Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 307–314

УДК 517.9

И. Л. Нижник, Л. П. Нижник

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Инвариантные меры при отображении отрезка на себя

irene@imath.kiev.ua / nizhnik@imath.kiev.ua

The invariant measure, which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure by the power and piecewise linear mappings of the unit segment on itself.

Построена инвариантная мера, абсолютно непрерывная по отношению к мере Лебега при степенных и кусочно–линейных отображениях единичного отрезка на себя.

1. Введение

Если f отображение топологического пространства X с борелевой мерой μ в себя, то определено отображение меры μ в меру μ_1 таким образом, что для любого борелевского множества A выполняется равенство $\mu_1(A) = \mu(f^{-1}(A))$, где $f^{-1}(A)$ полный прообраз множества A при отображении f. Оператор $\mathcal{L}$, отвечающий отображению f и переводящий меру μ в меру μ_1, называется оператором Перрона–Фробениуса [1]. В случае, если $\mu = \mu_1$, говорят, что мера μ $f-$инвариантная. Хорошо известна теорема Крылова–Боголюбова [2, 3] о существовании инвариантных вероятностных мер при непрерывном отображении компакта X

в себя. Если существует неподвижная точка x_0 для отображения f, т.е. $f(x_0) = x_0$, то атомарная мера μ_{x_0} с массой 1 будет $f-$инвариантной вероятностной мерой. В случае, когда пространство X являет собой отрезок $\Omega = [0, 1]$, а $f-$непрерывные отображения отрезка Ω в себя, хорошо известно, что отображение f имеет по меньшей мере одну неподвижную точку. Если функция f – тождественная константа C, то точка $x_0 = C$ очевидно неподвижная, а атомарная мера μ_{x_0} единственная вероятностная инвариантная мера. Если функция $f(x)$ не является непрерывной, а, например, является кусочно–монотонной функцией, то инвариантная мера может существовать и даже быть абсолютно непрерывной по отношению к мере Лебега. В данной заметке мы рассматриваем случай, когда функция $f(x)$ – степенная, $f(x) = x^{\alpha}$, либо кусочно–линейная. Отметим, что возникающие инвариантные меры важны при изучении детерминистской диффузии [4, 5, 6].

2. Степенные отображения

Сформулируем без доказательств, поскольку они почти очевидны, ряд утверждений об инвариантной мере для степенных отображений.

Предложение 1. *Степенная функция* $f_\alpha(x) = x^\alpha,\ \alpha > 0$ *отображает отрезок* $[0, 1]$ *на себя. При* $\alpha \neq 1$ *инвариантными вероятностными мерами будут* δ_0 *и* δ_1 *– единичные атомарные меры в точках* $x = 0, x = 1$. *Их комбинация* $\varepsilon\delta_0 + (1 - \varepsilon)\delta_1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ *является общим видом инвариантной вероятностной меры.*

Предложение 2. *Множество степенных отображений* $\{f_\alpha\}_{\alpha>0}$ *отрезка* $[0, 1]$ *на себя образует группу преобразований отрезка* $[0, 1]$ *в себя, изоморфную группе положительных чисел относительно операции умножения:*

$$(f_\alpha \circ f_\beta)(x) = f_\alpha(f_\beta(x)) = f_{\alpha\beta}(x).$$

Предложение 3. *На борелевских подмножествах отрезка* $[0,1]$ *определена мера (неограниченная) равенством:*

$$\mu([a,b]) = \ln \frac{\ln a}{\ln b},\ 0 < a \leq b < 1.$$

Предложение 4. *Мера из предложения 3 является инвариантной относительно всех преобразований* f_α, *т.е. является неограниченной мерой Хаара группы из предложения 2.*

Замечание 1. Мера μ из предложения 3 имеет плотность $p(x) = \frac{1}{x|\ln x|}$ с неинтегрируемыми особенностями на концах отрезка $[0,1]$.

3. Кусочно–линейные функции

Пусть точки $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ делят единичный отрезок Ω на n частей. Открытые подынтервалы (x_{k-1}, x_k) будем обозначать через Ω_k и называть подынтервалами, отвечающими разбиению отрезка Ω точками $\vec{x} = (x_0, ..., x_n)$. Если A – подмножество отрезка Ω, а система m подынтервалов $\{\Omega_{k_l}\}_{l=1}^m$ – минимальна и такова, что множество A принадлежит замыканию объединения $\bigcup\limits_{l=1}^{m} \Omega_{k_l}$, то будем говорить, что множество A лежит на m частях отрезка Ω с номерами $k_1, ...k_m$.

Определение 1. Будем говорить, что кусочно–непрерывная функция f на отрезке $\Omega = [0,1]$ согласована с разбиением отрезка Ω точками $\vec{x} = (x_0, ..., x_n)$, если

1. на каждом из подынтервалов $\Omega_k = (x_{k-1}, x_k)$ функция f непрерывна и существуют предельные значения $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k - 0)$;

2. прообразы $f^{-1}(\{x\}),\ x \in \Omega_k$ лежат на одних и тех же частях Ω для всех $x \in \Omega_k$.

Теорема 5. *Кусочно–линейная функция f, отличная от постоянной на любом подынтервале отрезка $\Omega = [0,1]$, согласована с разбиением отрезка Ω точками $\vec{x} = (x_0, ..., x_n)$, если функция f отображает множества $\{x_k\}_{k=0}^n$ в себя и множество $\{x_k\}_{k=0}^n$ содержит:*

1. *точки 0 и 1;*
2. *все точки $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^p$, где функции $f(x)$ либо $f'(x)$ терпят скачок;*
3. *все предельные значения $f(\tilde{x}_k \pm 0)$.*

Доказательство. Интервалы, на которых кусочно–линейная функция $f(x)$ линейна, содержат интервалы Ω_k, отвечающие разбиению $\vec{x}$. Поэтому на всех интервалах Ω_k функция $f(x)$ непрерывна и существуют ее предельные значения на концах интервалов Ω_k. Свойство 2 определения 1 следует из локальной монотонности кусочно–линейных функций и свойства функции $f(x)$ отображать множество $\{x_k\}$ в себя. $\square$

Определение 1 и теорема 5 важны при решении вопроса о существовании абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, инвариантной меры для кусочно-линейной функции f, отображающей единичный отрезок на себя. Если исходная мера μ имеет плотность ρ_0, а мера $\mu_1 = \mathcal{L}\mu$ имеет плотность ρ_1, то оператор Перрона–Фробениуса является интегральным [1] и переводит плотность ρ_0 в ρ_1 :

$$\rho_1(x) = \mathcal{L}\rho_0(x) = \int \delta(x - f(y))\rho_0(y)\,dy = \\ = \sum_{y_k \in f^{-1}(\{x\})} \frac{1}{|f'(y_k)|}\rho_0(y_k). \tag{1}$$

Теорема 6. *Для того, чтобы оператор Перрона–Фробениуса, отвечающий кусочно–линейной функции f с условием $f'(x) \neq 0$ на отрезке $\Omega = [0,1]$ переводил произвольную меру с постоянными плотностями в меру такого же вида на системе интервалов $\{\Omega_k\}_{k=1}^n$, отвечающих согласованному с f делению отрезка Ω на подынтервалы $\{\Omega_k\}_{k=1}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы 5. Если $\rho_0 = \mathrm{col}\,(\rho_0^1, ..., \rho_0^n)$ и $\rho_1 = \mathrm{col}\,(\rho_1^1, ..., \rho_1^n)$ – векторы, отвечающие плотностям ρ_0^k исходной меры μ на интервалах Ω_k и ρ_1^k плотности меры $\mu_1 = \mathcal{L}\mu$ на интервалах Ω_k, то оператор Перрона–Фробениуса представим в виде матрицы L*

$$\rho_1 = L\rho_0. \tag{2}$$

Матрица $L = |l_{m,n}|$ имеет следующий вид. В строке с номером m отличные от нуля лишь элементы с номерами частей отрезка Ω, на которых лежат прообразы $f^{-1}(\Omega_k)$. Сами значения соответствующих элементов $l_{m,n}$ — это величины $|f'(x)|^{-1}$, где $x \in \Omega_n$.

Доказательство. Доказательство очевидно, поскольку формула (2) следует из формулы (1). $\square$

Сформулируем теперь основной результат:

Теорема 7. *Для того, чтобы кусочно–линейная функция f, определенная на отрезке $\Omega = [0,1]$, имела инвариантную меру с постоянными плотностями на интервалах Ω_k, которые отвечают разбиению отрезка Ω точками $\vec{x} = (x_0, ..., x_n)$, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям теоремы 5, матричный оператор Перрона-Фробениуса L из* *теоремы 6 имел собственное значение 1, а отвечающий этому собственному значению собственный вектор имел все неотрицательные компоненты, которые и являются плотностями на соответствующих интервалах инвариантной меры.*

Доказательство. В случае $\rho_1 = \rho_0$ из формулы (2) следует, что 1 является собственным значением матрицы L оператора Перрона-Фробениуса, а компоненты этого собственного вектора являются плотностями инвариантной меры. Поскольку собственный вектор определяется с точностью до константы, то она определяется из условия $\mu(\Omega) = 1$. □

4. Примеры

Пример 1. Пусть $f(x)$ – линейная функция на каждом из промежутков $[0, \xi]$, $(\xi, 1-\xi)$, $[1-\xi, 1]$ и принимает на концах этих промежутков значения $f(0) = 0$, $f(\xi) = 1$; $f(\xi + 0) = 1 - \eta$, $f(1 - \xi - 0) = \eta$; $f(1 - \xi) = 0$, $f(1) = 1$. Тогда $X = \{0, \eta, \xi, 1-\xi, 1-\eta, 1\}$. Если $\eta = \frac{\xi}{1+\xi}$, то $f(X) = \{0, 1-\eta, 1, 0, \eta, 1\} \subset X$. Плотности p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – меры μ на отрезках $[0, \eta], [\eta, \xi], [\xi, 1-\xi], [1-\xi, 1-\eta], [1-\eta, 1]$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$p_1 = \xi(p_1 + p_4),$$

$$p_2 = p_3 = p_4 = \xi(p_1 + p_5) + |k|^{-1} p_3,$$

$$p_5 = \xi(p_2 + p_5),$$

где $|k| = \dfrac{1-2\eta}{1-2\xi}$. Кроме того, выполняется условие нормировки $\mu([0, 1]) = 1:$

$$p_1\eta + p_2(\xi - \eta) + p_3(1 - 2\xi) + p_4(1 - \xi - \eta) + p_5\eta = 1.$$

Решение приведенной системы уравнений имеет следующие значения: $p_1 = p_5 = \dfrac{\eta}{6\eta^2 - 4\eta + 1}$, $p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1-2\eta}{\eta} p_1$.

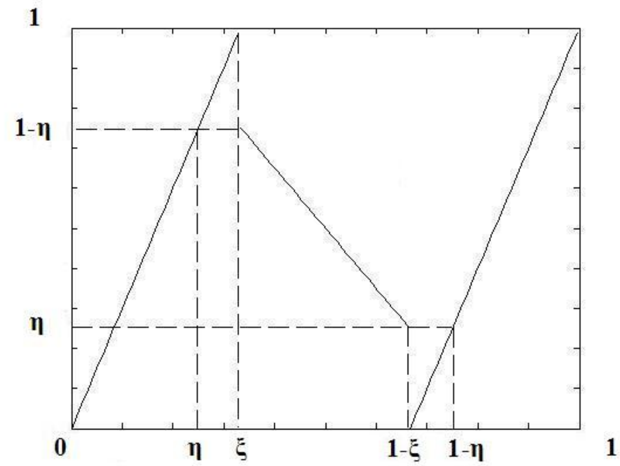

Рис. 1. График функции $f(x)$ из примера 1.

Пример 2. Пусть $f(x)$ – линейная функция на каждом из промежутков $[0, \xi]$, $(\xi, 2\xi]$, $(2\xi, 3\xi]$, $(3\xi, 1]$ с постоянным коэффициентом наклона $f'(x) = k = \frac{1}{\xi}$. В качестве X берем множество $\hat{x}_0 = 0, \hat{x}_1 = k(\eta - 2\xi), \hat{x}_2 = \xi, \hat{x}_3 = 2\xi, \hat{x}_4 = \eta,\ \ \hat{x}_5 = 3\xi, \hat{x}_6 = 1$, где $\eta = f(1) = k - 3$. Если угловой коэффициент k удовлетворяет уравнению $k^3 - 3k^2 - 3k + 3 = 0$, то множество $X = \{\hat{x}_k\}_{k=0}^{6}$ обладает свойством $f(X) \subset X$, поскольку $f(X) = \{0, \eta, 1, 1, \hat{x}_1, 1, \eta\}$. Пусть $p_1, ..., p_6$ плотности мер на отрезках $[0, \hat{x}_1], [\hat{x}_1, \hat{x}_2], ..., [\hat{x}_5, \hat{x}_6]$. Тогда

$$p_1 = \frac{1}{k}(p_1 + p_3 + p_4 + p_6),$$

$$p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{k}(p_1 + p_3 + p_5 + p_6),$$

$$p_5 = p_6 = \frac{1}{k}(p_2 + p_3 + p_5).$$

Кроме этого, в силу нормировки меры $\mu([0,1]) = 1$ имеем равенство $\sum\limits_{k=1}^{6} p_k(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = 1$. Из приведенной линейной системы получаем явный вид плотностей p_k :

$$p_1 = \frac{k}{k-1} p_6, \;\; p_2 = p_3 = p_4 = \frac{k-1}{2} p_6, \;\; p_5 = p_6 = \frac{1}{3(4-k)}.$$

Численное значение k, как решение уравнения $k^3 - 3k^2 - 3k + 3 = 0$, имеет вид $k \approx 3.6017$.

$$\xi = 0.2776, \;\; \eta = 0.6017, \;\; \hat{x}_1 = 0.167,$$

$$p_1 = 1.1585, \;\; p_2 = p_3 = p_4 = 1.0886, \;\; p_5 = p_6 = 0.8368.$$

Список литературы

[1] *Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G., Whelan N., Wirzba A.* Classical and Quantum Chaos. – 2004. – http://www.nbi.dk/ChaosBook/

[2] *Hasselblatt B., Katok A.* A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[3] *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] *Klages R.* Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Mechanics. – World Scientific, 2007.

[5] *Anomalous Transport.* / R. Klages, G. Radons, I. Sokolov (Eds) – Wiley-VCH, 2008.

[6] *Nizhnik L., Nizhnik I.* Deterministic diffusion http // arxiv.org/pdf/1501.00674.pdf[math.DS].