Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, т. 12, № 2, 291–306

УДК 517.984.5

В. М. Молибога

(Інститут математики НАН України, Київ)

Сингулярні збурення дробово-диференціальних операторів на колі

molyboga@imath.kiev.ua

In the article we study strongly singular perturbations, in general non-symmetric, of the non-negative fractionally-differential operators $\mathbb{D}^{2s}$ of order $s \in (1/2, \infty)$ on the circle, which coincides up to multiplier with derivative of H. Weyl. We define the perturbed operators, investigate their common spectral properties.

В роботі вивчаються сильно сингулярні збурення, в загальному випадку несиметричні, невід'ємного дробово-диференціального оператора $\mathbb{D}^{2s}$ порядку $s \in (1/2, \infty)$ на колі, який збігається з точністю до множника з похідною Г. Вейля. Ми визначаємо збурені оператори, досліджуємо їх загальні спектральні властивості.

1. Вступ та основні результати

Починаючи з класичної роботи Кроніга та Пенні [13], в математичну фізику ввійшли оператори Шрьодінгера з потенціалами, що є періодичними узагальненими функціями. Подальший розвиток квантової механіки стимулював активний розвиток цього наукового напрямку, див. бібліографію монографій [1, 2], яка налічує понад 1000 публікацій.

Як добре відомо, див. [10, 12, 7, 16] та бібліографію там, де одновимірні самоспряжені оператори Шрьодінгера на осі з сильно сингулярними періодичними потенціалами мають абсолютно неперервний спектр, який має зонну структуру: спектральні зони чергуються зі спектральними лакунами. При цьому кінці спектральних лакун є *періодичними/напівперіодичними* власними значеннями відповідних операторів $\mathrm{S}(V)$ на колі.

Одновимірні самоспряжені диференціальні оператори високого парного порядку $2s$, $s = 2, 3, 4, \ldots$, на колі з періодичними коефіцієнтами також мають абсолютно неперервний спектр, який має зонну структуру [8, Теорема XIII.7.64]. Але, на відміну від випадку $s = 1$, серед кінців спектральних лакун є не тільки *періодичні/напівперіодичні* власні значення відповідних операторів $\mathrm{S}(V)$ на колі, але й точки розгалуження відповідної аналітичної функції Ляпунова [20, 3].

Типовим прикладом застосування диференціальних операторів високого порядку є застосування в теорії коливань балок, пластин та оболонок. Такі оператори також виникають в обернених задачах нелінійних еволюційних рівнянь. Існують різноманітні методи побудови пари Лакса для операторів високого порядку. Відповідне нелінійне рівняння Лакса має гамільтонову структуру і інтегрується методами обернених задач. Багато фізично цікавих рівнянь мають цю форму, див. [3, 4, 5] та посилання там.

В даній роботі вивчаються сильно сингулярні збурення невід'ємного в комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$, дробово-диференціального оператора $\mathbb{D}^{2s}$ порядку $s \in (1/2, \infty)$, який збігається (з точністю до множника i^{2s}) з похідною Г. Вейля:

$$\mathbb{D}^{2s} := (\mathbb{D}^2)^s, \qquad \mathbb{D}^2 := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathrm{Dom}(\mathbb{D}^2) := H^2(\mathbb{T}).$$

Через $H^t(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{R}$, ми позначаємо простори Соболєва 2-періодичних функцій або узагальнених функцій (розподілів), які визначаються за допомогою коефіцієнтів Фур'є:

$$H^t(\mathbb{T}) := \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{i\,k\pi x} \in \mathfrak{D}_2'(\mathbb{T}) \,\middle|\, \|f\|_{H^t(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$
$$\|f\|^2_{H^t(\mathbb{T})} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2t} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Оператор $\mathbb{D}^{2s}$ адитивно збурюється періодичною комплекснозначною узагальненою функцією V з негативного простора Соболєва $H^{-s}(\mathbb{T})$. Дамо визначення операторів

$$\mathrm{S}(V)u := \mathbb{D}^{2s}u + Vu, \qquad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}(V)).$$

Теорема 1. *Оператори* $\mathrm{S}(V)$ *є коректно визначеними в гільбертовому просторі* $L^2(\mathbb{T})$ *як m-секторні оператори форм-суми:*

$$\mathrm{S}(V) = \mathbb{D}^{2s} \dotplus V,$$

які задані на щільній множині

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{S}(V)) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{T}) \,\middle|\, \mathbb{D}^{2s}u + Vu \in L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Нагадаємо, що оператор A в гільбертовому просторі H називається *секторним*, якщо його числова область значень $\Theta(\mathrm{A})$:

$$\Theta(\mathrm{A}) := (Au, u)_H, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{A}), \quad \|u\|_H = 1,$$

належить деякому сектору з вершиною на осі абсцис та центральним кутом, меншим за π. Оператор A називається *m-секторним*, якщо множина $\mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(\mathrm{A})}$ належить резольвентній множині $\mathrm{Resolv}(\mathrm{A})$ оператора A [11, 19].

Наслідок. *Резольвентна множина* $\mathrm{Resolv}(\mathrm{S}(V))$ *операторів* $\mathrm{S}(V)$ *не порожня.*

Наступна теорема дає достатні умови рівномірної резольвентної збіжності введених операторів [18, § VIII.7], [11, § IV.2].

Теорема 2 (про збіжність). *Нехай періодичні узагальнені функції V та V_n, $n \in \mathbb{N}$, належать негативному простору Соболева $H^{-s}(\mathbb{T})$. Послідовність операторів $\mathrm{S}(V_n)$ збігається до оператора $\mathrm{S}(V)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності:*

$$\|\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V)) - \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{S}(V_n))\| \to 0, \quad n \to \infty,$$
$$\lambda \in \mathrm{Resolv}(\mathrm{S}(V)) \neq \varnothing,$$

як тільки

$$V_n \to V \quad \textit{в просторі} \quad H^{-s}(\mathbb{T}) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

З теореми 2 випливає, що оператори $\mathrm{S}(V)$ можуть бути визначені також як границя в сенсі рівномірної резольвентної збіжності послідовності операторів з нескінченно диференційовними потенціалами.

Теорема 3 (про апроксимацію). *Нехай*

$$V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{V}(k) e^{i k \pi x} \in H^{-s}(\mathbb{T}),$$
$$V_n(x) := \sum_{|k| \leqslant n} \widehat{V}(k) e^{i k \pi x} \in C_2^{\infty}(\mathbb{T}).$$

Тоді послідовність операторів $\mathrm{S}(V_n)$ збігається до оператора $\mathrm{S}(V)$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.

Опишемо деякі властивості операторів $\mathrm{S}(V)$.

Теорема 4. *Оператор $\mathrm{S}(V)$ має наступні властивості.*

(1) Для довільного $\delta > 0$ існує константа $b_\delta > 0$ така, що

$$\left| \arg\left((\mathrm{S}(V) + b_\delta \mathrm{Id}) u, u \right)_{L^2(\mathbb{T})} \right| \leq \delta, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}(V)).$$

(2) Оператор $\mathrm{S}(V)$ *самоспряжений тоді і тільки тоді, коли* $V(x)$ *— дійснозначна періодична узагальнена функція.*

(3) Оператор $\mathrm{S}(V)$ *має чисто дискретний спектр.*

Результати роботи були анонсовані в [15]. Для випадку $s \in \mathbb{N}$ теореми 1, 2, 3 та 4 були доведені в [21, 14].

Робота побудована наступним чином. В розділі 2 ми нагадуємо для зручності читання відомі результати, а також доводимо допоміжні. Розділи 3, 4 та 5 присвячені доведенню основних теорем.

2. Допоміжні відомості та результати

2.1. Простори Соболєва на колі

Будемо позначати скалярний добуток в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ через $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{T})}$:

$$(u,v)_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} u\overline{v}\,d\,x, \qquad u,v \in L^2(\mathbb{T}).$$

Тоді система $\{e^{i\,k\pi x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ відносно введеного скалярного добутку є ортонормованим базисом в $L^2(\mathbb{T})$. Представимо довільну функцію u з гільбертового простору $L^2(\mathbb{T})$ у вигляді ряду Фур'є

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{i\,k\pi x},$$

де коефіцієнти Фур'є визначені наступним чином:

$$\widehat{u}(k) := (u, e^{i\,k\pi x})_{L^2(\mathbb{T})}.$$

За допомогою коефіцієнтів Фур'є скалярний добуток допускає представлення у вигляді ряду

$$(u,v)_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)\overline{\widehat{v}(k)}, \qquad u,v \in L^2(\mathbb{T}).$$

Позначимо через $\mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ простір 2-періодичних узагальнених функцій на колі $\mathbb{T}$, а через $C_2^\infty(\mathbb{T})$ — простір основних функцій — простір 2-періодичних нескінченно диференційовних функцій [22]. Для довільної 2-періодичної узагальненої функції $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ визначимо коефіцієнти Фур'є:

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e^{i\,k\pi x}\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

де через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ позначено півторалінійну форму, що є розширенням за неперервністю скалярного добутку в $L^2(\mathbb{T})$. Тоді 2-періодична узагальнена функція $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ може бути представлена у вигляді ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k\pi x} \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}).$$

Для довільних $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ і $\varphi \in C_2^\infty(\mathbb{T})$ має місце узагальнена рівність Парсеваля–Стєклова:

$$\langle f, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{\varphi}(k)}.$$

Простори Соболєва $H^t(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{R}$, 2-періодичних функцій або узагальнених функцій (розподілів) ми визначаємо за допомогою коефіцієнтів Фур'є:

$$H^t(\mathbb{T}) = \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{i\,k\pi x} \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}) \,\Big|\, \|f\|_{H^t(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$
$$\|f\|^2_{H^t(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2t} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Очевидно, що простори $H^0(\mathbb{T})$ і $L^2(\mathbb{T})$ збігаються.

Періодична узагальнена функція $f \in \mathfrak{D}'_2(\mathbb{T})$ є дійснозначною тоді і тільки тоді, коли

$$\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Як добре відомо [6, 9],

$$\mathfrak{D}'_2(\mathbb{T}) = \bigcup_{t \geqslant 0} H^{-t}(\mathbb{T}), \qquad \varphi \in C_2^{\infty}(\mathbb{T}) = \bigcap_{t \geqslant 0} H^{t}(\mathbb{T}).$$

Далі, для довільних двох 2-періодичних узагальнених функцій u та v їх добуток $u \cdot v$ формально ми визначимо наступним чином:

$$u \cdot v := \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(k-j)\widehat{v}(j)e^{i\,k\pi x}.$$

Наступний відомий результат дає достатні умови існування такого добутку.

Лема 5 (про згортку [17, 21])**.** *Нехай $s, r \geqslant 0$ і $t \leqslant \min(s,r)$.*

(I) Якщо $s + r - t > 1/2$, тоді добуток $u \cdot v$ двох довільних 2-періодичних узагальнених функцій, який розглядається як відображення в просторах:

$$(a)\ H^r(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \to H^t(\mathbb{T}), \qquad (b)\ H^{-t}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \to H^{-r}(\mathbb{T}),$$

є неперервним відображенням, при цьому мають місце оцінки:

$$(a)\ \|u \cdot v\|_{H^t(\mathbb{T})} \leqslant C_1(s,r,t)\|u\|_{H^r(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})},$$
$$(b)\ \|u \cdot v\|_{H^{-r}(\mathbb{T})} \leqslant C_2(s,r,t)\|u\|_{H^{-t}(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

(II) Якщо $s + r - t < 1/2$, тоді твердження (I) не виконується.

2.2. Числова область значень додатної форми, збуреної несиметричною формою

В цьому пункті ми отримаємо загальні результати щодо локалізації числової області форми, яка є результатом збурення додатної форми несиметричною, в загальному випадку, формою. Ці результати ми застосуємо до локалізації спектру операторів $\mathrm{S}(V)$.

Нехай в гільбертовому просторі H задано щільно визначену, замкнену, додатну півторалінійну форму $\alpha_0[u,v]$ з областю визначення $\mathrm{Dom}(\alpha_0) \subset H$. Нехай $\beta[u,v]$ визначена в H півторалінійна форма з областю визначення $\mathrm{Dom}(\beta) \supset \mathrm{Dom}(\alpha_0)$.

Будемо припускати, що форма β є α_0-обмеженою з α_0-межею, рівною 0, і виконані оцінки:

$$\exists\, a, b > 0: \quad |\beta[u]| \leq a\varepsilon\alpha_0[u] + b\|u\|_H^2 \quad \forall\varepsilon > 0,\ u \in \mathrm{Dom}(\alpha_0). \tag{1}$$

Розглянемо в гільбертовому просторі H суму форм α_0 і β:

$$\alpha[u,v] := \alpha_0[u,v] + \beta[u,v], \qquad \mathrm{Dom}(\alpha) := \mathrm{Dom}(\alpha_0).$$

Півторалінійна форма α є щільно визначеною, замкненою, секторною півторалінійною формою в гільбертовому просторі H. Нехай $\Theta(\alpha)$ числова область значень форми α:

$$\Theta(\alpha) := \alpha[u], \qquad u \in \mathrm{Dom}(\alpha),\ \|u\|_H = 1.$$

В силу зроблених припущень $\Theta(\alpha_0) \subset [0, \infty)$. З'ясуємо властивості множини $\Theta(\alpha)$.

Лема 6. *Мають місце оцінки:*

$$|\mathrm{Im}\,\alpha[u]| \leq 2a\varepsilon \mathrm{Re}\,\alpha[u] + 2b\|u\|_H^2, \qquad 0 < \varepsilon \leq (2a+1)^{-1}. \tag{2}$$

Доведення. В силу зроблених припущень маємо

$$\mathrm{Re}\alpha[u] = \alpha_0[u] + \mathrm{Re}\beta[u], \qquad \mathrm{Im}\alpha[u] = \mathrm{Im}\beta[u].$$

Тому з (1) отримуємо

$$|\mathrm{Im}\alpha[u]| \leq a\varepsilon\alpha_0[u] + b\|u\|_H^2. \tag{3}$$

Далі, приймаючи до уваги, що $1 - a\varepsilon > 1/2$ при $0 < \varepsilon \leq (2a+1)^{-1}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\alpha[u] = \alpha_0[u] + \mathrm{Re}\beta[u] \geqslant \alpha_0[u] - |\mathrm{Re}\beta[u]| \\ \geqslant \alpha_0[u] - a\varepsilon\alpha_0[u] - b\|u\|_H^2 \\ = (1 - a\varepsilon)\alpha_0[u] - b\|u\|_H^2 \geqslant \frac{1}{2}\alpha_0[u] - b\|u\|_H^2, \end{aligned}$$

тобто

$$\mathrm{Re}\alpha[u] \geqslant \frac{1}{2}\alpha_0[u] - b\|u\|_H^2.$$

З останньої нерівності, враховуючи, що $2a\varepsilon < 1$, отримуємо

$$2a\varepsilon\mathrm{Re}\alpha[u] \geqslant a\varepsilon\alpha_0[u] - 2a\varepsilon \cdot b\|u\|_H^2 \geqslant a\varepsilon\alpha_0[u] - b\|u\|_H^2,$$

і

$$a\varepsilon\alpha_0[u] \leqslant 2a\varepsilon\mathrm{Re}\alpha[u] + b\|u\|_H^2.$$

Комбінуючи (3) з останньою оцінкою, отримуємо потрібну оцінку (2). Лему доведено.

3. Доведення теореми 1

Розглянемо в гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{T})$ півторалінійну форму

$$\tau_{2s}[u,v] := \langle \mathbb{D}^{2s}u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(\tau_{2s}) := H^s(\mathbb{T}).$$

Форма τ_{2s} є щільно визначена, замкнена та додатна в просторі $L^2(\mathbb{T})$. 2-Періодична узагальнена функція $V \in H^{-s}(\mathbb{T})$ породжує півторалінійну форму

$$t_V[u,v] := \langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(t_V) := H^s(\mathbb{T}).$$

Приймаючи до уваги лему 5, застосовуючи узагальнену нерівність Шварца–Коші–Буняковського, отримуємо

$$\begin{aligned}|t_V[u,v]| &= \left|\langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right| \\ &\leqslant \|Vu\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C_s\|V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}\|u\|_{H^s(\mathbb{T})}\|v\|_{H^s(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Тобто форма t_V визначена коректно в просторі $L^2(\mathbb{T})$.

Далі, розглянемо суму

$$t[u,v] := \tau_{2s}[u,v] + t_V[u,v], \qquad \mathrm{Dom}(t) := H^s(\mathbb{T}).$$

Лема 7. *Півторалінійна форма* t_V *є* τ_{2s}*-обмеженою з* τ_{2s}*-межею, рівною* 0*. Для довільного* $\varepsilon \in (0,1]$ *має місце нерівність:*

$$|t_V[u]| \leqslant a_s \varepsilon \tau_{2s}[u] + \left(c_s \|V_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + a_s\right) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

де V_0 *визначається з розкладу*

$$V = V_0 + V_\varepsilon, \quad V_0 \in H^s(\mathbb{T}), \quad V_\varepsilon \in H^{-s}(\mathbb{T}), \tag{4}$$

$$\|V_\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon, \quad u \in H^s(\mathbb{T}), \tag{5}$$

а константи $a_s, c_s > 0$ *визначаються з леми 5:*

$$\|V_0 u\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant c_s \|V_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \|u\|_{L^2(\mathbb{T})}, \tag{6}$$

$$\|V_\varepsilon u\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \leqslant a_s \|V_\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \|u\|_{H^s(\mathbb{T})}. \tag{7}$$

Доведення. Для довільного заданого $\varepsilon \in (0,1]$ має місце розклад (4)–(5). Беручи до уваги (6)–(7), а також той факт, що

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \tau_{2s}[u], \tag{8}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} |t_V[u]| &\leqslant \left|\langle V_0 u, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right| + \left|\langle V_\varepsilon u, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right| \\ &\leqslant c_s \|V_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + a_s \|V_\varepsilon\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \|u\|^2_{H^s(\mathbb{T})} \\ &\leqslant a_s \varepsilon \tau_{2s}[u] + \left(c_s \|V_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + a_s \varepsilon\right) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leqslant a_s \varepsilon \tau_{2s}[u] + \left(c_s \|V_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + a_s\right) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Лему доведено.

З леми 7 випливає, що форма t:

$$t[u,v] = \langle \mathbb{D}^{2s} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle V u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(t) = H^s(\mathbb{T}),$$

є щільно визначеною, замкненою і секторною [11, теорема VI.1.33]. Згідно з першою теоремою про представлення [11, Теорема VI.2.1] з півторалінійною формою t асоційований m-секторний оператор $\mathrm{S} \equiv \mathrm{S}(V)$ з такими властивостями:

i) $\mathrm{Dom}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{Dom}(t)$ і

$$t[u,v] = (\mathrm{S}u, v)_{L^2(\mathbb{T})} \qquad \forall u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}),\ \forall v \in \mathrm{Dom}(t);$$

ii) $\mathrm{Dom}(\mathrm{S})$ є ядром форми t (замикання форми, визначеної на $\mathrm{Dom}(\mathrm{S})$, є форма t);

iii) якщо $u \in \mathrm{Dom}(t)$, $\omega \in L^2(\mathbb{T})$ і рівність

$$t[u,v] = (\omega, v)_{L^2(\mathbb{T})}$$

виконується для всіх v з ядра форми t, то $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S})$ і $\mathrm{S}u = \omega$.

Оператор S визначається умовою *i*) однозначно.

Введемо позначення

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in H^s(\mathbb{T}) \,\middle|\, \mathbb{D}^{2s}u + Vu \in L^2(\mathbb{T}) \right\}.$$

Нехай $\in \mathcal{M}$, тоді

$$\begin{aligned} t[u,v] &= \langle \mathbb{D}^{2s}u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle \mathbb{D}^{2s}u + Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \left(\mathbb{D}^{2s}u + Vu, v\right)_{L^2(\mathbb{T})} \qquad \forall v \in C_2^\infty(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

і згідно з властивістю *iii*) першої теореми про представлення $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S})$ і $\mathrm{S}u = \mathbb{D}^{2s}u + Vu$, тобто $\mathcal{M} \subset \mathrm{Dom}(\mathrm{S})$.

Нехай тепер $u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{Dom}(t) = H^s(\mathbb{T})$. Тоді

$$\begin{aligned} t[u,v] &= \langle \mathbb{D}^{2s}u + Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = (\mathrm{S}u, v)_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \langle \mathrm{S}u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \qquad \forall v \in C_2^\infty(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

звідки отримуємо, що $\mathrm{S}u = \mathbb{D}^{2s}u + Vu$. Отже $\mathrm{Dom}(\mathrm{S}) \subset \mathcal{M}$.

Таким чином, ми довели:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(\mathrm{S}) &= \left\{ u \in H^s(\mathbb{T}) \,\middle|\, \mathbb{D}^{2s}u + Vu \in L^2(\mathbb{T}) \right\}, \\ \mathrm{S}u &= \mathbb{D}^{2s}u + Vu, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}), \end{aligned}$$

що й завершує доведення теореми.

Теорему 1 доведено. □

4. Доведення теорем 2 та 3

Нехай t і t_n півторалінійні форми, яким згідно з першою теоремою про представлення відповідають оператори $\mathrm{S}(V)$ і $\mathrm{S}(V_n)$:

$$t[u,v] = \langle \mathbb{D}^{2s} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(t) = H^s(\mathbb{T}),$$
$$t_n[u,v] = \langle \mathbb{D}^{2s} u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle V_n u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(t_n) = H^s(\mathbb{T}).$$

Тоді, враховуючи (8), маємо

$$\begin{aligned} |t[u] - t_n[u]| &= \left|\langle (V - V_n)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right| \leqslant a_s \|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \|u\|^2_{H^s(\mathbb{T})} \\ &\leqslant a_s \|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \tau_{2s}[u]\right), \end{aligned} \tag{9}$$

де константа $a_s > 0$ визначається з леми 5. Згідно з лемою 7

$$|t_V[u,v]| \leqslant a_s \tau_{2s}[u] + b_s \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

Оскільки

$$\mathrm{Re} t[u] = \tau_{2s}[u] + \mathrm{Re}\langle Vu, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})},$$

тому

$$\left|\mathrm{Re}\langle Vu, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})}\right| \leqslant a_s \tau_{2s}[u] + b_s \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

і

$$\mathrm{Re}\langle Vu, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + a_s \tau_{2s}[u] + b_s \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \geqslant 0. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\begin{aligned} &|t[u] - t_n[u]| \leqslant a_s \|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \\ &\cdot \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \tau_{2s}[u] + \mathrm{Re}\langle Vu, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + a_s \tau_{2s}[u] + b_s \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\right) \\ &\leqslant a_s \|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})} \left((1 + b_s)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + (1 + a_s)\mathrm{Re} t[u]\right), \end{aligned}$$

і остаточно

$$|t[u] - t_n[u]| \leqslant \alpha_n \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \beta_n \mathrm{Re} t[u],$$

де

$$\alpha_n = a_s(1+b_s)\|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}, \qquad \beta_n = a_s(1+a_s)\|V - V_n\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}.$$

Оскільки α_n, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$, для завершення теореми залишається скористатися [11, теорема VI.3.6].

Теорему 2 доведено.

Теорема 3 випливає з теореми 2 та того факту, що $\|V_n \to V\|_{H^{-s}(\mathbb{T})}$ при $n \to \infty$.

Теорему 3 доведено. □

5. Доведення теореми 4

(I) Нехай, як і вище,

$$t[u,v] = \tau_{2s}[u,v] + t_V[u,v], \qquad \mathrm{Dom}(t) = H^s(\mathbb{T}).$$

Згідно з лемою 7 для довільного $\varepsilon \in (0,1]$ виконується оцінка

$$|t_V[u,v]| \leqslant a_s\varepsilon\tau_{2s}[u] + b_{s,\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

де $b_{s,\varepsilon} = c_s\|V_0\|_{L^2(\mathbb{T})} + a_s$. Тоді, застосовуючи лему 6, отримуємо

$$|\mathrm{Im}\, t[u]| \leq 2a_s\varepsilon \mathrm{Re}\, t[u] + 2b_{s,\varepsilon}\|u\|^2_L(\mathbb{T}), \qquad 0 < \varepsilon \leq (2a_s+1)^{-1}.$$

З останньої оцінки, оскільки

$$t[u] = (\mathrm{S}u, u)_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad u \in \mathrm{Dom}(\mathrm{S}),$$

отримуємо необхідний результат

$$\left|\arg\left((\mathrm{S}(V) + b_{s,\delta}\mathrm{Id})u, u\right)_{L^2(\mathbb{T})}\right| \leq \delta, \quad \delta := \frac{\varepsilon}{2a_s}.$$

Властивість (I) доведено.

(II) Якщо 2-періодична узагальнена функція V дійснозначна, то

$$\widehat{V}(k) = \overline{\widehat{V}(-k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

і породжена V півторалінійна форма t_V є симетричною. Дійсно,

$$\begin{aligned} t_V[u,v] = \langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{V}(k-j)\widehat{u}(j)\overline{\widehat{v}(k)} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(j) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{V}(j-k)\widehat{v}(k)} = \langle u, Vv\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \overline{\langle Vv, u\rangle_{L^2(\mathbb{T})}} = \overline{t_V[v,u]}. \end{aligned}$$

Тому симетричною є і форма

$$t[u,v] = \langle \mathbb{D}^{2s}u, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \langle Vu, v\rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad \mathrm{Dom}(t) = H^s(\mathbb{T}).$$

Тоді, згідно з [11, теорема VI.2.7], асоційований з формою t оператор $\mathrm{S}(V)$ є самоспряженим.

Нехай навпаки — оператор $\mathrm{S}(V)$ є самоспряженим. Припустимо, що функція V не є дійснозначною. Тоді форма t не симетрична, а отже асоційований оператор $\mathrm{S}(V)$ не може бути самоспряженим, що протирічить умові. Це доводить хибність припущення. Дійснозначність V доведено.

Властивість (II) доведено.

(III) З компактності резольвенти незбуреного оператора $\mathbb{D}^{2s}$, враховуючи лему 7 та [11, Теорема VI.3.4], випливає компактність резольвенти збуреного оператора $\mathrm{S}(V)$, що й означає дискретність спектру оператора $\mathrm{S}(V)$.

Властивість (III) доведено.

Теорему 4 доведено. □

Література

[1] *Albeverio S., Gestezy F., Hoegh Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. Second edition. With an appendix by Pavel Exner. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing. – 2005. – xiv+488 p.

[2] *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: London

Mathematical Society Lecture Note Series, **271**, Cambridge University Press. – 2000. – xiv+429 p.

[3] *Badanin A., Korotyaev E.* Even order periodic operators on the real line // Int. Math. Res. Not. IMRN. – 2012. – No 5. – P. 1143–1194.

[4] *Badanin A., Korotyaev E.* Trace formula for fourth order operators on the circle // Dyn. Partial Differ. Equ. – 2013. – **10**, No 4. – P. 343–352.

[5] *Badanin A., Korotyaev E.* Sharp eigenvalue asymptotics for fourth order operators on the circle // J. Math. Anal. Appl. – 2014. – **417**, No 2. – P. 804–818.

[6] *Berezanskii Yu. M.* Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators. – Providence, RI: AMS, 1968. – ix+809 p.

[7] *Djakov P., Mityagin B.* Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials // Dynamics of PDE. – 2009. – **6**, No 2, P. 95–165.

[8] *Dunford N., Schwartz J.* Linear operators. Part II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. – New-York: Interscience, – 1963. – P. 859–1923.

[9] *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht, etc.: Kluwer APG, 1991. – xii+347 p.

[10] *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Schrödinger operators with periodic singular potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, No 4. – P. 31–42.

[11] *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin, etc.: Springer–Verlag, 1995. – xxii+619 p.

[12] *Korotyaev E.* Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions // Int. Math. Res. Not. IMRN. – 2003. – **37**, No 2. – P. 2019–2031.

[13] *Kronig R. de L., Penney W.G.* Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. Roy. Soc. (London) A. – 1931. – **130**, No 814. – P. 499–513.

[14] *Mikhailets V., Molyboga V.* Singularly perturbed periodic and semi-periodic differential operators // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 785–797.

[15] *Mikhailets V., Molyboga V.* On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle // Mathematical Notes. – 2012. – **91**, No 4. – P. 588–591.

[16] *Mikhailets V., Molyboga V.* Spectral gaps of the Hill-Schrödinger operators with distributiional potentials // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, No 4. – P. 321–327.

[17] *Möhr C.* Schrödinger operators with singular potentials on the circle: spectral analysis and aplications // Thesis at the University of Zürich. – 2001. – 134 p.

[18] *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis. Second Edition. – New York, etc.: Academic Press Inc., 1980. – xv+400 p.

[19] *Schmüdgen K.* Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. – Dordrecht: Springer, 2012. – xx+432 p.

[20] *Tkachenko V.* Eigenfunction expansions associated with one-dimensional periodic differential operators of order 2n // Functional Analysis and Its Applications. – 2007. – **41**, No 1. – P. 54–72.

[21] *Михайлець В. А., Молибога В. М.*, Спектральні задачі на класах періодичних узагальнених функцій. – Київ, 2004. – 46 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2014.– 10).

[22] *Владимиров В. С.* Обобщённые функции в математической физике. – Москва: Наука. – 1976. – 280 с.