Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 315–326

УДК 517.927.21

О. Б. Пелехата

(Національний технічний університет України "КПІ", Київ)

Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач

pelehataolia@yandex.ru

We investigate a family of parameter-dependent multipoint boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of order $r \geq 2$, with the coefficients and right sides belonging to the spaces $(C^{(n-1)})^{m\times m}$ and $(C^{(n-1)})^{m}$ respectively. We find new sufficient conditions under which Green's matrices of these problems are continuous with respect to the parameter.

Досліджена залежна від параметра сім'я багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, коефіцієнти та праві частини яких належать просторам $(C^{(n-1)})^{m\times m}$ та $(C^{(n-1)})^{m}$ відповідно. Знайдено нові достатні умови неперервності за параметром матриць Гріна таких задач.

1. Вступ

Багатоточкові крайові задачі є класичним об'єктом дослідження теорії лінійних звичайних диференціальних рівнянь [1-10]. Неперервність за параметром їхніх розв'язків у рівномірній нормі досліджувалась в роботах [8-11]. Одержані там результати носять завершений характер. У випадку, коли коефіцієнти диференціальних рівнянь, крайові оператори та праві частини залежать від параметра, матриці Гріна задачі також залежать від нього. Виникає питання неперервності за параметром матриць Гріна відповідних задач. У [9] знайдено умови рівномірної збіжності матриць Гріна для систем диференціальних рівнянь першого порядку, коли коефіцієнти та праві частини рівнянь сумовні на $[a, b]$. Випадок $r \geq 2$ досліджений в [11]. У [12] також встановлено умови неперервності функцій Гріна за параметром багатоточкових крайових задач для скалярних рівнянь порядку $r \geq 2$.

Мета цієї роботи — узагальнити та уточнити результати робіт [9, 12]. Ми будемо досліджувати неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geqslant 2$, коли коефіцієнти та праві частини є n разів неперервно диференційовними на відрізку $[a, b]$, і розглядатимемо збіжність за нормою відповідного простору. Умови, накладені нами на коефіцієнти дещо сильніші, ніж у [9],тому наш результат є уточненням теореми, отриманої В. А. Михайлецем та Н. В. Ревою. Разом з тим, він є узагальненням твердження, доведеного в [12] на випадок систем.

Робота складається з чотирьох розділів. У другому розділі сформульовано постановку задачі та основний результат роботи, у третьому – доведено твердження, сформульоване в п. 2. Заключний четвертий розділ містить висновки до роботи.

2. Постановка задачі та основний результат

Нехай числа $k, m, r, n \in \mathbb{N}, [a,b]-$ скінченний інтервал, $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ — його скінчення розбиття. Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'ю напіводнорідних багатоточкових крайових задач для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geqslant 2$:

$$y^{(r)}(t;\varepsilon) + A_{r-1}(t;\varepsilon)y^{(r-1)}(t;\varepsilon) + \ldots.. + A_0(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) = f(t;\varepsilon) \quad (1)$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\beta_{j,i}(l;\varepsilon)y^{(j-1)}(t_l;\varepsilon) = 0, \quad i \in \overline{1,k}. \quad (2)$$

де $m \times m$-матриці-функції $A_{j-1}(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$ і вектор-функції $f(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n-1)})^m$, матриці $\beta_{j,i}(l;\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\quad l \in \overline{1,k}$, $i,j \in \overline{1,r}$.

Розв'язком задачі (1) – (2) є функція $y(\cdot)$, що має абсолютно неперервну похідну порядку $n + r - 1$ і задовольняє диференціальне рівняння (1) майже скрізь та крайові умови (2).

Для коректності розглядуваної задачі будемо вважати надалі, що виконується

Припущення $\mathcal{I}$. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y^{(r)}(t;0) + A_{j-1}(t;0)y^{(r-1)}(t;0) + \ldots + A_0(t;0)y(t;0) = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\beta_{j,i}(l;0)y^{(j-1)}(t_l;0) = 0, \quad i \in \overline{1,k} \quad (4)$$

має лише тривіальний розв'язок.

Якщо виконане припущення $\mathcal{I}$, то розв'язок розглядуваної задачі допускає інтегральне представлення вигляду

$$y(t;\varepsilon) = \int_a^b G(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \quad (5)$$

де $G(t,s;\varepsilon)$ — матриця Гріна відповідної однорідної крайової задачі вигляду (1)-(2). Формула визначає матрицю Гріна неоднозначно, а тому необхідно серед усіх таких матриць виділити одну, яку будемо називати *нормованою*.

Для цього розглянемо поряд з багатоточковою крайовою задачею (1)-(2) відповідну багатоточкову крайову задачу першого порядку.

$$\widehat{y}'(t;\varepsilon) = \widehat{A}(t;\varepsilon)\widehat{y}(t;\varepsilon) + \widehat{f}(t;\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{B}_l(\varepsilon)\widehat{y}(t_l;\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

де квадратні блочні матриці-функції

$$\widehat{A}(\cdot;\varepsilon) = \begin{pmatrix} O_m & I_m & O_m & \ldots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \ldots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \ldots & I_m \\ -A_0(\cdot;\varepsilon) & -A_1(\cdot;\varepsilon) & -A_2(\cdot;\varepsilon) & \ldots & -A_{r-1}(\cdot;\varepsilon) \end{pmatrix} \in (C^{(n-1)})^{p\times p}, \tag{8}$$

$$\widehat{B}_l(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(l;\varepsilon) & \beta_{1,2}(l;\varepsilon) & \ldots & \beta_{1,r}(l;\varepsilon) \\ \beta_{2,1}(l;\varepsilon) & \beta_{2,2}(l;\varepsilon) & \ldots & \beta_{2,r}(l;\varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r,1}(l;\varepsilon) & \beta_{r,2}(l;\varepsilon) & \ldots & \beta_{r,r}(l;\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p\times p}, \tag{9}$$

вектор-функції

$$\widehat{f}(\cdot;\varepsilon) = (0,0,\ldots,0,f(\cdot;\varepsilon)) \in (C^{(n-1)})^{p} \tag{10}$$

та

$$\widehat{y}(t;\varepsilon) = (y(t;\varepsilon), y'(t;\varepsilon), \ldots, y^{(r-1)}(t;\varepsilon)). \tag{11}$$

Як буде доведено далі, при кожному фіксованому ε однорідна крайова задача (1)-(2) еквівалентна однорідній крайовій задачі вигляду (6)-(7) для системи $p = rm$ диференціальних рівнянь першого порядку.

Для цих систем нормовані матриці Гріна уже визначені. Кожна з них є блочною матричною функцією розмірності $r \times r$, елементи якої є також матрицями-функціями розмірності $m \times m$.

Щоб задача (6)-(7) мала зміст, надалі будемо вважати, що *однорідна гранична крайова задача*

$$\widehat{y}'(t;0) = \widehat{A}(t;0)\widehat{y}(t;0), \tag{12}$$

$$\sum_{l=1}^{k} \widehat{B}_l(0)\widehat{y}(t_l;0) = 0 \tag{13}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Розв'язок крайової задачі (6)-(7) можна представити у вигляді

$$\widehat{y}'(t;\varepsilon) = \int_a^b \widehat{G}(t,s,\varepsilon)\widehat{f}(s,\varepsilon)ds, t \in (a,b), \forall \widehat{f} \in C^{(n-1)} \tag{14}$$

де $G(t,s,\varepsilon)-$ матриця Гріна відповідної однорідної крайової задачі вигляду (1)-(2).

Матриця Гріна у формулі (14) визначається неоднозначно. Тому виділимо одну, яку назвемо *нормованою.*

Введемо

Означення. *Для задачі вигляду (6)-(7) нормованою матри-*

цею Гріна назвемо таку, яка представляється у вигляді

$$G(t,s;\varepsilon)=\begin{cases} -Y(t;\varepsilon)[B_1(\varepsilon)+\sum\limits_{l=2}^{k}B_l(\varepsilon)Y(t_l;\varepsilon)]^{-1}Z(s;\varepsilon)= \\ \qquad := S_\varepsilon(t,s)+X_\varepsilon(t,s), \quad t\leqslant s, \\ Y(t;\varepsilon)Y^{-1}(s;\varepsilon)- \\ \qquad -Y(t;\varepsilon)[B_1(\varepsilon)+\sum\limits_{l=2}^{k}B_l(\varepsilon)Y(t_l;\varepsilon)]^{-1}Z(s;\varepsilon)= \\ \qquad := S_\varepsilon(t,s), \quad s<t. \end{cases} \tag{15}$$

де

$$Z(S):=\sum_{l:t_l\leq s}B_lY(t_l)Y^{-1}(S),$$

а матриця-функція $Y(\cdot)-$ *матрицант лінійного диференціального рівняння*

$$Y'(t)=\widehat{A}(t)Y(t), \quad t_0\in(a,b) \tag{16}$$

з початковою умовою у фіксованій точці

$$Y(t_0)=I_p, \quad t_0\in(a,b) \tag{17}$$

Формула (15) визначає матрицю Гріна однозначно. З неї також слідує, що матриця Гріна є розривною на відрізках $t=t_k, s\in(a,b)$, а тому ми будемо її досліджувати на неперервність за параметром у нормах просторів $C^{(n)}$ лише на смугах $(t_{l-1},t_l)\times(a,b)$.

Теорема 1. *Нехай при* $\varepsilon\to+0$ *та* $j\in\overline{1,r}$ *для деякого* $n\in\mathbb{N}$ *виконуються умови:*

1) $\|A_{j-1}(\cdot;\varepsilon)-A_{j-1}(\cdot;0)\|_{(n-1)}\to 0;$

2) $\beta_{j,i}(l;\varepsilon)\to\beta_{j,i}(l;0), \quad i\in\overline{1,r}, \quad l\in\overline{1,k};$

тоді для достатньо малих значень ε *існують нормовані матриці Гріна* $G(t,s;\varepsilon)$ *задач (1) – (2) і на смугах* $(t_{l-1},t_l)\times(a,b)$ *виконується граничне співвідношення*

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon)-G(\cdot,\cdot;0)\|_{(n)}\to 0, \quad \varepsilon\to+0, \tag{18}$$

де $\|\cdot\|_{(n)}-$ *норма у просторі* $C^{(n)}$.

3. Доведення основного результату

Для доведення теореми 1 нам буде потрібна

Лема 1. *Багатоточкова крайова задача вигляду (1) – (2) еквівалентна багатоточковій крайовій задачі для системи* $p = rm$ *диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (6)-(7), де* $\widehat{A}(\cdot;\varepsilon), B_l(\varepsilon), \widehat{f}(t;\varepsilon), \widehat{y}'(t;\varepsilon)$ *визначені формулами (8)-(11).*

Доведення. Поставимо у відповідність рівнянню (1) систему рівнянь першого порядку наступним чином

$$y(t) = \widehat{y}_1(t), \quad y'(t) = \widehat{y}_1'(t) = \widehat{y}_2(t),$$
$$y''(t) = \widehat{y}_2'(t) = \widehat{y}_3(t), \ldots, y^{(r-1)}(t) = \widehat{y}'_{(r-1)}(t) = \widehat{y}_r(t). \tag{19}$$

Після заміни отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(t) = \widehat{y}_1(t), \\ \widehat{y}_1'(t) = \widehat{y}_2(t), \\ \widehat{y}_2'(t) = \widehat{y}_3(t), \\ \ldots \\ \widehat{y}'_{(r-1)}(t) = \widehat{y}_r(t), \\ \widehat{y}_r(t) = -A_0(t)\widehat{y}_1(t) - A_1(t)\widehat{y}_2(t) - \ldots - A_{r-2}(t)\widehat{y}_{(r-1)}(t) - \\ \qquad -A_{r-1}(t)\widehat{y}_r(t) + f(t), \end{cases} \tag{20}$$

яка еквівалентна рівнянню (1).

Дійсно, нехай функція $y = \phi(t)$ є розв'язком рівняння (1). Тоді

$$\widehat{y}_1 = \phi(t), \quad \widehat{y}_2 = \phi'(t), \quad \ldots, \quad \widehat{y}_r = \phi^{(r-1)}(t),$$

згідно з (19), є розв'язком системи (20).

Нехай тепер навпаки:

$$\widehat{y}_i = \phi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

є розв'язком системи (20). Тоді, згідно з співвідношеннями (19),

$$y = \phi_1(\widehat{y})$$

буде розв'язком рівняння (1), що й доводить еквівалентність.

Враховуючи рівності (8)-(11), систему (20) можна записати у вигляді диференціального рівняння першого порядку (6). Спираючись на рівності (9), крайова умова перепишеться у вигляді крайової умови (2). Отже, між розв'язками задачі (1), (2) та (6), (7) існує взаємно однозначна відповідність, а саме: кожному розв'язку $y(t;\varepsilon)$ рівняння (1) відповідає розв'язок $\widehat{y}(t;\varepsilon)$ рівняння (6), і навпаки.

Лема доведена. □

Лема 2. *Нехай виконується припущення $\mathcal{J}$. Тоді існує нормована матриця Гріна $G(t,s;\varepsilon)$ напіводнорідної багатоточкової крайової задачі вигляду (1) – (2), та при цьому*

$$G(t,s;\varepsilon) = G_{1,r}(t,s;\varepsilon),$$

де $G_{1,r}(t,s;\varepsilon)$ — відповідний елемент матриці Гріна

$$\widehat{G}(t,s;\varepsilon) = (G_{j,i}(t,s;\varepsilon))_{j,i=1}^{r}$$

напіводнорідної багатоточкової крайової задачі вигляду (6) – (7).

Доведення. Враховуючи лему (1), умова існування тривіального розв'язку задачі (3), (4) рівносильна тому, що однорідна крайова задача (12), (13) також буде мати лише тривіальний розв'язок. А з цього випливає, що для багатоточкової крайової задачі (6), (7) існує матриця Гріна $\widehat{G}(t,s;\varepsilon) = (G_{j,i}(t,s;\varepsilon))_{j,i=1}^{r}$, за допомогою якої розв'язок напіводнорідної багатоточкової крайової задачі (6), (7) може бути представлений у вигляді

$$\widehat{y}(t;\varepsilon) = \int_a^b \widehat{G}(t,s;\varepsilon)\widehat{f}(s;\varepsilon)ds, \;\; t \in (a,b) \qquad (21)$$

$$\varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \qquad \widehat{f}(\cdot;\varepsilon) \in (C^{(n-1)})^p.$$

Враховуючи (8) – (11), рівність (21) можна записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} y(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{1,r}(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \\ y'(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{2,r}(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ y^{(r-2)}(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{r-1,r}(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \\ y^{(r-1)}(t;\varepsilon) = \int\limits_a^b G_{r,r}(t,s;\varepsilon)f(s;\varepsilon)ds, \end{cases} \tag{22}$$

де $y(t;\varepsilon)$ — єдиний розв'язок напіводнорідної багатоточкової крайової задачі (1), (2).

Отже, врахувавши представлення (14) та систему (22), отримуємо, що

$$G(t,s;\varepsilon) = G_{1,r}(t,s;\varepsilon).$$

Лема 2 доведена. □

Для нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку у [13] доведена

Теорема 2. *Нехай при* $\varepsilon \to +0$ *виконуються наступні умови:*

1) $\|\widehat{A}(t;\varepsilon) - \widehat{A}(t;0)\|_{(n-1)} \to 0$;

2) $\|B_l(\varepsilon) - B_l(0)\| \to 0, \quad l = \overline{1,k}$;

тоді для достатньо малих ε *існують нормовані матриці Гріна задач* (6), (7), *для яких на смугах* $(t_{l-1}, t_l) \times (a,b)$ *виконується*

$$\|\widehat{G}(\cdot,\cdot;\varepsilon) - \widehat{G}(\cdot,\cdot;0)\|_{(n)} \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \tag{23}$$

Доведення. Згідно з лемою 2, для доведення теореми 1 достатньо показати, що при виконанні її умов для достатньо малих значень ε існують матриці Гріна $\widehat{G}(t,s;\varepsilon)$ розглядуваних задач

(6) – (7) і на смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ виконується граничне співвідношення (23).

З леми 1 про еквівалентність крайових задач випливає, що умова існування лише тривіального розв'язку для однорідної крайової задачі виду (3), (4) рівносильна тому, що однорідна крайова задача (12), (13) для диференціального рівняння першого порядку також має лише тривіальний розв'язок. Тоді з умов 1), 2) теореми 1 та з формул (8) – (11) отримуємо при $\varepsilon \to 0+$ виконання таких співвідношень:

$$\|\widehat{A}(\cdot;\varepsilon) - \widehat{A}(\cdot;0)\|_{(n-1)} \to 0,$$

$$\|B_l(\varepsilon) - B_l(0)\| \to 0.$$

Тоді, згідно з теоремою 2 про неперервність за параметром матриць Гріна багатототочкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку, для достатньо малих ε існує нормована матриця Гріна задачі (6), (7) і на смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ виконується граничне співвідношення (23). Цим теорема 1 доведена.

4. Висновки

У статті досліджена параметризована числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ сім'я багатоточкових крайових задач для векторних лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$, коефіцієнти та праві частини яких належать банаховим просторам $(C^{(n)})^{m \times m}$ та $(C^{(n)})^m$ відповідно, на скінченному інтервалі $[a, b]$. Так як матриця Гріна є розривною на відрізках $t = t_k, s \in (a, b)$, то досліджена її неперервність за параметром лише на смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ у нормі простору $(C^{(n)})^m$. Встановлений результат є узагальненням твердження, одержаного в [13] для скалярних рівнянь, та уточненням для випадків, розглянутих в [9, 12].

Авторка вдячна В. А. Михайлецю за постановку задачі і керівництво роботою.

Література

[1] *Cole R. H.* General boundary conditions for an ordinary linear differential system // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – **111**. – P. 521–550.

[2] *Bryan R. N.* A linear differential system with general linear boundary conditions // J. Different. Equat. – 1969. – **5**. – P. 38–48.

[3] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 703 с.

[4] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – **30**. – С. 3–103.

[5] *Левин А.Ю.* Предельный переход для несингулярных систем X? = An(t)X // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.

[6] *Левин А.Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.

[7] *Левин А.Ю.* О многоточечной краевой задаче // Науч. докл. высш. школы. – 1985. – № 5. – С. 34–37.

[8] *Левин А.Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 5. – С. 1022–1025.

[9] *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227–239.

[10] *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2009. – 148 с.

[11] *Кодлюк Т. I., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – С. 70–81.

[12] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Предельные теоремы для общих одномерных краевых задач // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**. – С. 227–239.

[13] *Чеханова Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ: 2014. – 117 с.