіма диференціальними операторами A, B_j і $C_{j,k}$, отримаємо такі рівності:
$$A(\chi u)=A(\chi\theta u)=\chi A(\theta u)+A'(\theta u)=\chi Au+A'(\theta u),\tag{31}$$
$$B_j(\chi u)=B_j(\chi\theta u)=\chi B_j(\theta u)+B_j'(\theta u)=\chi B_ju+B_j'(\theta u),\tag{32}$$
$$\begin{gathered}C_{j,k}(\chi v_k)=C_{j,k}(\chi\theta v_k)=\chi C_{j,k}(\theta v_k)+C'_{j,k}(\theta v_k)=\\ =\chi C_{j,k}v_k+C'_{j,k}(\theta v_k).\end{gathered}\tag{33}$$
Тут A' — деякий лінійний диференціальний вираз на $\overline{\Omega}$, B_j' — деякий крайовий диференціальний вираз на Γ, а $C'_{j,k}$ — деякий дотичний диференціальний вираз на Γ. Коефіцієнти цих виразів є нескінченно гладкими функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно, а порядки задовольняють умови
$$\operatorname{ord}A'\le 2q-1,\ \ \operatorname{ord}B_j'\le m_j-1,\ \ \operatorname{ord}C'_{j,k}\le m_j+r_k-1.\tag{34}$$

Покладемо

$$\Lambda'(u,v) := \left(A'u,\ B'_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{1,k} v_k, ..., B'_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{q+\varkappa,k} v_k\right).$$

З рівностей (31) – (33) випливає, що

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \chi\Lambda(u,v) + \Lambda'(\theta(u,v)) = \chi(f,g) + \Lambda'(\theta(u,v)). \quad (35)$$

За посилкою імплікації (30) запишемо

$$\theta(u,v) = (u_1,v_1) + (u_2,v_2)$$

для деяких векторів

$$(u_1,v_1) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) \quad \text{і} \quad (u_2,v_2) \in \mathcal{D}^{(s+i-1)}(\Omega,\Gamma).$$

Звідси на підставі рівності (35) можемо записати

$$\Lambda(\chi(u,v)) = (f_1,g_1) + (f_2,g_2), \quad (36)$$

де

$$(f_1,g_1) := \chi(f,g) + \Lambda'(u_1,v_1) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma), \quad (37)$$

$$(f_2,g_2) := \Lambda'(u_2,v_2) \in \mathcal{E}^{(s+i-2q)}(\Omega,\Gamma). \quad (38)$$

Пояснимо останні два включення. На підставі нерівностей (34) відображення

$$(u,v) \mapsto \Lambda'(u,v), \quad \text{де} \quad (u,v) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa},$$

продовжується за неперервністю до обмеженого оператора

$$\Lambda' : \mathcal{D}^{(l)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{(l+1-2q)}(\Omega,\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad l > 2q - 1/2.$$

Звідси при $l := s + i - 1$ та з включення $(u_2,v_2) \in \mathcal{D}^{(s+i-1)}(\Omega,\Gamma)$ випливає включення (38).

Далі, з обмеженості операторів

$$\Lambda' : \mathcal{D}^{(l_p)}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{(l_p+1-2q)}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{E}^{(l_p-2q)}(\Omega,\Gamma), \quad p=0,\,1,$$

випливає на підставі інтерполяційних формул (28) і (29) обмеженість оператора

$$\begin{aligned}\Lambda' : \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma) = \bigl[\mathcal{D}^{(l_0)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{(l_1)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} \to \\ \to \bigl[\mathcal{E}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} = \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma).\end{aligned} \tag{39}$$

Тут числа l_0 і l_1 та інтерполяційний параметр ψ такі, як у доведенні теореми 1. Тепер включення (37) є наслідком (39) та включень $\chi(f,g) \in \mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ і $(u_1,v_1) \in \mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)$.

Скористаємося проектором P^{+} і теоремою 2 (у соболєвському випадку також). З рівності (36) та включень (37) і (38) випливає, що

$$\begin{aligned}\Lambda(\chi(u,v)) = P^{+}\Lambda(\chi(u,v)) = \\ = P^{+}(f_1,g_1) + P^{+}(f_2,g_2) = \Lambda(u_1,v_1) + \Lambda(u_2,v_2).\end{aligned}$$

Тут вектори

$$(u_1,v_1) \in P\bigl(\mathcal{D}^{\eta}(\Omega,\Gamma)\bigr) \quad \text{і} \quad (u_2,v_2) \in P\bigl(\mathcal{D}^{(s+i)}(\Omega,\Gamma)\bigr) \tag{40}$$

є розв'язки (єдині) задач

$$\Lambda(u_1,v_1) = P^{+}(f_1,g_1) \in P^{+}\bigl(\mathcal{E}^{\eta\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\bigr)$$

і

$$\Lambda(u_2,v_2) = P^{+}(f_2,g_2) \in P^{+}\bigl(\mathcal{E}^{(s+i-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr).$$

Тепер з рівності

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \Lambda((u_1,v_1) + (u_2,v_2)),$$

де вектори $\chi(u,v)$ і $(u_1,v_1)+(u_2,v_2)$ належать до $\mathcal{D}^{(s)}(\Omega,\Gamma)$, випливає на підставі теореми 1, що

$$\chi(u,v) = (u_1,v_1) + ((u_2,v_2) + (u^{\circ},v^{\circ}))$$

для деякого вектора

$$(u^\circ, v^\circ) \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa.$$

Ця формула з урахуванням включень (40) та довільності функції $\chi \in \Upsilon$ означає істинність висновку імплікації (30).

Таким чином, доведено, що ця імплікація істинна для кожного $i \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що $(u, v) \in \mathcal{D}^{(s)}(\Omega, \Gamma)$; тому посилка імплікації (30) істинна при $i = 1$. Виберемо число $p \in \mathbb{N}$ таке, що $p > \sigma_1(\eta)$; тоді $\mathcal{D}^{(p)}(\Omega, \Gamma) \subset \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma)$ з огляду на властивість (9). Скориставшись імплікацією (30) послідовно для значень $i = 1, 2, \ldots, p$, робимо висновок, що

$$\chi(u, v) \in \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma) + \mathcal{D}^{(p)}(\Omega, \Gamma) = \mathcal{D}^\eta(\Omega, \Gamma)$$

для довільного $\chi \in \Upsilon$. Отже, $(u, v) \in \mathcal{D}^\eta_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Теорема 3 доведена.

7. Застосування

Як застосування розширеної соболєвської шкали отримаємо достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) компонент розв'язку (u, v) еліптичної крайової задачі (1), (2). Ці умови ми виведемо з теореми 3 і такої версії (див. [24, с. 134] і [41, с. 1486]) теореми вкладення Хермандера [12, с. 59].

Твердження 4. *Нехай функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ і ціле число $l \geq 0$. Тоді*

$$\int\limits_1^\infty t^{2l+n-1}\alpha^{-2}(t)\,dt < \infty \;\;\Leftrightarrow\;\; H^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega}),$$

$$\int\limits_1^\infty t^{2l+n-2}\alpha^{-2}(t)\,dt < \infty \;\;\Leftrightarrow\;\; H^\alpha(\Gamma) \hookrightarrow C^l(\Gamma).$$

Ці вкладення неперервні.

Зауважимо, що у соболєвському випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, твердження 4 стає теоремою вкладення Соболєва:

$$s > l + n/2 \;\; \Leftrightarrow \;\; H^{(s)}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\overline{\Omega}),$$
$$s > l + (n-1)/2 \;\; \Leftrightarrow \;\; H^{(s)}(\Gamma) \hookrightarrow C^l(\Gamma).$$

Нехай множини Ω_0 і Γ_0 є такі, як у п. 4.

Теорема 4. *Нехай задано ціле число $l \geq 0$. Припустимо, що виконуються умови теореми 3 для деякого параметра $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ і*

$$\int_1^\infty t^{2l+n-1} \eta^{-2}(t) dt < \infty \tag{41}$$

Тоді $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. На підставі теореми 3, умови (41) і твердження 4 маємо включення

$$\chi u \in H^\eta(\Omega) \subset C^l(\overline{\Omega}).$$

Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає, що $u \in C^l(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. Теорема 4 доведена.

Теорема 5. *Нехай задано цілі числа $l \geq 0$ і $k \in \{1, ..., \varkappa\}$. Припустимо, що виконуються умови теореми 3 для деякого параметра $\eta \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\eta) > 2q - 1/2$ і*

$$\int_1^\infty t^{2(l-r_k)+n-1} \eta^{-2}(t) dt < \infty. \tag{42}$$

Тоді $v_k \in C^l(\Gamma_0)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^{\infty}(\Gamma)$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$ і $\chi = 1$ в деякому околі точки x. На підставі теореми 3, умови (42) і твердження 4, у якому беремо $\alpha(t) \equiv \eta(t)t^{r_k-1/2}$, маємо включення

$$\chi v_k \in H^{\eta\varrho^{r_k-1/2}}(\Gamma) \subset C^l(\Gamma).$$

Звідси, з урахуванням довільності вибору x та χ випливає, що $v_k \in C^l(\Gamma_0)$. Теорема 5 доведена.

З твердження 4 випливає, що умови (41) і (42) не лише достатні у теоремах 4 і 5 відповідно, але і необхідні на класі усіх розв'язків, що розглядаються у цих теоремах.

За допомогою теорем 4 і 5 встановимо тепер достатню умову, за якою узагальнений розв'язок (u, v) еліптичної крайової задачі (1), (2) є класичним, тобто $u \in C^{2q}(\Omega)\bigcap C^m(\overline{\Omega})$ і $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$. Тут позначено $m := \max\{m_1, ..., m_{q+\varkappa}\}$. Якщо розв'язок (u, v) є класичним, то ліві частини задачі (1), (2) обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями на Ω і Γ відповідно.

Теорема 6. *Нехай вектор* $(u, v) \in \mathcal{D}^{2q-1/2+}(\Omega, \Gamma)$ *є узагальненим розв'зком еліптичної крайової задачі* (1), (2), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{\eta_1\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{\eta_2\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma), \tag{43}$$

$$g_j \in H^{\eta_2\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma), \quad j = 1, ..., q + \varkappa, \tag{44}$$

для деяких параметрів $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{RO}$ *таких, що* $\sigma_0(\eta_1) > 2q - 1/2$, $\sigma_0(\eta_2) > 2q - 1/2$ *і*

$$\int_1^{\infty} t^{2q+n-1}\eta_1^{-2}(t)dt < \infty, \quad \int_1^{\infty} t^{2m+n-1}\eta_2^{-2}(t)dt < \infty.$$

Тоді розв'язок (u, v) *класичний.*

Доведення. З теореми 4 при $l := 2q$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$ випливає, що $u \in C^{2q}(\Omega)$, а при $l := m$, $\Omega_0 := \Omega$, і $\Gamma_0 := \Gamma$ випливає, що $u \in C^{m}(\overline{\Omega})$. З теореми 5 при $l := m + r_k$ і $\Gamma_0 := \Gamma$ випливає включення $v_k \in C^{m+r_k}(\Gamma)$ для кожного $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$. Отже, (u, v) — класичний розв'язок крайової задачі (1), (2). Теорема доведена.

8. Висновки

У статті досліджено еліптичну крайову задачу за Б. Лавруком у гільбертових просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу. Доведено, що цій задачі відповідають нетерові обмежені оператори, які діють у відповідних парах просторів Хермандера (теорема 1) та породжують ізоморфізми між їх підпросторами скінченної ковимірності (теорема 2). Досліджено локальну регулярність узагальнених розв'язків задачі на розширеній соболєвській шкалі (теорема 3). Для них встановлено нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку (теореми 4 і 5) та умову класичності узагальненого розв'язку (теорема 6). Ці умови сформульовані у термінах приналежності правих частин задачі до просторів Хермандера.

Авторка дякує О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, No 5. – P. 257–267.

[2] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, No 5. – P. 269–278.

[3] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. III. Сопряженная граничная задача для полупространства // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1965. – **13**, No 2. – P. 105–110.

[4] *Aslanyan A. G., Vassiliev D. G., Lidskii V. B.* Frequences of free oscillations of thin shell interacting with fluid // Functional Anal. Appl. – 1981. – **15**, No 3. – P. 157–164.

[5] *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis. – Paris: Mayson, 1990. – viii+218 p.

[6] *Nazarov S., Pileckas K.* On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations // J. Reine Angew. Math. – 1993. – **438**. – P. 103–141.

[7] *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.

[8] *Ройтберг И. Я.* Эллиптические граничные задачи для общих систем уравнений в полных шкалах банаховых пространств // Доклады Академии Наук. – 1997. – **354**, № 1. – С. 25–29.

[9] *Roitberg I. Ya.* Elliptic boundary value problems for general elliptic systems in complete scales of Banach spaces // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 1998. – **102**. – P. 231–241.

[10] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. – x+276 p.

[11] *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – No. 2. – P. 349–515.

[12] *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.

[13] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – Москва: Мир, 1986. – 456 с.

[14] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

[15] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.

[16] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – **5**, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 205–226.

[17] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 13–19.

[18] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 3. – С. 368–380.

[19] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, No 1. – P. 135–152.

[20] Михайлец В. А., Мурач А. А. Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5 – С. 689–696.

[21] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.

[22] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 5. – С. 679–701.

[23] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497–520.

[24] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[25] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.

[26] *Аноп А. В.* Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі // Доп. НАН України. – 2014. – № 4. – С. 7–14.

[27] *Аноп А. В., Мурач А. А.* Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 867–883.

[28] *Anop A. V., Murach A. A.* Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. — **20**, No 2. – P. 103–116.

[29] *Чепурухіна І. С.* Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості // Диференціальні рівняння і суміжні питання / Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – **11**, № 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. – С. 284–304.

[30] *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scale of spaces. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2015. – **21**, No 1. – P. 6–21.

[31] *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 672–691.

[32] *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. – 1936. – **254**. – P. 167—186.

[33] *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 271–279.

[34] *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj). – 1930. – **3**. – P. 33–48.

[35] *Волевич Л.Р., Панеях Б.П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[36] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1987. – 696 с.

[37] *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Scient. Math. Szeged. – 1961. – **22**, No 3–4. – P. 269–282.

[38] *Peetre J.* On interpolation functions // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1966. – **27**. – P. 167–171.

[39] *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, No. 1–2. – P. 91–92.

[40] *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.

[41] *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477–1491.