Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 327–337

УДК 517.927

В. О. Солдатов

(Інститут математики НАН України, Київ)

Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків

soldatovvo@ukr.net

We establish new sufficient conditions for continuous dependence on the parameter of solutions of multipoint linear boundary-value problems for systems of differential equations of order $r \geq 1$ in the norms of spaces of continuously differentiable functions $C^{(n+r)}$.

Знайдено нові достатні умови неперервної залежності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ за нормами просторів неперервно диференційовних функцій $C^{(n+r)}$.

1. Вступ

Питання граничного переходу в системах диференціальних рівнянь виникають в багатьох задачах аналізу і досліджувалися різними математиками. Найкраще їх досліджено стосовно задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних лінійних крайових задач вивчався І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовниками. Суттєві узагальнення цих результатів отримано у роботах

Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [4 – 6]. Вони стосуються рівномірної неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ці питання досліджено В. А. Михайлецем і Г. О. Чехановою [7].

Ці результати були узагальнені на досить широкий клас лінійних крайових задач — тотальних щодо просторів Соболєва [8 – 10] та просторів неперервно диференційовних функцій [11 – 14]. Доведено фредгольмовість таких задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.

В роботах В. А. Михайлеця та його учнів ці результати перенесено на важливий клас багатоточкових крайових задач щодо соболєвських просторів та просторів $C^{(n)}[a, b]$ для рівнянь і систем як першого [15 – 17], так і високих порядків [13, 18, 19]. В цих роботах припускається, що кожна точка (в якій розглядаються крайові умови) або не залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ [15, 17 – 19], або має граничне значення при $\varepsilon \to 0+$ [13, 16]. Окрім того, допускається існування додаткових точок, що входять у крайовий вираз, нехтуваний при $\varepsilon \to 0+$.

У цій роботі досліджується багатоточкова лінійна крайова задача на відрізку $[a, b]$ дійсної осі для системи диференціальних рівнянь довільного порядку $r \geq 1$ у нормованих просторах $C^{(n+r)}[a, b]$, де ціле $n \geq 0$. Мета роботи — встановити умови, причому більш слабкі, ніж в [13, 18], достатні для неперервності за малим параметром $\varepsilon \geq 0$ розв'язків досліджуваної задачі. Це досягається завдяки тому, що умови на коефіцієнти при похідних шуканої функції у крайових операторах ставляться окремо для цілої серії точок, які залежать від $\varepsilon > 0$ і мають спільну граничну точку при $\varepsilon \to 0+$. Відмітимо, що у зазначених роботах багатоточкові задачі досліджені або для одного рівняння довільного порядку [18], або для систем рівнянь першого порядку [13].

2. Постановка задачі

Нехай задано скінченний відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Для довільних цілих чисел $l \geq 0$ і $m \geq 1$ позначимо $C^{(l)} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C})$, $(C^{(l)})^m := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C}^m)$ і $(C^{(l)})^{m\times m} := C^{(l)}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$. Таким чином, $C^{(l)}$ є банахів простір усіх l разів неперервно диференційовних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою

$$\|x\|_{(l)} := \sum_{j=0}^{l} \max\bigl\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a,b]\bigr\}.$$

Аналогічно, $(C^{(l)})^m$ і $(C^{(l)})^{m\times m}$ є банахові простори усіх l разів неперервно диференційовних вектор-функцій $z : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ і квадратних матриць-функцій $Z : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$. Норми у цих просторах позначаємо також через $\|\cdot\|_{(l)}$ — вони є сумами норм у $C^{(l)}$ усіх компонент функції z або Z. З контексту завжди буде зрозуміло, про норму у якому саме просторі (скалярних функцій, вектор-функцій чи матриць-функцій) йде мова. Звісно, якщо $m = 1$, то усі ці простори збігаються.

Нехай задано цілі числа $r \geq 1$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ і $p \geq 1$. На відрізку $[a,b]$ розглядаємо систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку r, залежних від числового параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

Тут число $\varepsilon_0 > 0$ фіксоване, вектор-функція $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$ шукана, а усі матриці-функції $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^{m\times m}$ і вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ вважаються відомими. У роботі вектори і вектор-функції подано у вигляді стовпців.

Для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ пов'яжемо з системою (1) багатоточкову крайову умову

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{q_j}\sum_{l=0}^{n+r}\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = c(\varepsilon). \qquad (2)$$

Тут усі числа $q_j \in \mathbb{N}$, матриці $\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ у залежності від значень параметра j. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, а для точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

З огляду на це, у граничному випадку $\varepsilon = 0$ розглядається така крайова задача:

$$L(0)z(t,0) = f(\cdot,0), \quad a \le t \le b, \qquad (3)$$

$$B(0)z(\cdot,0) \equiv \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=0}^{n+r}\alpha_{j}^{(l)}(0)z^{(l)}(t_j(0),0) = c(0). \qquad (4)$$

Тут усі матриці $\alpha_j^{(l)}(0) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_j(0) \in [a,b]$ та вектор $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими.

Звісно, для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $z(\cdot,\varepsilon) \mapsto B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon)$ є обмеженим оператором

$$B(\varepsilon)\colon (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^{rm}. \qquad (5)$$

Зроблені нами припущення щодо системи (1) та обмеженість оператора (5) означають [14], що крайова задача (1), (2) є тотальною щодо простору $(C^{(n+r)})^m$ для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, як і задача (3), (4).

Зауважимо, що крайові умови (2), (4) охоплюють як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні шуканої функції, порядок яких більший ніж $r-1$.

3. Результат

Крайовій задачі (1), (2) при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ відповідає лінійний обмежений оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon))\colon (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{6}$$

У граничному випадку $\varepsilon = 0$ цей обмежений оператор відповідає крайовій задачі (3), (4) Оскільки вказані задачі є тотальними щодо простору $(C^{(n+r)})^m$, то, як показано в [14], оператор (6) є фредгольмовим (з індексом нуль) для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

Надалі вважаємо, що виконується

Припущення. *Гранична однорідна крайова задача*

$$L(0)z(t,0) = 0, \quad a \le t \le b, \qquad B(0)z(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмів оператор (6) є ізоморфізмом

$$(L(0), B(0))\colon (C^{(n+r)})^m \leftrightarrow (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^{rm}.$$

Тому крайова задача (3), (4) має один і тільки один роз'язок $z(\cdot,0) \in (C^{(n+r)})^m$ для довільно вибраних правих частин $f(\cdot,0) \in (C^{(n)})^m$ і $c(0) \in \mathbb{C}^{rm}$.

Сформулюємо теорему про неперервну залежність розв'язку крайової задачі (1), (2) за малим параметром $\varepsilon \ge 0$ у просторі $(C^{(n+r)})^m$.

Теорема. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови:*

(a) $\|K_l(\cdot,\varepsilon) - K_l(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$ *для кожного* $l \in \overline{0, r-1}$*;*

(b) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{(n)} \to 0$*;*

(c) $c(\varepsilon) \to c(0)$*;*

(d1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j(0)$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_j}$;

(d2) $\sum\limits_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \alpha_j^{(l)}(0)$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$, $l \in \overline{0,n+r}$;

(d3) $\alpha_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon) = O(1)$ *для усіх* $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_j}$;

(d4) $\|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$
для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_j}$, $l \in \overline{0,n+r-1}$;

(d5) $\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \to 0$, *для усіх* $k \in \overline{1,q_0}$, $l \in \overline{0,n+r}$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість*

$$\|z(\cdot,\varepsilon) - z(\cdot,0)\|_{(n+r)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{7}$$

В умові (d4) і надалі під нормою числової матриці (зокрема, вектора) розуміємо суму модулів усіх її елементів.

4. Доведення.

Оскільки задача (1), (2) є тотальною щодо простору $(C^{(n+r)})^m$, то, як показано автором в [14], вона має наступну граничну властивість.

Твердження. *Нехай при* $\varepsilon \to 0+$ *виконуються такі умови* (a), (b), (c) *теореми і умова:*

(d) $B(\varepsilon)z \to B(0)z$ *для довільного* $z \in (C^{(n+r)})^m$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість* (7)

Для доведення основної теореми достатньо показати, що умова (d) твердження є наслідком умов (d1) – (d5) теореми.

У припущенні, що умови (d1) – (d5) виконуються, доведемо властивість (d). Для довільної функції $z \in (C^{(n+r)})^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ запишемо:

$$\|B(\varepsilon)z - B(0)z\| =$$
$$= \left\| \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_j} \sum_{l=0}^{n+r} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \alpha_j^{(l)}(0) z^{(l)}(t_j(0)) \right\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{q_0} \sum_{l=0}^{n+r} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) z^{(l)}(t_j(0)) \right\| \tag{8}$$

Тут на підставі умови (d5) маємо:

$$\|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\| \leq \|\alpha_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z\|_{(n+r)} \to 0 \tag{9}$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Дослідимо останній доданок в (8). Запишемо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) z^{(l)}(t_j(0)) \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_j(0)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_j(0)) - \alpha_j^{(l)}(0) z^{(l)}(t_j(0)) \right\| \leq$$

$$\le \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \cdot \Big(z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j(0)) \Big) \right\| +$$
$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \right) \cdot z^{(l)}(t_j(0)) \right\| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{q_j} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j(0))\| +$$
$$+ \left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|z\|_{(n+r)}.$$

Тут на підставі умови (d2) маємо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \alpha_j^{(l)}(0) \right\| \cdot \|z\|_{(n+r)} \to 0. \tag{10}$$

Окрім того,

$$\sum_{k=1}^{q_j} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j(0))\,\| \to 0. \tag{11}$$

Справді, якщо $l = n+r$, то це є прямим наслідком умов (d1), (d3) і неперервності функції $z^{(l)}$. Якщо $l \le n+r-1$, то це випливає з теореми Лагранжа і умови (d4):

$$\sum_{k=1}^{q_j} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot \|z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - z^{(l)}(t_j(0))\,\| \le$$
$$\le \|z\|_{(n+r)} \sum_{k=1}^{q_j} \|\alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0.$$

Із формул (4.), (10), (11) негайно випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_j} \alpha_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \alpha_j^{(l)}(0) z^{(l)}(t_j(0)) \right\| \to 0 \tag{12}$$

Тепер властивість (d) є прямим наслідком формул (8), (9) і (12).

Теорему доведено.

Автор вдячний В. А. Михайлецю та О. О. Мурачу за керівництво роботою.

Література

[1] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ – 1987. – **30**. – С. 3–103.

[2] *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

[3] *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Диф. уравн. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198–209

[4] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227–239.

[5] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23–27.

[6] *Kodliuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77–90.

[7] *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sciences. – 2015. – **204**, № 3.

[8] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28–30.

[9] *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sciences. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589–599.

[10] *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 191–199.

[11] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 268–273.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[13] *Чеханова Г. О.* Граничний перехід в одновимірних лінійних крайових задачах з параметром: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: 2014. – 122 с.

[14] *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 5 — С. 692 –700.

[15] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: 2009. – 148 с.

[16] *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в класе многоточечных краевых задач //Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203–216.

[17] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[18] *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 260–279.

[19] *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач //Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 532–541.